

1. Die Zahl der unrichtigen, unzuverlässigen oder irreleitenden Angaben der neueren zusammenfassenden Darstellungen der Geschichte der Mathematik ist so groß, daß besondere Maßregeln ergriffen werden sollen, um dieselben zu verbessern;

2. die fraglichen fehlerhaften Angaben beruhen zum größten Teile darauf, daß die meisten bisherigen Verfasser solcher Darstellungen keine besondere Schulung gehabt haben und sich darum oft einer unwissenschaftlichen Arbeitsmethode bedient haben;

3. die kritische Behandlung der schon vorhandenen Darstellungen der Geschichte der Mathematik soll zum Zwecke haben, nicht nur die Unrichtigkeiten zu verbessern, sondern noch mehr die Aufmerksamkeit der Fachgenossen auf den Wert einer mathematisch-historischen Schulung zu lenken;

4. mathematisch-historische Arbeiten, die eine solche Schulung voraussetzen, sollten nur von den eigentlichen Fachmännern besorgt und jedenfalls nicht ohne ihre Mitwirkung herausgegeben werden, während spezielle Untersuchungen, die in erster Linie bezwecken, neues Material zu bringen, in vielen Fällen von anderen Mitarbeitern ausgeführt werden können.

138. Vogt, H.: Die Geometrie des Pythagoras. Bibl. math. 9 ('08/09) S. 15—54.

Vogt gibt vom Anfang des Proklos-Kommentars zu Elem. I, 47 eine neue Übersetzung und folgert, daß Proklos entschieden nicht an die Autorschaft des Pythagoras bezüglich des „pythagoreischen Lehrsatzes“ geglaubt habe; die anschließenden Proklosstellen deutet er entsprechend und schließt, daß auch Eudemos sicher den Satz nicht dem Pythagoras zugesprochen habe; die sonstigen positiven Zeugnisse haben geringen selbständigen Wert. Im Geometerverzeichnis, das unter Benutzung des Eudemos von Proklos selbst verfaßt sei, hält Vogt statt der Friedleinschen Lesung $\alpha\lambda\omicron\gamma\omega\nu$ die daneben überlieferte $\alpha\nu\alpha\lambda\omicron\gamma\omega\nu$ für die richtige und übersetzt $\sigma\upsilon\sigma\tau\alpha\sigma\iota\varsigma$ mit 'Zusammenstellung', so daß Proklos auch die Entdeckung des Irrationalen und die Konstruktion der kosmischen Körper dem Pythagoras nicht zuschrieb; übrigens könnte der ganze Passus auch interpoliert sein. Vogts Ansicht ist nicht unangefochten geblieben.

72
VOGT, H.
1908

Die Geometrie des Pythagoras.

VON HEINRICH VOGT in Breslau.

Inhalt.

Einleitung.

§ 1. PROKLUS' KOMMENTAR ZU EUKLID I, 47.

§ 2. Tendenz des EUKLID-KOMMENTARS. PROKLUS' Philosophie.

§ 3. Das Geometerverzeichnis.

§ 4. Entdeckung des Irrationalen. Konstruktion der regelmäßigen Körper.

§ 5. Handhabung der Proportionen. Zusammensetzung der regelmäßigen Körper.

§ 6. VON PYTHAGORAS' GEOMETRIE WISSEN WIR NICHTS.

Zusammenfassung.

Zeugnisse für geometrische Entdeckungen des PYTHAGORAS liegen uns an etwa zwölf Stellen der alten Literatur vor. Aber die ältesten dieser Stellen sind im letzten vorchristlichen Jahrhundert, d. h. 500 Jahre nach PYTHAGORAS, niedergeschrieben und haben nur zweifelhaften Wert. Die beweisende Kraft für unser Wissen um den Geometer PYTHAGORAS liegt in den drei Stellen, in denen PROKLUS (410—485), der Vorsteher der Neuplatonischen Schule zu Athen, in seinem Kommentar zum ersten Buche der Elemente des EUKLID geometrische Leistungen des PYTHAGORAS erwähnt. Dem PROKLUS standen gute alte Quellen, die für uns verloren sind, zu Gebote¹⁾, und er ist ein einsichtiger Berichterstatter. Er ist für die ältere griechische Mathematik unser zuverlässigster und ergiebigster Gewährsmann²⁾; seine Angaben sind bestimmend gewesen für das Bild von den geometrischen Leistungen des PYTHAGORAS, wie es durch Einzeluntersuchungen allmählich ausgestaltet und in den zusammenfassenden Darstellungen der griechischen Mathematik niedergelegt ist.

Wer Klarheit über PYTHAGORAS' Geometrie schaffen will, der muß mit der Analyse des PROKLUS einsetzen. Das habe ich getan.³⁾ Die Er-

1) VAN PESCH, *De PROCLI fontibus*, Leyden 1900, S. 36—37.

2) Vgl. TANNERY, *La géométrie grecque*, Paris 1887, S. 14—17.

3) Für sachkundigen Rat in philologischen Fragen bin ich den Herren P. FEIST und O. RUDENSOHN zu Dank verpflichtet.

gebnisse meiner Untersuchung weichen von der in der Geschichtschreibung der Mathematik herrschenden Auffassung durchaus ab. Sie liegen in der Richtung der Gedanken, welche E. ZELLER seit der zweiten und dritten Auflage seiner *Philosophie der Griechen* (1856 und 1869) über den Forscher PYTHAGORAS und unser Wissen von ihm dargelegt hat; sie bestätigen und erweitern die Resultate, zu welchen G. JUNGE in seiner Schrift *Wann haben die Griechen das Irrationale entdeckt?* gelangt ist.¹⁾

§ 1. Der Kommentar zu Euklid I, 47.

Der Kommentar des PROKLUS zu EUKLID I, 47, dem sogenannten pythagoreischen Lehrsatz, hat lange Zeit nur in der Fassung der Ausgabe von GRYNÆUS (Basileae 1533) vorgelegen (S. 110): *Τῶν μὲν ιστορεῖν τὰ ἀρχαία βουλομένων ἀκούοντες τὸ θεώρημα τοῦτο εἰς Πυθαγόραν ἀναπεμπόντων ἐστὶν εὐρεῖν καὶ βουθυτεῖν λεγόντων αὐτὸν ἐπὶ τῇ εὐρέσει.* Erst 1873 wurde aus besseren Handschriften in der Ausgabe von FRIEDLEINS²⁾ *ἀκούοντες* ersetzt durch *ἀκούοντες*, *βουθυτεῖν* durch *βουθύτην*.

BAROZZI übersetzt in seiner lateinischen Ausgabe des PROKLUS³⁾ unsere Stelle: „Si eos quidem qui antiqua enarrare volunt audiamus, praesens Theorema ad PYTHAGORAM referentes inveniemus, et dicentes eum cum id invenerit bovem immolasse“.

BRETSCHNEIDER⁴⁾ gibt nebeneinander den Text nach GRYNÆUS und die Übersetzung nach BAROZZI: „Hören wir die, welche alte Geschichten erzählen wollen, so ist dies Theorem auf PYTHAGORAS zurückzuführen, der der Erfindung halber einen Stier geopfert haben soll“.

So sehen wir die Übersetzung des BAROZZI nach drei Jahrhunderten bei BRETSCHNEIDER wieder aufleben; ihre Nachwirkung ist auch heute, nach Erscheinen der FRIEDLEINSchen Ausgabe, noch nicht erloschen.

Und doch ist die BAROZZI-BRETSCHNEIDERSche Übersetzung unserer Stelle unmöglich; ja die Stelle gibt mit der Lesart *ἀκούοντες* überhaupt keinen Sinn.⁵⁾ Der einzige Nominativ *ἀκούοντες* müßte Subjekt sein; das

1) Halle a. S. 1907. Aus „*Novae Symbolae Joachimicae*“; vgl. *Biblioth. Mathem.* 8, 1907, 8, S. 62. — Wenn S. GÜNTHER in seiner jüngst erschienenen *Geschichte der Mathematik* (Leipzig 1908, S. 56, 57) die Jungesche Richtung als „der neuesten Zeit“ angehörig und „radikal“ charakterisiert, so übersieht er, daß der besonnene ZELLER diese Richtung vor einem halben Jahrhundert eingeschlagen hat, und daß Philosophen und Philologen ihm längst gefolgt sind.

2) a. a. O. S. 426.

3) Patavii 1560, S. 270.

4) *Die Geometrie und die Geometer vor EUKLIDES*, Leipzig 1870, S. 80.

5) BAROZZI hat vielleicht aus anderen ihm zur Verfügung stehenden Handschriften (vgl. FRIEDLEINS, a. a. O. praefatio S. III, IV) die Lesart *ἀκούοντες* benutzt; doch wird dies unwahrscheinlich gemacht dadurch, daß er die Lesart *βουθύτην* des GRYNÆUS stehen läßt.

einziges Verbum finitum aber, welches als Prädikat in Frage kommen könnte, wäre *ἐστὶν εὐρεῖν*; — und so konstruieren BAROZZI und BRETSCHNEIDER auch: „wenn wir hören, finden wir“ —. Das ist aber eine griechisch ganz unmögliche Verknüpfung statt *ἀκούουσιν* (oder allenfalls *ἀκούοντες*) *ἐστὶν εὐρεῖν*. Ferner fehlt bei dieser Zuordnung das Objekt zu *εὐρεῖν*; man hat dazu die Genetive *ἀναπεμπόντων καὶ λεγόντων* mißbraucht, indem man den Genetiv *βουλομένων* von *ἀκούοντες* abhängen läßt.

HANKEL¹⁾ übersetzt in offener Anlehnung an BRETSCHNEIDER: „Wenn wir die, welche alte Geschichten erzählen wollen, hören, so finden wir, daß sie dieses Theorem auf PYTHAGORAS zurückführen“.

CANTOR²⁾ gibt keine volle Übersetzung der Stelle, sondern nennt die, „welche PROKLUS als seine Gewährsmänner anführt“: „die, welche Altertümliches erkunden wollen“.³⁾ Er begründet diese Abweichung von BRETSCHNEIDER mit den Worten: „Das Wort *ιστορεῖν* besitzt bei PROKLUS nirgend eine spöttische Nebenbedeutung, man darf also nicht, wie es geschehen ist, übersetzen 'die alte Geschichten erzählen wollen', und akzeptiert im übrigen, wie auch aus der Ausnutzung der Stelle hervorgeht, die BRETSCHNEIDERSche Übersetzung.“⁴⁾

TANNERY⁵⁾ übersetzt: „Si l'on écoute ceux qui veulent raconter l'histoire des anciens temps, on peut en trouver qui attribuent ce théorème à PYTHAGORE et lui font sacrifier un bœuf après sa découverte“.

Fast alle Autoren sehen, diesen Übersetzungen gemäß, in der Äußerung des PROKLUS die mehr oder minder bestimmte Versicherung, daß PYTHAGORAS der Entdecker des Satzes vom Hypotenusenquadrat sei; sie zweifeln nur die Glaubwürdigkeit des Stieropfers an. BRETSCHNEIDER⁶⁾ sagt: „Daß unter dem, der gern alte Geschichten erzählt, auch hier niemand anderes als EUDÆMUS zu verstehen ist, leuchtet wohl unmittelbar ein, ebenso wie die Fabelhaftigkeit des Stieropfers, das allen pythagoreischen Grundsätzen geradezu widerspricht. Das Faktum selbst aber, daß PYTHAGORAS jenen Lehrsatz erfunden habe, kann nicht bezweifelt werden, da es im ganzen Alterthum als Thatsache anerkannt wird.“ Er weist hiernach die Ansicht zurück, daß schon die Ägypter wegen Kenntnis des rechtwinkligen Dreiecks 3, 4, 5 als die Entdecker des Quadratsatzes zu betrachten seien. Ebenso bezweifelt TANNERY⁷⁾ nur die Verbindung des Stieropfers mit dem Quadratsatz⁸⁾, „ce théorème auquel est resté attaché le nom du sage de

1) *Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter*, Leipzig 1874, S. 97. HANKEL hat die FRIEDLEINSche Ausgabe nicht mehr benutzen können.

2) *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik I*, Leipzig 1907, S. 152.

3) Ebenso S. 179, 180.

4) Ebenso JUNGE, a. a. O. S. 38.

5) *La géométrie grecque*, S. 103.

6) a. a. O. S. 80.

7) a. a. O. S. 105.

8) JUNGE gibt (a. a. O. S. 29) TANNERY'S Ansicht nicht ganz richtig wieder.

Samos. Tout semble indiquer au contraire, que, s'il ne l'a pas emprunté aux Égyptiens, cette proposition fut une des premières qu'il rencontra et nullement le couronnement de ses recherches". CANTOR¹⁾ „will den pythagoreischen Lehrsatz unter allen Umständen dem PYTHAGORAS erhalten wissen". „Sei es darum, daß man den Zeugnissen des VITRUVIUS, des PLUTARCH, des DIOGENES LAERTIUS, des PROKLUS²⁾, so bestimmt sie auch lauten, wegen ihres späten Datums kein Gewicht beilegen dürfe. Schwerer fallen doch die in die Wagschale, welche PROKLUS als seine Gewährsmänner anführt, die, welche Alterthümliches erkunden wollen, sei damit, wie man gewöhnlich annimmt, ERDEMUS gemeint, oder nicht." „Wir haben uns schon darüber ausgesprochen, daß wir für den Satz vom rechtwinkligen Dreieck PYTHAGORAS selbst als den Entdecker betrachten, und uns wesentlich auf den Bericht bezogen, diejenigen, welche Alterthümliches erkunden wollten, führten den Satz auf PYTHAGORAS zurück."

Anders urteilt HANKEL³⁾: „Jene berühmte Erzählung" (vom Opfer) . . . „wird man demnach aufgeben müssen; doch möchte ich nicht so weit gehen, den Lehrsatz selbst dem PYTHAGORAS abzusprechen, obgleich keine einzige nur einigermaßen glaubwürdige Nachricht darüber vorhanden ist." Und dazu die Anmerkung: „PROKLUS, ein einsichtiger Schriftsteller, drückt sich auffallend unbestimmt so aus" (folgt die S. 17 gegebene Übersetzung). „Auch ihm war, wie hieraus hervorgeht, keine sichere Quelle bekannt." In ähnlicher Weise bestreitet VAN PESCH⁴⁾, der keine Übersetzung unserer Stelle gibt, ihre Beweiskraft: „Ex quibus verbis . . . apparet PROCLUS nondum esse persuasum traditionem illam vera referre".

So gegensätzliche Urteile konnten aus einer Stelle herausgelesen werden; und doch ist sie unzweideutig, wenn auch geschraubt stilisiert. Ich konstruiere so: der vorangestellte Genetiv τῶν ἰστορεῖν βουλομένων ist gen. partitivus, abhängig von ἐστὶν εὑρεῖν, ἀκούοντας ist Objekt zu εὑρεῖν, die nachgestellten Genetive ἀναπεμπόντων καὶ λεγόντων hängen von ἀκούοντας ab.⁵⁾

1) a. a. O. S. 152, 179, 180.

2) Ebenso ordnen ALLMAN, *On Greek geometry from THALES to EUKLID* (Hermathena 3, 1879, S. 183) und MAX SIMON, *EUKLID und die sechs planimetrischen Bücher*, Leipzig 1901, S. 66, PROKLUS ohne Unterschied in die Reihe der Zeugen VITRUVIUS, DIOGENES LAERTIUS und PLUTARCH ein. — Auch S. GÜNTHER, *Handbuch der klassischen Altertumswissenschaft* V, 1 (Nördlingen 1888), S. 29 weist ohne Bedenken den Quadratsatz dem PYTHAGORAS zu; ebenso in seiner *Geschichte der Mathematik* (Leipzig 1908), S. 55. Ebenso TROPFKE, *Geschichte der Elementar-Mathematik* II, Leipzig 1903, S. 71.

3) a. a. O. S. 97.

4) a. a. O. S. 79.

5) So wird auch das Gezwungene der TANNERYschen Übersetzung vermieden, welche ἀκούοντας im Sinne von ἀκούσκειν nimmt, davon direkt τῶν βουλομένων abhängen läßt und das Objekt zu εὑρεῖν in den an βουλομένων attrahierten Genetiven ἀναπεμπόντων καὶ λεγόντων findet.

Demnach übersetze ich wörtlich: „Unter denen, welche das Altertum erforschen wollen, kann man einige finden, welche denen Gehör geben, die dieses Theorem auf PYTHAGORAS zurückführen und ihn als Stieropferer bei dieser Gelegenheit bezeichnen"; und dem Sinne nach: „Einige Altertumsforscher schenken den Schriftstellern Glauben, welche diesen Lehrsatz bis zu PYTHAGORAS hinaufreichen und von seinem Stieropfer erzählen".

Nach der früher angenommenen Übersetzung sieht PROKLUS die Gesamtheit der alten Autoren vor sich und findet unter ihnen einige, welche den Quadratsatz dem PYTHAGORAS in Verbindung mit dem Stieropfer zuschreiben. Objektive Bedenken kann dies Zeugnis nur dadurch erregen, daß die Entdeckung des Quadratsatzes mit dem ganz verdächtigen blutigen Opfer verknüpft wird, und daß nur einige Autoren, nach der Opferzutat zu schließen, nicht gerade die ältesten und besten, den Bericht geliefert haben; eine subjektive Unsicherheit des PROKLUS kann nur in dem ἀκούοντας „wenn wir die hören" oder „wenn wir denen Gehör schenken" gefunden werden. Immerhin gibt diese Übersetzung jeder der verschiedenen oben dargelegten Auffassungen von der Zeugniskraft unserer Stelle Raum.

Anders, wenn meine Übersetzung die richtige ist. Alsdann sieht PROKLUS zwei getrennte Generationen von Schriftstellern vor sich; die einen, die ἰστορεῖν βουλόμενοι, sind die Jüngeren, vielleicht sogar seine Zeitgenossen. Die Älteren sind die Gewährsmänner der Jüngeren; sie sind es, welche in Verbindung mit der Opfererzählung den Quadratsatz dem PYTHAGORAS zugeschrieben haben. Nur einige aber von den Jüngeren, so sagt PROKLUS, messen jenen Älteren Glaubwürdigkeit bei.

Welches sind nun jene älteren Zeugnisse? Offenbar keine anderen als solche, wie wir sie heute in jenen oben (S. 15) erwähnten Schriftstellen noch in Händen haben.¹⁾ Die Nachricht von PYTHAGORAS' Stieropfer taucht für uns zuerst bei CICERO²⁾ (44 v. Chr.) auf, in Beziehung gesetzt zu einer geometrischen Entdeckung, nicht speziell zu dem Quadratsatz, aber wegen des blutigen Opfers schon bei ihrem ersten Auftreten angezweifelt; sodann bei VITRUV³⁾ (etwa 16—13 v. Chr.) verbunden mit dem auf das rechtwinklige Dreieck 3, 4, 5 beschränkten Quadratsatz; zweimal bei PLUTARCH⁴⁾ (ca. 46—120) in unsicherer Zuordnung zum

1) Diese Schriftstellen sind zusammengestellt in allen Auflagen von ZELLER, *Philosophie der Griechen*; in 1.^e 1892 stehen sie S. 320. 2. Die wichtigsten finden sich übersetzt in ALLMAN, *Greek Geometry*, S. 181—185, TANNERY, *La géométrie grecque*, S. 104 und alle in JENSEN, *Wann haben die Griechen das Irrationale entdeckt?* S. 27—30. — Allgemeiner handeln über PYTHAGORAS' Mathematik: DEGG, VIII, 11, JAMBlichus, *De vita Pyth.* 88, derselbe, *De communi math. scientia* XXII, XXIII und PROKLUS S. 65.

2) *De natura deorum* III, Kap. 36, § 88.

3) *De architectura* IX, praef.

4) *Non posse suaviter vivi sec. EPIC.* XI, 4. *Quaest. conviv.* VIII, 2. 4

Quadratsatz oder einer anderen geometrischen Entdeckung des PYTHAGORAS (entweder Flächenanlegung oder Konstruktion einer Figur von gegebener Gestalt und Fläche); bei ATHENAEUS¹⁾ (Anfang des II. Saec. n. Chr.) mit Quadratsatz; zweimal bei DIOGENES LAERTIUS²⁾ (um 200 n. Chr. oder später), einmal mit dem Quadratsatz des PYTHAGORAS, das andere Mal in Konkurrenz mit einem Opfer des THALES für Entdeckung des Satzes vom rechten Winkel im Halbkreise; endlich bei PORPHYRIUS³⁾ (233—304) mit Quadratsatz und dem Zusatz, daß nach Angabe der Gewissenhafteren der Stier aus Teig hergestellt war, also nur in effigie geopfert wurde.

Alle diese Zeugnisse haben für uns nur den Wert eines Zeugnisses; sie tragen, worauf TANNERY⁴⁾ und VAN PESCH⁵⁾ hinweisen, deutlich die Herkunft aus dem Epigramm⁶⁾ des im übrigen unbekannten Arithmetikers APOLLODOR (APOLLODOT) an der Stirn, auf welches PLUTARCH, ATHENAEUS und DIOGENES sich direkt berufen. Dieses Epigramm, dessen Spuren also zuerst im ersten vorchristlichen Jahrhundert auftauchen, in der Zeit, in welcher mit dem Neupythagoreismus auch die PYTHAGORAS-Legende ausgebildet wurde⁷⁾, können wir nur als eine Legendenbildung ansehen, — kein Geschichtschreiber der Mathematik hat es anders angesehen. Jetzt sehen wir aus der PROKLUS-Stelle, daß es auch schon für die urteilsfähigen Historiker seiner und der ihm dicht vorangehenden Zeit ebenfalls eine Legende, keine Geschichtsquelle war. Ist nach der bisherigen Auffassung PROKLUS in die Reihe der Legendenverbreiter eingestellt worden, so steht er für uns jetzt als einziger ganz außerhalb derselben: er ist ihr Kritiker, und er lehnt sie ab.

Und dieses legendenhafte Epigramm ist die einzige Aussage des ganzen Altertums, an welche sich die Zuweisung des Quadratsatzes an PYTHAGORAS knüpft; das gilt für unsere Kenntnis des Altertums; nicht anders war es zu PROKLUS' Zeit.

Keinesfalls darf bei den ἀναπέμποντες καὶ λέγοντες, den Legenden-erzählern, an EUDEMUS gedacht werden, was BRETSCHNEIDER für sicher, CANTOR für möglich hält. Erstens nicht, weil EUDEMUS für PROKLUS die beste und sicherste Quelle ist und unmöglich unter solchen Schriftstellern verstanden werden kann, denen nur wenige Glauben schenken; zweitens nicht, weil der Schüler und Mitarbeiter des ARISTOTELES, wie wir aus den Resten seiner Schriften und aus den Urteilen der Alten wissen⁸⁾, ein

1) X, 418 F.

2) VIII, 12; I, 25.

3) Vita PYTHAGORAE 36.

4) a. a. O. S. 105.

5) a. a. O. S. 80.

6) Ἡνίκα Πυθαγόρης τὸ περικλεῖς εὗρετο γράμμα,
Κεῖν' ἐξ' ὅτ' λαμπρὴν ἦγετο βοῦθυσίην.

„Als PYTHAGORAS die berühmte Figur fand, jeno, bei der er das glänzende Stieropfer darbrachte.“

7) ZELLER a. a. O. I, 1, S. 281; III, 2, S. 81, 98—99. 8) Näheres unten S. 26, 27.

knappes, wissenschaftliches Werk über Geschichte der Geometrie geschrieben hat, und in einem solchen Werk für Legenden kein Platz gewesen sein kann, vgl. VAN PESCH¹⁾: „Procli ille locus, quem modo attuli, Eudemo abiudicandus est et iniuria vulgo adhibetur ad demonstrandum iam Eudemum contendisse theorema illud notissimum ipsius PYTHAGORAE fuisse inventum“. Ich gehe weiter als VAN PESCH: Wenn PROKLUS außer jenem Epigramm und seinen Verbreitern keine Quelle für das Anrecht des PYTHAGORAS auf den Quadratsatz zu nennen weiß, so ist dies ein positiver Beweis dafür, daß EUDEMUS den Quadratsatz dem PYTHAGORAS nicht zugeschrieben hat.

Derselbe selbständig urteilende und sein Urteil nicht verbergende PROKLUS fährt im Kommentar zu EUKLID I, 47 fort: ἐγὼ δὲ θαυμάζω μὲν καὶ τοὺς πρῶτους ἐπιστάτας τῇ τοῦδε τοῦ θεωρήματος ἀληθείᾳ, μειζόνως δὲ ἄγμαι τὸν στοιχειωτὴν, οὐ μόνον ὅτι δι' ἀποδείξεως ἐναργεσιότητος τοῦτο κατέδησας, ἀλλ' ὅτι καὶ τὸ καθολικώτερον αὐτοῦ τοῖς ἀνελέγκτοις λόγοις τῆς ἐπιστήμης ἐπέλεσεν ἐν τῷ ἔκτῳ βιβλίῳ. „Auch ich bewundere die ersten Entdecker dieses Lehrsatzes; in höherem Grade aber staune ich über den Verfasser der Elemente, nicht nur weil er für diesen Satz einen ganz klaren, bündigen Beweis führte, sondern weil er auch den verallgemeinerten Satz durch unwiderlegliche Erkenntnisgründe im 6. Buche festlegte.“

Mit Recht sieht VAN PESCH in diesen Worten, besonders in dem Plural τοὺς ἐπιστάτας „die Entdecker“ einen Ausdruck des Zweifels: PROKLUS hat sich begnügt, festzustellen, daß einige an die PYTHAGORAS-Legende glauben; er selbst spricht im weiteren nicht von PYTHAGORAS, ja nicht von einem bekannten oder unbekannten Entdecker, sondern von den Entdeckern. Dieser Plural kann in diesem Zusammenhange nicht als zufällig angesehen werden. Ist es sicher, daß in den vorangehenden Worten die Gewährsmänner, welche den Quadratsatz dem PYTHAGORAS selbst zuschreiben, als unzuverlässig charakterisiert werden, so ist es mindestens wahrscheinlich, daß PROKLUS in den bedingungslos angegebenen ἐπιστάτας auf die Kollektivbezeichnung in einer ihm zuverlässig scheinenden Quelle Bezug nimmt.²⁾

Von der besprochenen PROKLUS-Stelle ist die zwei Seiten später folgende, ebenfalls auf EUKLID I, 47 bezügliche, nicht zu trennen; nämlich von den beiden Methoden zur Auffindung ganzzahliger rechtwinkliger Dreiecke τὴν μὲν εἰς Πλάτωνα ἀναπέμπονσι, τὴν δὲ εἰς Πυθαγόραν, „daß man die eine auf PLATO zurückführt, die andere auf PYTHAGORAS“. PROKLUS ist in seinen Quellenangaben sparsam; er pflegt, wenn er dieselbe Quelle mehrmals hintereinander benutzt, sie höchstens einmal zu bezeichnen. Um so

1) a. a. O. S. 80

2) Vgl. unten S. 52.

weniger ist zu erwarten, daß er die umständliche Charakterisierung von S. 426 auf S. 428 wiederholen sollte. Doch liegt in der Wiederaufnahme des Wortes ἀναπέμπουσιν ein Hinweis auf die Gewährsmänner von S. 426 und damit auch die Andeutung der gleichen Stellungnahme des PROKLUS.

§ 2. Tendenz des Euklid-Kommentars. Proklus' Philosophie.

Die dritte und letzte der PROKLUS-Stellen, durch welche PYTHAGORAS geometrische Entdeckungen nachgesagt werden, findet sich in dem historischen Überblick, welchen CANTOR das „Mathematikerverzeichnis“, JUNGE zutreffender das „Geometerverzeichnis“ nennt.¹⁾

Diese PYTHAGORAS-Stelle, wie das ganze Geometerverzeichnis, ist richtig zu verstehen allein aus dem Zweck des EUKLID-Kommentars und aus der Philosophie des PROKLUS heraus. Es ist deshalb nötig, auf beide einen Blick zu werfen.

Ohne auf Einzelheiten einzugehen, will ich zuerst einige Stellen anführen, in denen an hervorragenden Punkten des Werkes PROKLUS sein Programm mit gar nicht mißzuverstehender Deutlichkeit entwickelt. Am Schluß von Prologus II (84, 8—15), heißt es: „Indem ich mit der Einzeluntersuchung beginne, warne ich meine Leser, das bei mir zu suchen, wovon meine Vorgänger so viel Wesens machen: Einzelannahmen, Einzelfälle und derartiges. Übersättigt hiervon werde ich dergleichen nur selten berühren. Das aber, was theoretischen Gehalt hat und in Beziehung zur Philosophie steht, das soll mein Kommentar vorzugsweise behandeln.“ Vor dem Übergang zum ersten Lehrsatz (200, 10—18): „Ich wende mich zur Auslegung der EUKLIDischen Beweise. Ich gebe wieder, was die Alten Vollendetes darüber geschrieben haben, indem ich uferlose Wortfülle kürze. Was technisch ausgezeichnet und erkenntnistheoretisch wertvoll ist, das überliefere ich, weil ich mehr auf mustergültige Durcharbeitung Wert lege als auf Mannigfaltigkeit der Fälle und Annahmen, durch die Neulinge sich gerade am meisten angezogen fühlen.“ Schlußworte des ganzen Werkes (432, 11—19): „Wenn andere Aufgaben mich ablenken sollten, so fordere ich die Freunde dieser Studien auf, nach derselben Methode auch die folgenden Bücher auszulegen, dabei aber stets nach Bedeutsamkeit und Klarheit zu streben. Denn die Kommentare, welche bisher umlaufen, stiften nichts als Verwirrung, weil sie weder Zurückführung auf das Ursächliche, noch dialektische Gliederung, noch philosophische Theorie bringen.“

Es gibt nach PROKLUS drei Stufen des Erkennens, die Vernunftkenntnis (νοητὴ γνῶσις), welche unvermittelt auf die reinen, einheitlichen, unteil-

baren, immateriellen Ideen gerichtet ist, die Meinung, Wahrnehmung (δόξα, αἴσθησις), welche sich auf die sinnlichen, teilbaren, materiellen Dinge bezieht, und dazwischen die vermittelte Erkenntnis, das Denken (διάνοια, λογισμός), dessen Objekte höher als das materielle Teilbare, aber niedriger als das intelligible Unteilbare stehen (3, 14—4, 8). Zu diesen Mitteldingen gehören die mathematischen Gebilde; deshalb nimmt das mathematische Erkennen eine Mittelstellung zwischen dem sinnlichen und dem ideellen Erkennen ein (μεσότης τῶν μαθηματικῶν). Die Mathematik ist nicht selbst höchste Erkenntnis (πρώτη ἐπιστήμη), aber sie kommt der höchsten Erkenntnis am nächsten; sie geht nicht auf das absolute Voraussetzungslose, aber auf die in der Eigenart der Seele liegenden Bedingungen und dadurch auf die Gründe des Mannigfaltigen und der Erscheinungswelt (30—32).

Denn die PLATONISCHE Philosophie stellte sich dieselbe Frage wie die KANTISCHE: Woher stammt die Genauigkeit und absolute Sicherheit (ἀκρίβεια, ἀσφάλεια, ἀνέλεγκτον) der mathematischen Wahrheiten (12, 13—14)? Die Antwort lautet zunächst so wie die KANTISCHE: Die Genauigkeit und Sicherheit der Mathematik wäre unerklärbar, wenn die mathematischen Wahrheiten aus der Wahrnehmung (αἴσθησις) abgeleitet wären, die Seele also aus den materiell vorhandenen Dreiecken und Kreisen nachträglich in sich die Gestalt des Dreiecks und des Kreises und ihre Gesetze ableiten müßte¹⁾ (12—14).

Von hier an aber ist die PLATONISCHE Wendung eine andere als die KANTISCHE. Nach KANT liegen in der Seele Raum und Zeit als leere Formen, als Möglichkeiten, die angewendet auf die Erscheinung überhaupt erst Erfahrung liefern; außerhalb der möglichen Erscheinungswelt gibt es keine Erkenntnis. Nach PLATO aber liegen die Wesensvorbilder (παράδειγματα κατ' οὐσίαν, 13, 9) der mathematischen Gestalten und Gedanken als reine, immaterielle, unvergängliche, unteilbare, voraussetzungslose Ideen in der Seele vorgebildet; die Seele erzeugt selbst die mathematischen Gebilde als Projektionen (προβολαί, 13, 10) der in ihr vorhandenen Formen. Die reinen mathematischen Gebilde sind die in Schmerzen geborenen Kinder der ewigen Ideen (13, 22—26). In der Erscheinungswelt aber sind die Ideen an das Wesenlose, Nichtseiende gebunden, materiell, geteilt, voraussetzungsvoll, vergänglich; ihre Erkenntnis unsicher (αἴσθησις, δόξα). Die Figur des Kreises, welche die Sinnenwelt bietet, entbehrt der Genauigkeit, Sicherheit und Reinheit; auch das Vorstellungsbild (ὁ ἐν φαντασίᾳ κύκλος) des Kreises ist nicht eines, sondern aus Einheit und Mannigfaltigkeit gemischt, nicht reine Form,

1) ED. FRIEDLEIN, S. 65—68.

1) VAN PESCH, a. a. O. S. 33: „Non parvam igitur similitudinem inter PROCLI sententiam et KANTIANAM doctrinam de spatii praeconceptionibus nostris deprehendimus“.

sondern dargestellte Form; erst der Kreis im Denken ist einer und unteilbar und nicht auseinandergelegt (*εἰς καὶ ἀπλοῦς καὶ ἀδιάστατος*, 54, 5—13).

Die Mittlernaufgabe der Mathematik ist es nun, die unreine, in der Sinnenwelt anhebende Erkenntnis zur reinen Erkenntnis des Unvergänglichen zu läutern und zu erheben. Dadurch wird sie zur unentbehrlichen Vorstufe der Philosophie: sie soll in einem besonderen Falle der Seele die Fesseln der Sinnenwelt abnehmen und damit überhaupt ihren Blick für die Erkenntnis des Ganzen reinigen (28, 3—7). *ὥτουσι καὶ τῆς μαθηματικῆς τὸ τέλος εἰς νοῦν ἀναπέμπειν προσήκει καὶ τὴν σύμπασαν σοφίαν* (28, 10—11). „So gehört es sich, das Ziel der Mathematik auf Vernunftkenntnis und die Weisheit als Ganzes zu richten.“

Diesem Ziele strebt die Mathematik zu, indem sie mit der Einzelkenntnis, die sich aus der Wahrnehmung, ja aus dem menschlichen Bedürfnis ergibt (29, 4—13), zwar beginnt, aber nicht bei ihr stehen bleibt. Die mathematische Vorstellungskraft wird äußerlich angeregt zur Besinnung auf die in der Seele vorgebildeten Formen (*ἀνάμνησις* 18, 16—20); dann aber muß sie die Sinnenwelt, den Augenschein, welche den Ausgang bildeten, abstreifen; sie muß von dem, was seinem Wesen nach später und zufällig ist, aufsteigen zu dem, was genetisch das Folgende, wesentlich aber das Vorangehende ist. So baut die mathematische Erkenntnis eine Stufenleiter (35, 11—12) von der *ὕλη* zum *εἶδος*, vom *ἴδιον*, *ἐπὶ μέρος* zum *καθόλου*, von *αἰσθησις*, *δόξα* durch *διάνοια* zum *νοῦς*; entsprechend dem pythagoreischen Merkwort: *σχῆμα καὶ βᾶμα* (84, 17).¹⁾

Mit diesen Ausführungen über das Wesen der Mathematik macht PROKLUS keinen Anspruch auf Originalität (48, 1—5): *Τὰ μὲν δὴ κοινὰ καὶ ἐπὶ πᾶσαν διατείνοντα τὴν μαθηματικὴν ἐπιστήμην ἐν τοῖς προειρημένοις λόγοις τεθεῖσθαι τῷ τε Πλάτῳ συμπορευόμενοι καὶ παρὰ τῶν ἄλλων ἀναλεγόμενοι τὰ πρὸς τὴν παροῦσαν πραγματείαν ἡμῖν συντείνοντα νοήματα*. „Das, was sich allgemein auf die gesamte Mathematik bezieht, habe ich in der Vorrede überschaut, indem ich mich an PLATO anschloß und auch von anderen²⁾ die Gedanken aufnahm, welche den vorliegenden

1) „Figur-Geometrie ist Stufe-Erhebung.“

2) Wenn PROKLUS außer PLATO und PLOTIN gefolgt ist, scheint nicht näher untersucht zu sein. VAN PESCH geht auf die Quellen von Prologus I nicht ein (außer 70 mit dem Hinweis auf PLOTIN I. 33 für PROKLUS 21, 19—24). NIC. FESTA bemerkt in seiner Ausgabe von JAMBlich, *De communi mathematica scientia* (Leipzig 1891, Praefatio IX, 2—7): „Id tamen mihi persuasum est JAMBlichum librum hunc et PROCLUM in EUCLIDEM commentariorum partem prologi priorem ex eodem fonte manasse; fontem autem ipsum, ut plerumque, ex Platoniceis et Aristotelicis rivulis fuisse deductum. Sed de hoc alias.“ Er gibt im Index unter PROKLUS zehn zum Teil recht ausgedehnte,

Stoff betreffen.“ Er wandelt in den ausgetretenen Pfaden der PLATONISCHEN Schule; aber gerade darum, weil seine Gedankenrichtung unfrei ist¹⁾, ist sie absolut zwingend für die Tendenz seines ganzen Werkes.

PROKLUS wollte nicht die Elemente aus rein mathematischem Interesse kommentieren; er wollte nicht geometrisch-historische Daten in möglichster Reinheit und Vollständigkeit der Nachwelt überliefern; — diese Daten lagen ja zu seiner Zeit vor aller Augen; er konnte nicht wissen, daß uns späteren Nachkommen sein Werk der Ersatz für die verschütteten Quellen sein würde, und daß eine Zeile EUDOXUS uns viel wertvoller sein würde als zehn Seiten PROKLUS. Was er wollte und nach seiner Art wollen mußte, das war, seinen Zeitgenossen, ja seinen Studenten (den *νεαροπρεπῆς, εἰσαγόμενοι, ἀκούοντες*) das Beste zu geben, was er hatte: die Mathematik als Teil der Philosophie, die Analyse der Elemente als Einführung in die Philosophie.²⁾ Auf diesen Standpunkt müssen wir uns stellen, wenn wir ihn verstehen und ihm gerecht werden wollen.

Aus PROKLUS' philosophierender Stellung zur Mathematik erklären sich auch manche Besonderheiten seines Urteils, die wir anders gar nicht verstehen würden, so die unbillige Hochschätzung der verallgemeinerten Lehrsätze gegenüber den besonderen. 250, 251 sagt er: „Wir sind zwar dem alten THALES Dank schuldig für die Entdeckung der Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck“; „höhere Bewunderung aber gebührt den Neueren (gemeint ist GEMINUS), welche diesen Satz verallgemeinert und seine Gültigkeit für alle in sich gleichartigen Linien (*ὁμοιομετρῆς*), d. h. auch für den Kreis und die zylindrische Spirale nachgewiesen haben.“ Die Ausdehnung des Quadratsatzes auf ähnliche Figuren über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks schätzt er höher ein als die Entdeckung des Quadratsatzes selbst (vgl. oben S. 21). Ja, für uns sehr interessante Einzelsätze, wie die Entdeckung HIPPAS³⁾, daß die drei Hilfslinien beim EUKLIDISCHEN Beweise des Quadratsatzes sich in einem Punkte schneiden, haben für ihn kein Interesse (429, 12—15); er übergeht sie, weil sie nicht Ausgang für weitere Verallgemeinerungen sind.

Wir urteilen in diesen Fällen anders. Wir haben vorzugsweise historisches und daneben psychologisches Interesse. Deshalb schätzen wir die Leistung des ersten Schrittes viel höher ein als die der folgenden. Auf PROKLUS' philosophischer Stufenleiter aber steht am höchsten der

übereinstimmende Stellen an, die sich noch vermehren lassen. Die versprochene Untersuchung über hat er nicht geführt.

1) ZELLEN, a. a. O. 3², S. 787; VAN PESCH, a. a. O. Kap. IV.

2) VAN PESCH, a. a. O. S. 55: „Mathematicen summam philosophiae studio utilitatem afferre censebat PROCLUS; ergo eam discipulos docebat.“

3) VAN PESCH, a. a. O. S. 45.

allgemeinste Satz; denn ihm ist καθόλου, καθολικῶς, καθολικώτερον die Zauberformel, welche die Loslösung von ὕλη und αἰσθησις bedeutet.

§ 3. Das Geometerverzeichnis.

Treten wir, so vorbereitet, an das Geometerverzeichnis heran: in seinem Prologus II zählt PROKLUS von THALES bis zu dem letzten Vorläufer EUKLIDUS, PHILIPPUS von Mende, 21 Geometer auf. Von den meisten sagt er nichts, als daß sie eben Geometer waren. Er drückt dies in mehreren ganz inhaltlosen Wendungen aus, wie „er beschäftigte sich mit Geometrie“ (zweimal); „er erwarb sich Anerkennung durch geometrische Untersuchungen“ (sechsmal); „er vermehrte die Sätze“ (zweimal); „er erfand vieles“ (dreimal).

Bei denen, über die er nicht so kurz hinweggeht, macht PROKLUS meist Bemerkungen über methodische Leistungen: Haften an der Wahrnehmung oder Loslösung davon, Verknüpfung mit philosophischer Erkenntnis und besonders Verallgemeinerung der Sätze. Dies geschieht zehnmal: bei THALES, PYTHAGORAS, PLATO, LEODAMAS, ARCHYTAS, THIAETET, LEON, EUDOXUS, THEUDIS, PHILIPPUS. Abfassung oder Verbesserung der Elemente wird vier Geometern zugeschrieben (HIPPOKRATES, LEON, THEUDIS, HERMOTIMUS). Genau gekennzeichnete Einzelentdeckungen finden wir nur dreimal: bei PYTHAGORAS, HIPPOKRATES und EUDOXUS.

Die Herkunft des Geometerverzeichnisses ist eine der wichtigsten und am meisten behandelten Fragen der Geschichte der griechischen Geometrie.

Als Quelle kommt zunächst des EUDEMUS Geschichte der Geometrie in Betracht. PROKLUS hatte sie, darin herrscht jetzt volle Übereinstimmung, zweifellos in Händen¹⁾; denn noch hundert Jahre später war sie in den Händen von SIMPLIKIUS und EUTOKIUS; er zitiert sie an vielen Stellen seines Werkes mit Namenangabe, an anderen benutzt er sie ohne Namensnennung.²⁾ Am Ende des Geometerverzeichnisses selbst weist der Satz οἱ μὲν οὖν τὰς ἱστορίας ἀναγράφαντες μέχρι τούτου προάγουσι τὴν τῆς ἐπιστήμης ταύτης τελείωσιν „die Geschichtsschreiber machen mit diesem (PHILIPPUS von Mende, einem Schüler PLATOS) den Abschluß ihrer Darstellung“, wie von niemand bestritten wird, auf EUDEMUS hin.

PROKLUS benutzt EUDEMUS' Geschichte der Geometrie mit Quellenangabe im ganzen fünfmal: 299, 3 Entdeckung des Scheitelwinkelsatzes durch THALES; 333, 6 Winkelantragung des ÖNORIDES; 379, 2 Entdeckung der Summe der Dreieckswinkel durch die Pythagoreer; 352, 14—18

Kongruenzsatz und Entfernungsmessung des THALES; 419, 15 Flächenanlegung der Pythagoreer. Außerdem werden ohne jeden Zweifel auf EUDEMUS' Geschichte der Geometrie vier weitere PROKLUS-Stellen zurückgeführt³⁾: 157, 11 Halbierung des Kreises durch THALES; 250, 20 Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck von demselben; 283, 7—10 Lotfällen des ÖNORIDES; 305, 3 Anlegen von Vielecken um einen Punkt herum zur Ausfüllung von vier Rechten durch die Pythagoreer. Aus diesen neun Zitaten geht der Charakter von EUDEMUS' Werk deutlich hervor: alle neun Stellen liefern Angaben über ganz bestimmte geometrische Entdeckungen. Dagegen kommt als Beglaubigung von theoretischen Spekulationen, woran PROKLUS doch reich ist, ja selbst von Definitionen, EUDEMUS' Geschichte der Geometrie nie vor. Für die Winkeldefinition des EUDEMUS (125, 7) beruft sich PROKLUS nicht auf die Geschichte der Geometrie, sondern auf ein anderes Werk desselben Verfassers περὶ γωνίας. Die Pythagoreer werden im ganzen achtzehnmal erwähnt; aber nur dreimal ist die Quelle EUDEMUS, und zwar gerade die dreimal, in denen es sich um bestimmte geometrische Entdeckungen handelt. Die anderen 15 Stellen geben ohne Ausnahme Definitionen, begriffliche Teilungen, methodische, mystische und metaphysische Spekulationen der Pythagoreer — all dieses war offenbar in des EUDEMUS Geschichte der Geometrie nicht zu finden.

Wir besitzen ferner einen langen Auszug des SIMPLIKIUS⁴⁾ aus EUDEMUS, betreffend die Quadratur der Mündchen des HIPPOKRATES, und einen anderen von EUTOKIUS⁵⁾ über die Würfelverdoppelung des ARCHYTAS. Alles bestätigt die Vorstellung von des EUDEMUS Werk, die wir aus PROKLUS erhalten haben. Zum Überfluß liefert uns SIMPLIKIUS⁶⁾ noch eine Charakteristik der Darstellungsweise und des Stiles des EUDEMUS: ἐκδήσομαι δὲ τὰ ὑπὸ τοῦ Εὐδήμου κατὰ λέξιν λεγόμενα ὅλγα τινὰ προστιθεὶς εἰς σαφήνειαν ἀπὸ τῆς τῶν Εὐκλείδου στοιχείων ἀναμνήσεως διὰ τὸν ὑπομνηματικὸν τρόπον τοῦ Εὐδήμου κατὰ τὸ ἀρχαῖον ἔθος συντόμους ἐκθεμένους τὰς ἀποδόσεις — „Ich werde das von EUDEMUS Gesagte wörtlich mitteilen, jedoch zur Verdeutlichung einige Hinweisungen auf die Elemente des EUKLID hinzufügen, wegen der notizenhaften Art des EUDEMUS, welcher nach alter Sitte nur kurze Angaben macht.“

1) VAN PESCH, a. a. O. S. 77—79.

2) SIMPLICIUS in ARISTOTELIS physic. libr. IV priores comment. ed. H. DIELS, Berolini 1882, p. 54—69. Neuerdings leicht zugänglich gemacht durch F. RUDIO, Der Bericht des SIMPLICIUS über die Quadraturen des ANTIPIETAS und des HIPPOKRATES, Leipzig 1907. Vgl. Biblioth. Mathem. 3, 1902, 7—62, 342—349 und 4, 1903, 13—18, 118—126.

3) In HEIBERGS ARCHIMEDES-Ausgabe III, S. 98—103.

4) DIELS, a. a. O. S. 60; RUDIO, a. a. O. S. 46.

1) Zusammenfassend und abschließend handelt hierüber VAN PESCH, a. a. O. Kap. III. Vgl. HEIBERG, Philologus 43 (1884), S. 345. 2) VAN PESCH, a. a. O. S. 77—79.

Das Geometerverzeichnis des PROKLUS enthält nun als wesentlichsten Bestandteil methodische Raisonsnements, welche dem Werke des EUDEMUS bestimmt fremd gewesen sind; andererseits fehlt in ihm jede Erwähnung von gewissen Problemen, welche EUDEMUS besprochen hat, und welche die Geometrie der zweiten Hälfte des 5. Jahrhunderts beherrscht haben, Würfelverdoppelung, Kreisquadratur, Dreiteilung des Winkels.

So hat die Streitfrage entstehen können: *Hat für das Geometerverzeichnis dem PROKLUS ein entsprechender Teil der Geschichte der Geometrie von EUDEMUS als Quelle vorgelegen? Hat er aus dieser direkten Quelle oder aus einer abgeleiteten geschöpft?* Hatte TANNERY bestimmt behauptet¹⁾, daß PROKLUS seine Angaben nicht dem EUDEMUS selbst, sondern dem GEMINUS (1. Jahrhundert v. Chr.) entnommen habe, so kommt VAN PESCH²⁾, der zuletzt diese Frage behandelt hat, nicht zu einer bestimmten Antwort: „Haec fere sunt, quae de nostro loco observare velim, ut ita aliis viam ad hanc quaestionem ad certum finem perducendam patefaciam. Nam equidem, quamquam magis me inclinatum esse confiteor ad illam ex EUDEMO epitomen non ipsi PROCLUS sed excerptatori alicui attribuendam, tamen pro certo id statuere non ausim.“ CANTOR dagegen³⁾ sieht das Mathematikerverzeichnis als von EUDEMUS herrührend an.

Nach der in § 2 dargelegten Auffassung des PROKLUS von der Aufgabe der Mathematik in der Entwicklung der Erkenntnis und der hierauf basierten Tendenz seines EUKLID-Kommentars kann für ihn ein Überblick über die Entwicklung der Geometrie nicht der Ort sein, in dem Einzelleistungen aufgezählt werden dürfen, also auch nicht der Ort für einen Auszug aus der Geschichte der Geometrie des EUDEMUS. PROKLUS hat offenbar nicht die Absicht, eine vollständige Übersicht über die Entwicklung der Methoden zu geben, aber bei seinem einseitigen Interesse für methodische Fortschritte stellt sich ihm ganz von selbst das geschichtliche Resümee unter das philosophische Leitmotiv (65, 1–3): ἀπὸ αἰσθησεως οὖν εἰς λογισμὸν καὶ ἀπὸ τούτου ἐπὶ νοῦν ἢ μετάβασις γένοιτο ἀνελκόμενος „Die natürliche Entwicklung geht von der Wahrnehmung zur Überlegung⁴⁾ und von dieser zur Vernunftkenntnis.“

So sind die aus dem praktischen Bedürfnis hervorgegangenen Messungen der Ägypter für THALES der Anlaß zu geometrischen Betrachtungen geworden; deshalb nimmt er eine Zwischenstellung ein: „Manches behandelte er allgemein, in anderem blieb er an der Wahr-

1) *La géométrie grecque*, chap. V. 2) a. a. O. S. 84. 3) a. a. O. I³, S. 257.

4) λογισμός ist hier nicht als „Berechnung“ aufzufassen; denn die Berechnung hatte nach griechischer Auffassung ganz an dem „Besonderen“, den Gegenständen der αἰσθησις und führt nicht über sie hinaus. Vgl. hierzu besonders 39, 20–40, 5. Hier ist λογισμός im Sinne von διάνοια zu verstehen.

nehmung haften.“¹⁾ Den entscheidenden Schritt der Loslösung von praktischen Zwecken zur immateriellen und damit rein intellektuellen Betrachtung tat PYTHAGORAS; dadurch bahnte er der Geometrie als spekulativer Wissenschaft den Weg. PROKLUS charakterisiert die einzelnen Geometer nur nach den Fortschritten, die sie auf dieser Bahn gemacht haben, und ferner soweit sie als Vorgänger des EUKLID sich durch Abfassung oder Verbesserung der Elemente verdient gemacht haben.

Diejenigen Geometer, welche nur Einzeltatsachen entdeckt haben, und auch diejenigen, deren Entdeckungen zwar Fortschritte in der ihn interessierenden Verallgemeinerung sind, aber über die Elemente hinausgehen, die findet er mit bloßer Nennung des Namens ab, oder er übergeht sie ganz. Die ihm nach EUDEMUS wohlbekannten geometrischen Entdeckungen von THALES, ÖNORIDES, HIPPIAS erwähnt er wohl im Verlaufe des Kommentars an geeigneter Stelle²⁾, aber im Geometerverzeichnis war für sie kein Platz. Würfelverdoppelung, Kreisquadratur, Winkelteilung sind ungelöste Probleme, die Lösungsversuche sind nicht exakt, die bloße Fragestellung ist für PROKLUS keine methodische Leistung. Die mechanischen Lösungen müssen ihm als Rückfälle in die Empirie und methodisch ganz verwerflich erscheinen; Lösungen durch Kegelschnitte und andere höhere Kurven sind nicht elementar; also dürfen wir uns gar nicht wundern, von diesen ihre Zeit aufs tiefste bewegenden Problemen im Geometerverzeichnis keine Spur zu finden.

Bringt das Geometerverzeichnis mithin gerade das, was PROKLUS nach seiner Denkweise und nach der Anlage seines Werkes interessieren mußte, läßt er das weg, was nach diesen Rücksichten für ihn nicht in Betracht kam, so wird die, andernfalls unverständliche, Eigenart des Geometerverzeichnisses am besten durch die Annahme erklärt, daß PROKLUS selbst der Verfasser dieses Geometerverzeichnisses ist.

Seine Hauptgrundlage wird EUDEMUS' Geschichte der Geometrie gewesen sein; doch sind andere Quellen nicht ausgeschlossen, beruft er sich doch selbst einmal auf HIPPIAS von Elis, ein andermal auf ein Werk PLATOS; endlich kann manches Niederschlag von Meinungen sein, die,

1) So ist τοῖς μὲν καθολικώτερον ἐπιβάλλον, τοῖς δὲ αἰσθητικώτερον gemäß der Denkweise des PROKLUS zu übersetzen. Wir dürfen hierin eine Beziehung auf die Verwendung der Kongruenz zur praktischen Ausmessung der Entfernung (352, 16–18) sehen. Das ist auch die Auffassung TANNERYs (a. a. O. S. 92.) und dem entspricht seine Übersetzung (a. a. O. S. 67): „ses tentatives d'un caractère tantôt plus général, tantôt plus restreint au concret“. Dagegen ist die Übersetzung (BRETSCHNEIDER, a. a. O. S. 28, 42; CANTOR, a. a. O. I³ S. 136): „das eine machte er allgemeiner, das andere sinnlich faßbarer“ zu verwerfen.

2) THALES 157, 11; 250, 20; 299, 4; 352, 15. — ÖNORIDES 283, 7; 323, 6. — HIPPIAS 272, 7; 356, 11.

auf keine Quelle zurückführbar, als Schulüberlieferungen von Generation zu Generation gelaufen waren. Als *Auszug* aber ist das Geometerverzeichnis nur insoweit zu betrachten, als *bloße Namen* und besonders Namen von Verfassern längst verschollener Werke vorkommen; im übrigen ist es, soweit EUDÆMUS in Betracht kommt, nicht Auszug, sondern *Reflexion über die Angaben des EUDÆMUS*; von den methodischen Bemerkungen und Raisonsnements des Geometerverzeichnisses hat im EUDÆMUS bestimmt nichts gestanden. Ich glaube mit dieser Erklärung dem Tatbestande besser gerecht zu werden als TANNERY¹⁾: „Si PROCLUS avait eu ces Livres (d'EUDÆME) entre les mains, il n'aurait point fait l'extrait que nous avons, et il nous aurait fourni en temps et lieu beaucoup plus de détails tirés d'EUDÆME que nous n'en trouvons malheureusement chez lui“.

Geradezu als Ausnahmen sind die Angaben über geometrische Einzelleistungen bei drei Geometern des Verzeichnisses, bei EUDOXUS, HIPPOKRATES und PYTHAGORAS, anzusehen. Von EUDOXUS heißt es (67, 3—8): *πρῶτος τῶν καθόλου καλουμένων θεωρημάτων τὸ πλῆθος ἤβησεν καὶ ταῖς τρισὶν ἀναλογίαις ἄλλας τρεῖς προσέθηκεν καὶ τὰ περὶ τὴν τομὴν ἀρχὴν λαβόντα παρὰ Πλάτωνος εἰς πλῆθος προήγαγεν καὶ ταῖς ἀναλύσεσιν ἐπ' αὐτῶν χρησάμενος* „er vermehrte zuerst die Zahl der als 'allgemein' bezeichneten Probleme und fügte zu den bekannten drei Proportionen drei neue hinzu; auch vermehrte er die Kenntnis des auf den 'Schnitt' Bezüglichen, welches bei PLATO seinen Anfang genommen hatte, indem er sich hierbei der analytischen Methode bediente“. Die in meiner Übersetzung wiedergegebene Zusammenfassung der Satzteile rechtfertige ich auf folgende Weise: ebenso wie im letzten Teil der Periode die Beschäftigung mit dem 'Schnitt'²⁾ nur die Gelegenheit zur Anwendung der analytischen Methode ist, ebenso ist die Erfindung dreier neuer Proportionen eine Verallgemeinerung des Proportionsbegriffs und also selbst ein Beispiel für die Vermehrung der allgemeinen Theoreme.³⁾ Faßt man die Stelle so,

1) a. a. O. S. 75.

2) Nach BRETSCHNEIDER (a. a. O. S. 167, 168) und CANTOR (a. a. O. I^a, S. 240—241) die stetige Teilung; nach TANNERY (a. a. O. S. 68, 3; 76—78) Schnitt des Kegels oder Zylinders.

3) CANTOR (a. a. O. I^a, S. 238): „Eudoxus . . . war der erste, welcher die Menge der Lehrsätze überhaupt vermehrte“. Ich kann dies nicht für eine sinnessprechende Übersetzung ansehen. TANNERY (a. a. O. S. 96): „La théorie des proportions, conçue généralement et comme applicable à l'Arithmétique et à la Musique aussi bien qu'à la Géométrie . . . c'est sans doute par là qu'il faut expliquer l'expression de théorèmes généraux (καθόλου)“. Ich glaube mit TANNERY, daß in dem καθόλου in der Tat Bezug genommen wird auf die durch EUDOXUS vollzogene Verallgemeinerung der Proportionslehre; aber ich glaube nicht, daß es sich auf die Ausdehnung der Theoreme auf Arithmetik, Musik und Geometrie bezieht. Dem widerspricht der Gebrauch des Wortes καθόλου als eines terminus technicus innerhalb der Geometrie.

so stehen in ihr die Einzelentdeckungen nur als Gelegenheitsbezeichnung von methodischen Fortschritten. Als rein sachliche geometrische Einzelleistungen bleiben dann allein die dem HIPPOKRATES und dem PYTHAGORAS zugewiesenen Entdeckungen übrig.

Beide aber werden in ganz eigenartiger Weise eingeführt 66, 4—8: *ἐν οἷς Ἰπποκράτης ὁ Χίος ὁ τὸν τοῦ μηνίσκου τετραγωνισμὸν εὗρων, καὶ Θεόδωρος ὁ Κυρηναῖος ἐγένοντο περὶ γεωμετρίαν ἐπιφανεῖς. πρῶτος γάρ ὁ Ἰπποκράτης τῶν μνημονευομένων καὶ στοιχεῖα συνέγραψεν.* — „Nach diesen machten sich in der Geometrie bemerkbar der als Entdecker der Mönchenquadratur bekannte HIPPOKRATES von Chios und THEODORUS von Kyrene. Denn HIPPOKRATES war der erste unter den Genannten, welcher auch Elemente verfaßte.“ Man beachte: der Hauptgrund der Erwähnung des HIPPOKRATES liegt in der Abfassung von Elementen. Daß HIPPOKRATES einer der erfindungsreichsten Köpfe war, daß er sich mit Erfolg an die schwierigsten Probleme seiner Zeit wagte, daß er die Würfelverdoppelung auf die Konstruktion der zwei mittleren Proportionalen zurückführte, daß er durch die Quadratur der Mönchen in genialer Weise die Kreisquadratur zu erzwingen suchte, davon sagt PROKLUS kein Wort. Die Mönchenquadratur selbst erwähnt er, aber wie! Nicht als eine Belehrung des Lesers, sondern, wie es die Art einer solchen partizipialen Apposition ist, in Parenthese als Gedächtnishilfe, als Berufung auf eine bekannte Tatsache.

65, 15—21: *ἐπὶ δὲ τούτοις Πυθαγόρας τὴν περὶ αὐτὴν φιλοσοφίαν εἰς σχῆμα παιδείας ἐλευθέρου μετέστησεν, ἠνώθεν τὰς ἀρχὰς αὐτῆς ἐπισκοπούμενος καὶ αὖτως καὶ νοερῶς τὰ θεωρήματα διερευνώμενος, ὅς δὴ καὶ τὴν τῶν ἀλόγων (ἢ ἀναλόγων) πραγματείαν καὶ τὴν τῶν κοσμικῶν σχημάτων σύστασιν ἀνεύρεν.* — „Nach diesen verwandelte PYTHAGORAS die Untersuchung geometrischer Fragen in eine freie (d. h. von praktischen Zielen losgelöste) Wissenschaft, indem er deduktiv die ersten Gründe erforschte und die Lehrsätze immateriell und intellektuell untersuchte. Derselbe hat bekanntlich auch die Handhabung des Irrationalen (andere Lesart: der Proportionen) und die Zusammensetzung (Konstruktion?) der kosmischen Figuren entdeckt.“

Der Hauptsatz enthält das methodische Raisonement. Was für Quellen PROKLUS hierfür gehabt haben mag, ob er sein eigenes Urteil, ob er Schulüberlieferung gibt, wage ich nicht zu entscheiden. Auf zweierlei aber möchte ich hinweisen, erstens, daß bestimmt nicht an EUDÆMUS zu denken ist, zweitens, daß in JAMBlichus¹⁾ (gest. um 333 n. Chr.) das Wesen der Geometrie des PYTHAGORAS ganz ebenso geschildert wird: „Er betrieb die Geometrie philosophisch“; „als Schönstes in ihr begegnet uns

1) *De communi mathematica scientia*, herausgeg. von Nic. Festa, Leipzig 1891, XXXII, XXXIII (S. 67—68, 70).

das erhabene (ὕψιλόνοιν) Wesen, welches zu den ersten Gründen hinauf-führt (ἐπὶ τὰ πρῶτα αἰτία ἀναγόμενον), der Theorie wegen die Forschung betreibt und nach dem rein Seienden greift.“ *Besonders heißt es wörtlich wie bei PROKLUS: Πιθαγόρας τὴν περὶ τὰ μαθήματα φιλοσοφίαν εἰς σχῆμα παιδείας ἐλευθέρου μετέστησεν.*

Der Nebensatz aber ὅς δὲ . . . ἀνεῦρεν bringt, genau wie das Partizipium bei HIPPOKRATES, die tatsächlichen Angaben in Parenthese als etwas von der theoretischen Betrachtung vollständig Losgelöstes, nicht als Belehrung, sondern als Berufung auf ein populäres Wissen, über welches allgemeine Übereinstimmung herrscht.

Diese Art, wie die einzigen isolierten Einzelentdeckungen nicht im eigentlichen darstellenden Text, sondern nebenbei gegeben werden, so daß ihre populäre Verbreitung als Mittel zur Kennzeichnung der Persönlichkeit dient, bestätigt meine Auffassung von der Tendenz des Geometerverzeichnisses und erhält umgekehrt von dieser Tendenz her ihre Beleuchtung.

Die Fremdartigkeit beider Stellen legt den Gedanken nahe, daß sie erläuternde Zutaten eines Überarbeiters oder Abschreibers sein könnten. Auf sie dürfte die Bemerkung von HEIBERG bezüglich FRIEDLEINS PROKLUS-Ausgabe¹⁾ passen: „für den Text im einzelnen ist aber vieles aus Handschriften und durch Konjekturen nachzutragen“. Vergleichung der Handschriften ist mir nicht möglich. Der Verpflichtung, die PYTHAGORAS-Stelle auf ihren inneren Wert und ihre Glaubwürdigkeit kritisch zu prüfen, würden wir auch dann nicht überhoben sein, wenn sie nicht von PROKLUS selbst geschrieben sein sollte.

§ 4. Entdeckung des Irrationalen. Konstruktion der regelmäßigen Körper.

Nach der von FRIEDLEIN in den Text aufgenommenen Lesart ἀλόγων und der üblichen Übersetzung hat PYTHAGORAS „die Handhabung (Theorie) des Irrationalen und die Konstruktion der kosmischen (regelmäßigen) Körper entdeckt“.

Zunächst ist bemerkenswert, daß an dieser Stelle, welche auf bekannte, für PYTHAGORAS charakteristische Entdeckungen Bezug nimmt, die Aussage fehlt, die man, wenn die allgemeine Ansicht richtig ist, als erste erwarten sollte: Auffindung und Beweis des Quadratsatzes durch PYTHAGORAS. Dieses Schweigen, ganz unverständlich, wenn PROKLUS dem PYTHAGORAS diesen populärsten aller Lehrsätze zuschrieb, ist eine höchst bedeutsame Bestätigung meiner in § 1 dargelegten Auffassung von PROKLUS' Kommentar zu EUKLID I, 47.

Dagegen vertragen sich die Entdeckung des Irrationalen und die Konstruktion der regelmäßigen Körper mit ihr in keiner Weise. Beide

1) Philologus 48, S. 327.

Leistungen setzen unbedingt Kenntnis und Handhabung des Quadratsatzes voraus. Läßt diese Stelle keine andere Lesung oder Deutung zu, so steht sie in unheilbarem Widerspruche zum Kommentar über den Quadratsatz (426).

Ein solcher Widerspruch aber wäre unerträglich. Er wäre erstens so deutlich, daß PROKLUS ihn notwendig gemerkt haben müßte. Zweitens handelt es sich nicht um zwei Aussagen anderer, denen PROKLUS indifferent gegenüberstehen könnte, sondern er bringt in beiden Stellen seine ganz persönliche Ansicht zum Ausdruck, S. 426 zweifelt er *persönlich* die Überlieferung an, S. 65 beruft er *persönlich* sich auf die Überlieferung.

Mir scheint aber, die Entdeckung des Irrationalen und die Konstruktion der regelmäßigen Körper durch PYTHAGORAS steht in ebenso unheilbarem Widerspruche mit allem, was PROKLUS selbst und was andere gute Quellen uns über die Entwicklung der ältesten griechischen Geometrie lehren.

Nach PROKLUS hat THALES (um 640—548) den Lehrsatz von der Gleichheit der Scheitelwinkel (299, 3—4), die Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck (250, 20—251, 2), die Halbierung des Kreises durch den Durchmesser (157, 10—11), die Kongruenz zweier Dreiecke aus Übereinstimmung einer Seite und der anliegenden Winkel (352, 14—16) entdeckt und die Kongruenzanschauung praktisch zur Bestimmung des Abstandes von Fahrzeugen auf See benutzt (352, 16—18). ÖNOPIDES, den das Verzeichnis als wenig jüngeren Zeitgenossen des ANAXAGORAS nennt, hat zuerst die Aufgabe gelöst (283, 7—10), von einem Punkte auf eine Gerade das Lot zu fallen, und zwar als Hilfsaufgabe zu astronomischen Zwecken: er hat ferner die Konstruktion der Winkel-antragung geleistet (333, 5—6). Für alle diese Angaben ist ERDENUS als Quelle entweder genannt oder unzweideutig gekennzeichnet. Da ANAXAGORAS um 500 geboren und 428 gestorben ist, dürfen wir die Geburt des ÖNOPIDES etwa 490 ansetzen, also seine Blütezeit frühestens 470—450. Mag nun das Ansehen, welches ÖNOPIDES sich als Geometer erworben hat, mit diesen beiden Konstruktionen zusammenhängen oder nicht¹⁾, mögen wir diese Konstruktionen selbstverständlich so verstehen, daß ÖNOPIDES sie nicht überhaupt zuerst, sondern als erster mit strenger Beschränkung auf Lineal und Zirkel gelöst hat²⁾, so geht doch aus den wohlbezeugten und unbezweifelbaren Angaben des PROKLUS so viel mit Sicherheit hervor, daß um 470 noch so einfache Erfindungen zu machen waren, also wie BRETSCHNEIDER³⁾ sagt, „die Geometrie noch immer in

1) CANTOR, a. a. O. I², S. 191; vgl. unten S. 42.

2) BRETSCHNEIDER, a. a. O. S. 65

3) a. a. O. S. 65

den ersten Stadien der Entwicklung war“, und „noch nicht weit ausgebildet sein konnte“.

Zwischen THALES und ÖNOPIDES steht zeitlich PYTHAGORAS (etwa 570—500); mögen seine Anhänger ihn schon früh für einen Gottbegnadeten und Wundertäter gehalten haben, wir können nicht anders als ihn in eine Entwicklungsreihe mit seinen Vorgängern und Nachfolgern stellen. Auch durch die angebliche Geheimhaltung seiner geometrischen Entdeckungen innerhalb seiner Schule dürfen wir ihn nicht der historischen Reihe entrücken, denn diese Geheimhaltung ist eine späte Erfindung.¹⁾ Für CANTOR²⁾ und TANNERY sind die primitiven Konstruktionen des ÖNOPIDES eine große Verlegenheit. Wegen ÖNOPIDES schiebt TANNERY³⁾ die Abfassung der alpythagoreischen „Tradition touchant PYTHAGORE“, des ältesten „cadre des éléments“, bis in die Mitte des 5. Jahrhunderts, aber trotz ÖNOPIDES glaubt er an weitreichende geometrische Entdeckungen des PYTHAGORAS, von denen der Quadratsatz eine der zeitigeren und geringeren sein soll. Auch BRETSCHNEIDER begeht mit den oben wiedergegebenen Urteilen eine starke Inkonsequenz. S. GUNTHER⁴⁾ behandelt die Entdeckung des „Hekatombensatzes“ durch PYTHAGORAS als ganz gesicherte Tatsache und spricht von ÖNOPIDES, „auf den die *Legende* einige der elementarsten Konstruktionen zurückführt“. Das ist konsequent; aber die Konsequenz ist durch eine nicht zu rechtfertigende Verkehrung des Wertes der Quellen erkaufte.⁵⁾

Auch die Entdeckungen, welche nicht dem PYTHAGORAS selbst, sondern den Pythagoreern im allgemeinen zugeschrieben werden, müssen wir, wenn wir verstehen, nicht Wunder glauben wollen, erstens in die allgemeine Entwicklung der Geometrie einreihen und zweitens in sich vom Einfacheren zum Verwickelteren ansteigend denken. Unter diesen Gesichtspunkten fügt sich der Satz von der Winkelsumme im Dreieck (PROKLUS 379) gut zwischen die Entdeckungen des THALES und ÖNOPIDES ein; an die Ausdehnung dieses Satzes auf Polygone und an den Satz des THALES über die Scheitelwinkel schließt sich ebenso natürlich der pythagoreische Satz,

1) ERWIN RONDE, *Kleine Schriften* II, 108—112. — ZELLER, a. a. O. I⁵, S. 329—331, III², S. 81, 1; 112. ZELLER widerlegt (I⁵, S. 330, 2) unrettbar die Deutung, welche TANNERY, JAMBlichus, *De vita Pyth.* S. 89 gegeben hat. Damit fallen die „weiteren Kombinationen“ aus der Geheimlehre, also auch „La tradition touchant PYTHAGORE“. Dagegen spricht auch PROKLUS (66, 7—8) *πρῶτος γὰρ ὁ Ἰπποκράτης τῶν μνημονευομένων καὶ στοιχείων συνέγραψεν*.

2) a. a. O. I⁵, S. 190—191.

3) a. a. O. S. 86, 105.

4) *Handbuch der klassischen Altertumswissenschaft* 5:1, Nördlingen 1888, S. 29, 30.

5) SUTER, *Geschichte der mathematischen Wissenschaften* I⁵, Zürich 1873, S. 26 sucht sich dadurch zu helfen, daß er „entweder die Angaben des EUDEMUS als unrichtig betrachtet oder die Lebenszeit des ÖNOPIDES viel weiter hinaufrückt“.

daß von regelmäßigen Figuren allein sechs Dreiecke, vier Quadrate, drei Sechsecke sich um einen Punkt herum so zusammenschieben lassen, daß sie vier Rechte ausfüllen (PROKLUS 301, 305).

Einer ganz anderen Gedankenreihe aber gehört die pythagoreische Flächenanlegung im weitesten Sinne (*παράβολή, ὑπερβολή, ἔλλειψις*; PROKLUS 419, 420) an. Flächenmessungen, Flächenvergleichen und Verwandlungen werden gewiß schon im Anfang der griechischen Geometrie gestanden haben, da ja die ersten griechischen Geometer, was gut bezeugt und von niemand bestritten wird, ihre Anregung durch die praktische Meßkunst der Ägypter erhalten haben. Aber von den einfachen Flächenvergleichen und Antragnen bis zur allgemeinen Flächenanlegung, welche mit der Lösung der quadratischen Gleichung gleichwertig ist und die stetige Teilung unter sich begreift, ist ein sehr weiter Weg. Wird die Flächenanlegung durch PROKLUS-EUDEMUS ganz allgemein den Pythagoreern zugeschrieben, so können wir den älteren unter ihnen, welche zwischen THALES und ÖNOPIDES lebten und die Winkelsumme des Dreiecks und der Polygone feststellten, im Sinne einer historischen Entwicklung nur die Elemente dieser Entdeckungen zutrauen; den Abschluß müssen spätere geleistet haben.

In die Zeit nun der ältesten Pythagoreer, ja des PYTHAGORAS selbst, soll, wenn die übliche Auffassung der Stelle des Geometerverzeichnisses recht hat, auch die Entdeckung des Irrationalen fallen. Das Vorhandensein von Strecken, welche prinzipiell durch kein Maß meßbar sind, ist durch Messen nicht festzustellen; denn das Messen sowohl der meßbaren wie der unmeßbaren Strecken ist gleichermaßen ungenau. Die Existenz solcher Strecken ist auch durch die Vorstellung absolut unfassbar; auch der geschulte Geist sträubt sich stets aufs neue gegen dieses Zugeständnis; erst als das Denken ein beherrschendes Übergewicht über das Anschauen gewonnen hatte, war diese großartige Abstraktion möglich. Aber nicht genug damit; nicht die Auffindung des Irrationalen als einer Einzel Tatsache, etwa der Diagonale des Quadrats, soll unsere Stelle dem PYTHAGORAS zuschreiben, sondern *τὴν τῶν ἀλόγων πραγματεῖαν* „die Handhabung oder Theorie des Irrationalen“. Also PYTHAGORAS müßte die Idee des Irrationalen in das Gedankensystem eingefügt, sie theoretisch durchgearbeitet, ihre Konsequenzen verfolgt und sie praktisch verwertet haben. Das alles sind Leistungen, welche die sichere Überlieferung THEOPHORUS, dem Pythagoreer und Lehrer PLATON, THEAETET, dem Altersgenossen PLATON, und EUDOXUS, dem Schüler PLATON, zuschreibt; — sie stehen am Ende einer Entwicklung, welche von PYTHAGORAS an gerechnet über hundert Jahre umfaßt!

Zu einer Zeit, als man noch nicht gelernt hatte, exakt einen Winkel anzutragen und ein Lot zu fällen, soll PYTHAGORAS ferner die Krone aller

elementaren Konstruktionen, die Konstruktion der regelmäßigen Polyeder geleistet haben! Außer allen elementaren Konstruktionen würde dies die exakte Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks, also die stetige Teilung, d. h. die allgemeine Flächenanlegung und Konstruktion der quadratischen Gleichung voraussetzen!

Das alles glaube, wer kann! Dem PROKLUS aber, welcher zwar kein schöpferischer Geometer, aber doch ein in geometrischen Dingen urteilsfähiger Kopf war und verstand, was er schrieb, können wir nicht zutrauen, daß er so krasse Widersprüche, solche Zickzacksprünge der Geometrie, die bald eine wunderbare Findigkeit, bald eine wunderbare Vergeßlichkeit voraussetzen und jedem Entwicklungsgedanken hohnsprechen, nicht bemerkt haben sollte. Deshalb müssen wir, zunächst um der inneren Übereinstimmung der verschiedenen PROKLUS-Stellen willen, mit Zweifeln und Verbesserungsvorschlägen an dieser Stelle ansetzen, welche durch keinen Zusammenhang, durch keine Quellenangabe gesichert ist.

Entdeckung des Irrationalen, Konstruktion der regelmäßigen Körper durch PYTHAGORAS sind aber auch unverträglich mit allem, was wir aus anderen Quellen über die Entwicklung der griechischen Geometrie wissen. Diese allgemeinere Untersuchung hat in vortrefflicher Weise G. JUNGE geführt in seiner Schrift: *Wann haben die Griechen das Irrationale entdeckt?*

Indem JUNGE alle direkten Berichte über die Entwicklung der Lehre vom Irrationalen im 5. Jahrhundert heranzieht, stellt er fest¹⁾: „Durch die Annahme, daß schon PYTHAGORAS die Theorie des Irrationalen begründet hat, wird die Entwicklung dieser Theorie auf unnatürliche Art auseinandergezerrt. Das Bild wird einfach, sowie man annimmt, daß das Irrationale erst zur Zeit THEODORS, also jedenfalls nach 450, entdeckt ist.“ — „‘Alles ist Zahl’, das war der Fundamentalsatz der pythagoreischen Philosophie.“ Die Lehre von der metaphysischen Allherrschaft der Zahlen „muß schon einige Ausbildung und einiges Alter gehabt haben, als die Gegenlehre vom Irrationalen auftauchte“. Denn darin eben besteht die Entdeckung des Irrationalen, daß es Größen gibt, welche kein gemeinschaftliches Maß haben (*ἀσύμμετροι*) und sich nicht verhalten wie Zahlen (*τὸ ἄλογον, τὸ ἁρμόζον*). Wir Modernen haben uns gewöhnt, die Schärfe dieses Gegensatzes zu verdecken, indem wir den Zahlbegriff auch auf das Irrationale ausdehnen. Für die Griechen aber ist das *ἄλογον* eben nicht „Zahl“²⁾; deshalb ist in griechischem Sinne noch mehr als in unserem die metaphysische Zahlenlehre unverträglich mit dem Irrationalen. Zur Zeit der Entdeckung des Irrationalen „war also die . . . pythagoreische

1) a. a. O. S. 9, 10, 12, 30, 31.

2) EUKLID, Elem. X, 5: „Kommensurable Größen verhalten sich zueinander wie Zahlen“. X, 7: „Inkommensurable Größen verhalten sich nicht zueinander wie Zahlen“

Zahlenlehre schon so fest und so umfangreich geworden, daß die Entdeckung des Irrationalen ihr nichts mehr anhaben konnte. Aber zur Zeit ihres Entstehens hätte die Lehre von den Zahlenverhältnissen das Irrationale schwerlich ertragen können. Und ganz unglaublich ist es, daß der Begründer der Schule und des Zahlenkultes, daß PYTHAGORAS selbst These und Antithese nebeneinander aufgestellt haben soll“. — „In dem halben Jahrtausend nach PYTHAGORAS' Tode ist nicht die kleinste geometrische Entdeckung von ihm mit einiger Sicherheit festzustellen.“ „In der nun folgenden Zeit des Neupythagoreismus flossen, um mit ZELLER zu sprechen, die Quellen über PYTHAGORAS und seine Lehre reichlich. Aber nicht einmal aus dieser Zeit ist mir außer der PROKLUS-Stelle irgendeine Nachricht bekannt, die die Entdeckung des Irrationalen PYTHAGORAS zuschriebe.“ —

Erheblichen Zweifeln ist die angebliche Konstruktion der fünf regelmäßigen Körper durch PYTHAGORAS begegnet.¹⁾ HANKEL und CANTOR suchen wenigstens die Konstruktion des regelmäßigen Zwölfflächners von PYTHAGORAS auf seine Schüler zu verschieben²⁾; erstens wegen der Schwierigkeit, an die Ausführung der stetigen Teilung durch PYTHAGORAS selbst oder seine Zeitgenossen zu glauben, zweitens weil eine Überlieferung³⁾ die Konstruktion des regelmäßigen Zwölfflächners dem Pythagoreer HIPPASUS zuschreibt, und endlich wegen der Zuordnung der regelmäßigen Körper zu den Elementen, der sie ihren Namen „kosmische Körper“ verdanken.⁴⁾

Die vier Elemente Erde, Wasser, Luft, Feuer wurden nach der bestimmten Angabe des ARISTOTELES⁵⁾ zuerst durch EMPEDOKLES (geb. um 490) als die materiellen Prinzipien der Welt aufgestellt: also konnten die regelmäßigen Körper von PYTHAGORAS wenigstens noch nicht als „kosmische“ erkannt und bezeichnet werden. Erst nach EMPEDOKLES' Auftreten konnte diese Zuordnung geschehen, und auch nur dann, wenn die Elementenzahl mit der Zahl der regelmäßigen Körper übereinstimmte, also beide die Vierzahl hatten. Folglich war der Zwölfflächner zu der Zeit, als EMPEDOKLES mit der Elementenlehre auftrat, noch nicht entdeckt. Nachdem er dann entdeckt war, mußte man ihm, wenn man nicht den ganzen Parallelismus von Elementen und Körpern aufgeben wollte, irgendeine

1) S. GÜNTHER, *Geschichte der Mathematik*, S. 59: „Daß man sie auch sämtlich nach strenger Vorschrift aufzubauen imstande gewesen sei, soll damit nicht gesagt werden“.

2) HANKEL, a. a. O. S. 95, Anm. 3; CANTOR, a. a. O. I³, S. 175.

3) JANBLICHUS, *De vita Pyth.*, S. 88.

4) JUNGE, a. a. O. § 9.

5) ARISTOTELES, *Metaphysik* I, 4. Gegen das ganz bestimmte Zeugnis des ARISTOTELES fallen die Angaben von VITRUV (*De Architectura* VIII. praef.) und anderen gar nicht ins Gewicht (ZELLER, a. a. O. I³, S. 406—408, 759).

Bedeutung für die Konstitution der Welt zuweisen. Noch in PLATON *TIMAEUS* ist diese unausgeglichene Schwierigkeit zu erkennen. PLATON beweist (31—32) die Notwendigkeit und Ausschließlichkeit der vier EMPEDOKLEISCHEN Elemente Feuer, Luft, Wasser, Erde aus dem im Raume geltenden Gesetz der zwei mittleren Proportionalen und setzt zu ihnen die vier schönsten Körper, Tetraeder, Oktaeder, Ikosaeder und Würfel, die durch ihre Begrenzungen bestimmt sind, in Beziehung (53—55). Für den fünften Körper aber, das Dodekaeder, beruft er sich auf die geometrische Einsicht, daß er der letzte Mögliche ist. Ein ihm entsprechendes Element hat er nicht, sondern weist ihm das All zu: *ἐτι δὲ οὐδὲς ἐνστάσεως μίᾳ πέμπτῃ ἐπὶ τὸ πᾶν ὁ θεὸς αὐτῇ κατεχρήσατο ἐκείνο διαζωγραφῶν* — „Da noch eine, die fünfte Zusammensetzung übrig war, so benutzte Gott diese zum Umriß des Weltganzen.“

Wir sehen: Weder PROKLUS' Angaben über die ältere Geschichte der Geometrie, noch unsere übrigen Kenntnisse vom Irrationalen und den regelmäßigen Körpern bei den Griechen vertragen die übliche Deutung des Geomenterzeichnisses, durch welche beide Entdeckungen PYTHAGORAS zugewiesen werden.

§ 5. Handhabung der Proportionen. Zusammensetzung der regelmäßigen Körper.

Hat die Lesart *ἀλόγων* sich als gänzlich unglaubwürdig erwiesen, so liegt es nahe, die Lesart *ἀναλόγων*, welche ebenfalls in den Handschriften vorkommt, auf ihre Brauchbarkeit zu prüfen.¹⁾

Die Proportionslehre (*τὸ ἀνάλογον, ἡ ἀναλογία*) war bei den Alten an die Lehre von den Mittelwerten geknüpft.²⁾ Diese Lehre aber wurde nicht allein auf dem Gebiete der Geometrie, sondern auch in der Arithmetik und Musik entwickelt; dementsprechend unterschied man arithmetische, geometrische und harmonische Mittel. Es wird nun durch bestimmte Zeugnisse dem PYTHAGORAS und seinen Schülern die Aufstellung dieser drei Mittelwerte zugeschrieben; es wird ferner berichtet, daß die späteren Pythagoreer HIPPASUS und ARCHYTAS und nach ihnen

1) Die Lesart *ἀναλόγων* statt *ἀλόγων* finde ich zuerst bei FABRICIUS, *Bibliotheca graeca* Bd. II, 1707, S. 385; sie ist weiter bezeugt durch AUGUST im Anhang II zu seiner EUKLID-Ausgabe (Berlin 1826—1829, S. 290). ZELLER in der 3. und 4. Auflage (1869 und 1876, S. 273 und 294) bemerkt: „wo statt *ἀλόγων* wohl *ἀναλόγων* zu lesen ist“; in der 5. Auflage (1892) fehlt diese Bemerkung. MÜLLACH, *Fragmenta philosophorum graecorum* III, Paris 1881, S. 266 schreibt *ἀναλόγων*, BLASS, *De Platone Mathematico*, Bonn 1861, S. 5 *ἀναλογίαν*, wofür auch JUNGE eintritt (S. 43).

2) Hierfür und für das Folgende vgl. CANTOR, a. a. O. I⁵, S. 165—166, 238—240, und JUNGE, a. a. O. § 11.

EUDOXUS den Namen des dritten Mittelwertes geändert haben, so daß jene drei Bezeichnungen ihre jetzigen Bedeutungen erhielten. PROKLUS selbst erzählt (67), daß EUDOXUS die vorhandenen drei Proportionen durch drei neue vermehrte.

Werden so die Mesoteten und Proportionen direkt an PYTHAGORAS und seine Schule angeknüpft, so haben wir in dem teils bezeugten, teils erschließbaren Entwicklungsgange der Elemente zwar indirekte, aber durch ihre innere Übereinstimmung überzeugende Beweise dafür, daß die Entstehung der Proportionslehre auf die ältesten Pythagoreer zurückgeht.

Nach PROKLUS' Bericht sind die Elemente vor EUKLID keineswegs ein äußerlich abgeschlossenes, innerlich gefestigtes System gewesen. HIPPOKRATES von Chios (um 450) schrieb zuerst Elemente; dann stellte LEON, Schüler des NEOKLEIDES, welcher selbst jünger als PLATON gewesen sein muß, die Elemente zusammen, „er bewies große Sorgsamkeit durch Fülle und Brauchbarkeit des Gebotenen“. Als dritter ordnete THEAETOS von Magnesia die Elemente „in lobenswerter Weise“; HERMOTIMUS von Kolophon schloß sich in der Vervollkommenung und Vermehrung der Elemente an EUDOXUS und THEAETET an. Endlich trat EUKLID auf (68): *ὁ τὰ στοιχεῖα συναγαγὼν καὶ πολλὰ μὲν τῶν Εὐδόξου συντάξας, πολλὰ δὲ τῶν Θεαιτήτου τελειώσας, ἐτι δὲ τὰ μαλακώτερον δεικνύμενα τοῖς ἔμπροσθεν εἰς ἀνελέγκτους ἀποδείξεις ἀναγαγὼν* — „er stellte die Elemente zusammen, ordnete viele Erfindungen des EUDOXUS ein und brachte viele Gedanken des THEAETET zum Abschluß; endlich führte er das von seinen Vorgängern weniger scharf Bewiesene auf unwiderlegliche Beweise zurück“.

Zweimal werden als EUKLID'S Vorläufer THEAETET und EUDOXUS genannt; wir sind noch bestimmter dahin unterrichtet¹⁾, daß das fünfte Buch der Elemente, die Proportionslehre, auf EUDOXUS, das zehnte, die Theorie des Irrationalen, auf THEAETET zurückgeht.¹⁾ So erkennen wir die Richtung, in welcher die allmähliche Umgestaltung der Elemente erfolgte: es ist die Bewältigung und Verarbeitung der neu erworbenen Ideen des Irrationalen und Inkommensurablen, dieses „véritable scandale logique“.²⁾ Durch diese Entdeckungen waren viele Beweise, die man bisher für zwingend gehalten hatte, nicht mehr scharf. Dies gilt besonders für die Proportionslehre.

Die Vorstellung der Ähnlichkeit und der damit verknüpften Gleichheit der Streckenverhältnisse ist ganz fundamental und in der Anschauung vorhanden³⁾, solange das Inkommensurable ganz außerhalb des Gesichts-

1) CANTOR, a. a. O. I⁵ S. 236, 241, 275; TANNERY, a. a. O. S. 96, 99—102.

2) TANNERY, a. a. O. S. 98.

3) TANNERY, a. a. O. S. 92: „La notion de la similitude est incontestablement une des premières que l'homme ait acquise“.

kreises liegt. So dürfen wir mit TANNERY¹⁾ Ähnlichkeit und Proportionen zu den ältesten Bestandteilen griechischer Geometrie rechnen und dürfen annehmen, daß in den älteren Elementen die Proportionen sehr zeitig eingeführt wurden, daß sie ein sehr weitgehendes Beweismittel waren, und daß z. B. die Flächenlehre und der Satz vom Quadrat der Hypotenuse durch Ähnlichkeit begründet wurde.²⁾

War dies so, gerade dann und nur dann ist es verständlich, daß die Entdeckung des Inkommensurabeln eine fundamentale Umgestaltung der Elemente zur Folge hatte. Die Proportions- und Ähnlichkeitslehre, ja selbst die Flächenlehre samt dem Quadratsatz, war nun zum *μαλακώτερον*, *ἐπὶ μέρος δεικνύμενον* geworden; um sie wieder zur *ἀνελέγκτως, καθόλου* erkannten Wahrheit zu erheben, mußten entweder neue Beweise ohne Benutzung der Ähnlichkeit gefunden werden, oder es mußte die Proportionslehre umgestaltet werden. Den ersten Weg schlug man für die Flächenlehre ein: wenn der neue, auf Flächenvergleichung ohne Ähnlichkeit gestützte Beweis des Quadratsatzes von PROKLUS EUKLID zugeschrieben wird, so dürfen wir vermuten, daß ein Verdienst EUKLIDS um die Verschärfung der Elemente gerade in der Neugestaltung der Flächenlehre liegt. Den anderen Teil der Arbeit hatten EUDOXUS und THEAETET geleistet; an sie schloß EUKLID sich an.

Die Annahme der Entdeckung des *ἄλογον* durch PYTHAGORAS zerstörte jede Idee einer organischen Entwicklung der griechischen Geometrie; wir erhalten das Bild einer verständlichen und durch die Quellen beglaubigten Entwicklung, wenn das *ἀνάλогον* lange vor dem *ἄλογον* entdeckt wurde. Deshalb ist die *Lesart τῶν ἀλόγων nicht nur als unmöglich zu beseitigen, sondern wir haben ausreichende positive Stützen für ihren Ersatz durch τῶν ἀναλόγων*. —

τὴν τῶν κοσμικῶν σχημάτων σύστασιν ἀνεῦρεν hat man bisher stets übersetzt „er erfand (fand) die Konstruktion der kosmischen (regelmäßigen) Körper“ und gemäß der geometrisch-technischen Bedeutung des Wortes „Konstruktion“ darin die Aussage gesehen: PROKLUS schreibt dem PYTHAGORAS die exakte Konstruktion der möglichen regelmäßigen Körper zu, etwa so, wie das 13. Buch der Elemente sie lehrt; als Vorstufe ist darin selbstverständlich die Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks und

1) TANNERY, a. a. O. S. 97. Ich kann TANNERYs absoluter Datierung der pythagoreischen Entdeckungen nicht zustimmen; aber diese relative Anordnung halte ich für in sich wohl begründet. Ebenso HEIBERG, *Philologus* 43, S. 333.

2) TANNERY, a. a. O. S. 105. Ebenso ZEUTHEN, *Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter*, Kopenhagen 1896, S. 50, und ZEUTHEN, *Théorème de PYTHAGORE, origine de la géométrie scientifique*. II. Congrès international de philosophie, Genève 1904; *Comptes rendus du congrès* S. 834, 849, 853—854.

die stetige Teilung enthalten. Ich habe bewiesen: *es ist höchst unwahrscheinlich, daß PROKLUS diese Leistungen dem PYTHAGORAS zugetraut hat; es ist ganz unmöglich, daß PYTHAGORAS sie ausgeführt hat*.

Tatsächlich liegt diese Schwierigkeit weniger im griechischen Text als in der üblichen Übersetzung; sie ist also vermeidbar.

Die Worte *σύστασις, συστήσασθαι* haben bei PROKLUS wie bei EUKLID natürlich meist die geometrisch-technische Bedeutung „Konstruktion, konstruieren“. Zunächst aber haben sie einen allgemeineren Sinn, und dieser ist bei PROKLUS keineswegs vergessen. Das Substantivum *σύστασις* kann einmal die Wirkung des Zusammensetzens bedeuten: das „Zusammengesetzte in seiner Eigenart“, was wir wörtlich genau und im Sinne zutreffend durch das lateinische Wort „Konstitution“ wiedergeben können, z. B. *σύστασις κόσμου*. Zweitens bedeutet es die Tätigkeit des Zusammensetzens ganz allgemein, nicht nur in dem Sinne „geometrische Konstruktion“; ja für den engsten Sinn „Herstellung der Figur“ im weiteren Rahmen einer geometrischen Aufgabe gilt gar nicht das Wort *σύστασις*, sondern *κατασκευή*.¹⁾ Abgesehen von dem ganz allgemeinen Gebrauch (z. B. *σύστασις τῆς ἐπιστήμης* 64, 13) werden nebeneinander gestellt *συστάσεις, γενέσεις, διαιρέσεις, θέσεις, παραβολαί* (56, 8—10); *συστάσεις, τομαί, θέσεις, παραβολαί, προθέσεις, ἀφαιρέσεις* (78, 25—26); S. 423, 21—22 definiert PROKLUS: *τὸ μὲν γὰρ ὡς ἐκ πολλῶν συγκροτούμενον συστάσεως δέεται* „das aus einer Vielheit gewissermaßen Zusammengeschlagene bedarf der „Zusammensetzung“. Die Verbindung *τῶν κοσμικῶν σχημάτων σύστασις* ist eine feste; zweifellos bedeutet sie in den meisten Fällen die Konstruktion der regelmäßigen Körper im Sinne von Buch XIII der Elemente²⁾, und sie kann auch an unserer Stelle diese Bedeutung haben. Aber sie muß nicht diese Bedeutung haben — mehr will ich nicht beweisen —, und es ist nicht nötig, daß PROKLUS, wenn er von den geometrischen Leistungen der Vorzeit spricht, den engsten, rein technischen Sinn vor Augen hat. Wir werden dem durch die Übersetzung gerecht werden, wenn wir das Wort „Konstruktion“, welches für uns nur den technischen Sinn hat, durch ein allgemeineres, etwa „Zusammensetzung“, ersetzen. Dieses Wort hat auch den Vorzug, daß in ihm außer der Tätigkeit des *συστήσασθαι* auch das Resultat „die Konstitution“ enthalten ist. Daß ich an dieser Stelle dem allgemeinen Wort vor dem technischen Ausdruck den Vorzug gebe, muß natürlich durch sachliche Gründe gerechtfertigt werden.

Nach unserem Wissen von der älteren griechischen Geometrie müssen wir für ihre Operationen vielmehr das allgemeine Wort „Zusammensetzung“ als „Konstruktion“ im engeren Sinne gebrauchen. Es unter-

1) Die Definition PROKLUS 203.

2) So PROKLUS 68, 23—24 und 70, 26.

liegt keinem Zweifel, daß die prinzipielle Beschränkung auf den Gebrauch von Lineal und Zirkel für geometrische Konstruktionen sich sehr allmählich, etwa im Zeitraum von 500 bis 400 vollzogen hat. Die Bestimmung der Schiffsentfernung durch THALES¹⁾ operiert mit Herstellung von Geraden, rechten Winkeln, Halbieren einer Strecke im Terrain; gewiß sind diese Operationen in indisch-ägyptischer Weise mit Hilfe von Seilen und Visierstangen ausgeführt worden. HIPPOKRATES benutzte für die Herstellung der Mönchen, welche kleiner als ein Halbkreis sind, die Methode, welche ZEUTHEN „Einschiebung“ nennt. ZEUTHEN versteht darunter „die Konstruktion einer Strecke, deren Endpunkte auf gegebenen Linien liegen, und die selbst oder in ihrer Verlängerung durch einen gegebenen Punkt geht“. Diese Konstruktion läßt sich durch gleichzeitige Drehung und Schiebung eines Lineals mechanisch leicht ausführen und ist praktisch noch lange in Gebrauch gewesen.²⁾ Erst PLATO scheint, entsprechend seiner Trennung der Geometrie von Technik und *αἰσθησις*, die systematische Einschränkung der Konstruktionswerkzeuge auf Lineal und Zirkel gefordert zu haben.³⁾ Als seinen Vorgänger in dieser Beschränkung dürfen wir ÖNORIDES ansehen.⁴⁾ So wird auch das Lob verständlich, welches nach PROKLUS (66) PLATO dem ÖNORIDES gespendet hat: es galt nicht der Leistung, sondern der Reinhaltung der Methode.

Hat PROKLUS nun in diesem Sinne PYTHAGORAS die Kenntnis und Herstellung der fünf regelmäßigen Körper zugeschrieben, so hat er zwar geirrt, denn wegen der Zuordnung der Körper zu den vier Elementen können bis auf die Zeit des EMPEDOKLES nur vier regelmäßige Körper bekannt gewesen sein; aber er befindet sich nicht mehr im Widerspruch mit sich selbst. Vielmehr ergibt sich jetzt aus allen einschlägigen PROKLUS-Stellen zusammen mit anderen Berichten ein durchaus verständliches Bild für die Entwicklung der Kenntnis von den fünf regelmäßigen Körpern.

Die Grundvorstellung und den Begriff des regelmäßigen Körpers hat, ohne daß wir andere Körper zu Hilfe zu nehmen brauchten, der Würfel geliefert.

Hatten die Pythagoreer früh erkannt, daß sechs regelmäßige Dreiecke, vier Quadrate, drei Sechsecke die Fläche um einen Punkt herum füllten, so lag der Versuch nahe, was schon bei den drei in einer Ecke

zusammenstoßenden Quadraten des Würfels vorlag, auch mit weniger als sechs Dreiecken und drei Sechsecken zu versuchen. Es ergab sich, daß drei, vier, fünf Dreiecke eine Ecke bilden; und geleitet durch die vom Würfel abstrahierte Idee des regelmäßigen Körpers entdeckte man durch mechanisches Zusammenfügen das regelmäßige Tetraeder, Oktaeder, Ikosaeder.

Jener pythagoreische Winkelsatz schloß aber auch, wie PROKLUS berichtet, die Erkenntnis ein, daß andere regelmäßige Vielecke, also Fünfecke, Siebenecke usw. sich überhaupt nicht lückenlos um einen Punkt herum in der Ebene zusammenfügen lassen. Um diese Erkenntnis zu gewinnen, brauchten die Pythagoreer das regelmäßige Fünfeck nicht geometrisch konstruieren zu können¹⁾: haben sie doch ganz bestimmt das regelmäßige Siebeneck, Neuneck usw., welche sie auch untersucht haben mußten, um jenen Satz allgemein auszusprechen, nicht konstruiert, sondern ausprobiert. Kamen sie weiter auf den nunmehr nicht fern liegenden Gedanken, auch diese regelmäßigen Vielecke zu einer Ecke zusammenzufügen, so gelangten sie zum regelmäßigen Dodekaeder (HIPPARCHOS) und zugleich zur Einsicht, daß mit den gewonnenen fünf Körpern die Reihe der regelmäßigen Körper abgeschlossen ist.²⁾

Daß selbst zu PLATOS Zeit die Zusammensetzung der regelmäßigen Körper noch nicht eine Konstruktion im Sinne des 13. Buches der Elemente war, können wir aus der Darstellung des TIMAEUS, 53—55 deutlich erkennen. Abgesehen vom Dodekaeder, welches als letzter möglicher regelmäßiger Körper nur erwähnt wird, begnügt sich PLATO für die vier

1) Ebenso wenig kann ich den für die Pythagoreer bezeugten Gebrauch des Pentagonagramms als Erkennungszeichen (BRETSCHNEIDER, a. a. O. S. 85, 86; CANTOR, a. a. O. I², S. 178) für einen Beweis ansehen, daß sie es geometrisch konstruiert, also die stetige Teilung usw. gekannt haben. Ebenso urteilt (gegen TANNERY) HEIBERG, Philologus 43, S. 333.

2) Ich halte mit HANKEL (a. a. O. S. 95, Anm.) und JUNGE (a. a. O. S. 33) gegen CANTOR (a. a. O. I², S. 174), TROFFKE (Geschichte der Elem.-Mathem. II, S. 400) und M. SIMON (EUKLID und die sechs planimetrischen Bücher, Leipzig 1901, S. 6) diese Einsicht auf Grund des Satzes von den allein möglichen Polygonen um einen Punkt herum für eine durchaus primitive, obgleich ihre exakte Begründung den Abschluß der Elemente EUKLIDS bildet. Nicht auszuschließen ist als Anregung des geometrischen Nachdenkens die empirische Anschauung des regelmäßigen Tetraeders und des regelmäßigen Oktaeders (CANTOR, a. a. O. I², S. 175), und vielleicht auch die des Dodekaeders, welches als Kristallform des Pyrits vorkommt und nach F. LINDEMANN von Etruskern künstlich hergestellt und mit Zahlzeichen versehen sich als Kultgegenstand schon in der ersten Eisenzeit (1000—900 v. Chr.) in Oberitalien vorfinden soll (Zur Geschichte der Polyeder und Zahlzeichen; Sitzungsber. der bayr. Akademie der Wissensch. (Math. Phys. Kl.) 26, 1896, S. 625—756). LINDEMANN nimmt an, daß PYTHAGORAS (ich würde sagen: die Pythagoreer) durch die Gallier mit dem Dodekaeder bekannt geworden ist, aber es nicht konstruiert hat (S. 729, 733, 755).

1) TANNERY, a. a. O. S. 90—92.

2) ZEUTHEN, a. a. O. S. 80—82. Vgl. auch ENRIQUES, Fragen der Elementargeometrie II, Leipzig 1907, Art. VII § 4 und REDD, Bericht des SIMPLICIUS, Leipzig 1907, S. 59.

3) HANKEL, a. a. O. S. 156; CANTOR, a. a. O. I², S. 234; S. GÜNTHER, Geschichte der Mathematik, S. 67. Die Quelle ist PLUTARCH.

4) S. oben S. 33.

Körper mit der Herleitung der Dreiecks- und Quadratflächen aus den Elementardreiecken, dem gleichschenkelig-rechtwinkligen und demjenigen rechtwinkligen, in welchem die Hypotenuse das Doppelte der kleineren Kathete ist. Die Ecken aber werden einfach *zusammengesetzt*; auch für die des Oktaeders und Ikosaeders, welche durch die in der Ecke zusammenstoßenden vier oder fünf Dreiecke nicht vollständig bestimmt sind, wird nicht wie bei EUKLID die Möglichkeit und Eindeutigkeit der Konstruktion durch Bestimmung der räumlichen Diagonalen gesichert, ja nicht einmal angedeutet.¹⁾

Als wichtigster Beweis für die frühe Kenntnis des Dodekaeders bei den Pythagoreern hat bisher ein bei STOBÆUS erhaltenes Fragment des PHILOLAOS, eines Zeitgenossen des SOKRATES, gegolten. Dasselbe lautet²⁾: καὶ τὰ ἐν τῇ σφαίρᾳ σώματα πέντε ἐντὶ. τὰ ἐν τῇ σφαίρᾳ πῦρ, ὕδωρ, καὶ γᾶ, καὶ ἀήρ, καὶ ὁ (ἡ) τὰς σφαίρας ὁλκὰς πέμπτον, und ist bisher verstanden worden: „Die Körper in der Kugel sind fünf (die fünf regelmäßigen Körper, ZELLER); die Körper in der Weltkugel (die Körper in der Welt, ZELLER), Feuer, Wasser, Erde und Luft, und als fünfter das Lastschiff der Kugel“. Viele Verbesserungsvorschläge sind zu diesem Fragmente gemacht worden; besonders knüpfen sie sich an das Wort ὁλκὰς. Doch die größte Schwierigkeit liegt darin, daß σφαῖρα zuerst als *geometrische Kugel*, dann als *Weltkugel*, σώματα erst als *geometrische Körper*, dann als Elemente der *materiellen Körper* verstanden werden. σφαῖρα in dem wechselnden Sinne ist hart, aber möglich.³⁾ Dagegen bedeutet σῶμα seinem Begriff nach den physischen Körper, den geometrischen nur mit erklärendem Zusatz, z. B. σῶμα στερεόν⁴⁾; der geometrische Raumteil heißt στερεόν, σχῆμα, εἶδος, τόπος, χώρα. Schlagend geht dies aus HERONS Definitionen hervor⁵⁾: σῶμα μὲν οὖν μαθηματικόν ἐστὶ τὸ τριχῇ διάστατον,

1) In den 82 Zeilen dieses Abschnitts (Ausgabe von BEKKER, Berlin 1817, III, S. 66—70) gebraucht PLATO elfmal die Worte συνίστασθαι, συνέστηκεν, σύστασις und damit abwechselnd völlig gleichbedeutend dreimal συναρμόδιασθαι, einmal συντίθεσθαι, einmal συνάγειν, zweimal συναγείν, neunmal die ganz allgemeinen ποιεῖν, γίγνεσθαι, γένεσις und als Gegensatz einmal λύεσθαι und einmal διαλύεσθαι. Ich sehe in dem durchaus sinnlich anschaulichen, nicht terminologisch festgewordenen Gebrauch dieser Worte eine Rechtfertigung meiner oben dargelegten Auffassung des Wortes σύστασις.

2) BOECKH, PHILOLAOS, Berlin 1819, S. 160. WACHSMUTH, STOBÆI Anthologium, Berlin 1884, I, 18. ZELLER, a. a. O. I, 4, S. 406—408 Anm.

3) GRUNDERMANN, Rheinisches Museum 59, 1904, S. 145 sucht die Beziehung zwischen den beiden Bedeutungen von σφαῖρα herzustellen durch die Lesart κατὰ ἐν τῇ σφαίρᾳ σώματα.

4) Vgl. PASSOW, Handwörterbuch der griechischen Sprache, Leipzig 1857, II, 2, S. 1804.

5) HERONIS Alexandrini geom. et stercom. reliquiae, ed. HULTSCH, Berlin 1864, S. 11 def. 18.

σῶμα δὲ ἀπλῶς τὸ τριχῇ διάστατον μετὰ ἀντιτυπίας — „ein mathematischer Körper ist das dreifach Ausgedehnte; ein Körper schlechthin (ohne Zusatz) ist das dreifach Ausgedehnte mit Gegendruck“ (d. h. mit Widerstandsfähigkeit, materieller Undurchdringlichkeit). Dasselbe wie diese auf ΕΠΙΚΥΡ zurückgehende Definition¹⁾ drücken die Aristotelischen Bestimmungen aus: ἀδύνατον δύο σώματα ἅμα ἐν τῇ αὐτῇ εἶναι — „zwei Körper können nicht zugleich an demselben Orte sein“; σῶμα ἕκαστον ἀπτόν — „jeder Körper ist berührbar“; τὸ κενόν ἰ. e. τόπος ἐστηρεμένος σώματος sive χώρα σώματος — „das Leere ist der des Körpers beraubte Ort oder der Raum des Körpers.“²⁾ Dagegen werden die Elemente der physischen Körperwelt (der σώματα) ganz gewöhnlich selbst schlechthin τὰ σώματα genannt.³⁾ Wenn also in dem PHILOLAOS-Fragment der Wechsel in der Bedeutung des Wortes σφαῖρα unwahrscheinlich ist, so ist es ganz unglaublich, daß τὰ σώματα zuerst die geometrischen Körper, dann die Elemente bedeuten sollten.

Als eine wahre Erlösung sehe ich die Form an, welche DIELS dem PHILOLAOS-Fragment gegeben hat⁴⁾: καὶ τὰ μὲν τὰς σφαίρας σώματα πέντε ἐντὶ, τὰ ἐν τῇ σφαίρᾳ πῦρ <καὶ> ὕδωρ καὶ γᾶ καὶ ἀήρ, καὶ ὁ τὰς σφαίρας ὁλκὰς, πέμπτον — „Und zwar gibt es fünf Elemente der Weltkugel: die in der Kugel befindlichen, Feuer, Wasser, Erde und Luft, und was der Kugel Lastschiff ist, das fünfte.“⁵⁾

Damit sind in geradezu glänzender Weise die erwähnten Schwierigkeiten überwunden: σφαῖρα ist nur die pythagoreische Weltkugel, τὰ σώματα nur die Elemente der Materie; zugleich ist durch die scharfe Gegenüberstellung der vier Elemente in der Weltkugel gegen das fünfte, den Träger des Alls, sowohl der dreimalige Gebrauch des Wortes σφαῖρα wie das auffällige ὁλκὰς gerechtfertigt.

Aber jede Beziehung auf die fünf regelmäßigen Körper ist durch DIELS' Interpretation aus dem PHILOLAOS-Fragment ausgeschlossen, und dadurch gewinnt die kleine DIELS'sche Konjekture eine große geometrische Bedeutung.

Von BOECKH an bis in die neueste Zeit hat man die Entscheidung der Frage, ob die fünf regelmäßigen Körper pythagoreische oder platonische Entdeckung sind, neben der PROKLUS-Stelle S. 65, vorzugsweise in dem PHILOLAOS-Fragment gesehen. BOECKH sagt⁶⁾: „Das ehemals von mir über-

1) Vgl. SEXTUS EMPERICUS, Adv. mathematicos III, sect. 21.

2) Entnommen aus BONITZ, Index Aristotelicus 742^a 39, 742^a 42, 381^b 9—12.

3) Z. B. BONITZ, Index Aristotelicus 742^b 6—37.

4) DIELS, Fragmente der Vorsokratiker, Berlin 1903, S. 254, und noch entschiedener in der 2. Auflage, Berlin 1906, I, S. 244.

5) An DIELS schließt sich NESTLE, Die Vorsokratiker, Jena 1908, S. 162 an.

6) PHILOLAOS des Pythagoreers Lehren, Berlin 1819, S. 162.

sehene Bruchstück des PHILOLAOS entscheidet mir zugleich die Streitfrage, ... ob die Lehre von den fünf Körpern als Formen der Elemente Pythagoreisch oder ursprünglich Platonisch sind“; BLASS¹⁾: „Incidimus in quaestione utrum PLATO ea (quinque solida) primus excogitaverit an Pythagoricae sint originis. Sed iam BOECKNIUS, vir in his rebus facile princeps, rem diiudicavit cum ex fragmento Philolaico hanc doctrinam ex schola Pythagorica fluxisse convicerit“; CANTOR²⁾: „Auch das Ikosaeder und nicht minder das Dodekaeder muß wohl oder übel den Pythagoreern bekannt gewesen sein. Sonst könnte nicht PHILOLAOS schon von den fünf Körpern in der Kugel reden.“

Redet nun PHILOLAOS tatsächlich nicht von den fünf Körpern der geometrischen Kugel, so ist diese Argumentation hinfällig; denn nunmehr ist das älteste Zeugnis von den fünf regelmäßigen Körpern und zugleich ihrer Verknüpfung mit den Elementen der PLATONISCHEN *TIMAEUS*. Für PLATONS Priorität spricht jetzt die erste Veröffentlichung, ferner das Zeugnis des PAPPUS³⁾ und die im Altertum gebräuchliche Verknüpfung der fünf Körper mit seinem Namen und seiner Schule.⁴⁾ Für die Pythagoreer zeugt PROKLUS im Geometerverzeichnis und PLUTARCH⁵⁾, sodann die Tatsache, daß PLATO die Lehre von den fünf Körpern einem Pythagoreer in den Mund legt; das wichtigste Zeugnis aber sind die oben dargelegten Momente historischer Entwicklung. Die Pythagoreer sind durch ihre eigentümliche an die regelmäßigen Polygone angeknüpfte Fragestellung⁶⁾ so dicht an die Erkenntnis der Existenz, und zwar der ausschließlichen Existenz der fünf Polyeder herangerückt, daß es aus inneren Gründen schwer fällt zu glauben, sie hätten diesen letzten Schritt nicht getan.

Kann mich demnach der Wegfall des PHILOLAOS-Arguments nicht bestimmen, den Pythagoreern die Entdeckung und Kenntnis der regelmäßigen Polyeder abzusprechen, so ist doch nicht zu leugnen, daß die exakt-geometrische Arbeit PLATONS und seiner Schule auf diesem Gebiete eine erhöhte Bedeutung gewinnt.

Diese erhöhte Bedeutung wird auch einer Notiz des SUIDAS über THEAETET zugute kommen, welche aussagt⁷⁾: πρώτος δὲ τὰ πέντε καλούμενα στερεὰ ἔγραψε. Ich übersetze: „Er hat zuerst die sogenannten Fünf-

1) C. BLASS, *De PLATONE Mathematico diss.*, Bonn 1861, S. 22.

2) a. a. O. I², S. 175.

3) PAPPUS, *Collectiones math.* V, 19 ed. HULTSCH, S. 352.

4) PROKLUS, S. 68, 20—23.

5) *De placitis philosoph.* II, 6: Πλάτων δὲ καὶ ἐν τούτοις πυθαγορίζει. Vgl. ZELLER, a. a. O. I², S. 289 Anm.

6) PROKLUS, S. 304, 11—305, 3.

7) *SUIDAE Lexicon, graece et latine rec.* BERNHARDY, Berlin 1864. Θεαιτητος I, S. 1120.

Körper gezeichnet (konstruiert)“, und finde durch THEAETET den Abschluß der langen Entwicklung vollzogen, den wir bei PLATO noch vermissen.

Ich folge mit meiner Übersetzung des Wortes ἔγραψε BOECKH¹⁾: „Denn der sonderbare Ausdruck kann nichts anderes heißen, als daß er entweder das erste wissenschaftliche Werk darüber geschrieben oder zuerst ihre richtige Zeichnung und Projektion auf einer Fläche gelehrt habe.“ Damit wird, wie mir scheint, der Sinn der Stelle besser getroffen als durch BERNHARDY: „primus scripsit de quinque solidis, quae sic vocantur“. An BERNHARDY schließen sich BRETSCHNEIDER²⁾, CANTOR³⁾ und TANNERY⁴⁾ an. Mag man aber die Stelle so oder so übersetzen, sie bildet für diejenigen, welche PYTHAGORAS die Konstruktion der regelmäßigen Körper zuschreiben wollen, eine nicht geringere Verlegenheit als PROKLUS' Bericht von den unzeitgemäßen Konstruktionen des ÖNOPIDES. Haben PYTHAGORAS oder die ältesten Pythagoreer die regelmäßigen Körper entdeckt, so ist es unglaublich, daß erst 100 Jahre später das erste Werk über diesen wichtigen und besonders durch seine Verknüpfung mit den Elementen der Materie allgemein interessanten Gegenstand geschrieben sein sollte. Will man aber mit BRETSCHNEIDER und TANNERY THEAETETS Leistung auf die Berechnung der Beziehungen zwischen räumlichen Diagonalen, Kugelradien und Kantenlängen der regelmäßigen Körper beschränken⁵⁾, so ist zu bedenken, daß gerade auf diesen Beziehungen die stereometrische Konstruktion der fünf Körper beruht, und daß es ein Widerspruch ist, die Konstruktion dem PYTHAGORAS⁶⁾, die Konstruktionsbedingungen aber dem 100 Jahre später lebenden THEAETET zuzuweisen.

Wem diese sachlichen Gründe nicht stark genug sind, um das formelle Bedenken zu überwinden, daß PROKLUS in einer sonst technisch festen Verbindung das Wort σύστασις einmal nicht im technischen Sinne gebraucht, der muß eben annehmen, daß PROKLUS mit seiner Zuweisung der Körperkonstruktion einen Irrtum begeht. Tatsächlich, wenn auch stillschweigend, tun dies HANKEL, JUNGE und GUNTHER, die aus sachlichen Gründen nicht „an ein Aufbauen nach strenger Vorschrift“ durch PYTHAGORAS glauben können. Nach meiner Ansicht von der Natur des Geometerverzeichnisses erscheint ein solcher Irrtum sehr wohl möglich.

Es gibt aber noch eine dritte, radikale Lösung, nämlich die, den ganzen Relativsatz ὃς δὲ . . . ἀνεῦρεν, der ja so wie so durch Fremdartigkeit und Schwanken der Lesarten verdächtig ist (s. oben S. 32, 38) und durch Zuweisung der regelmäßigen Körper an PYTHAGORAS in Widerspruch mit S. 68, 22: τῶν καλουμένων Πλατωνικῶν σχημάτων tritt, für den Ein-

1) PHILOLAOS S. 163.

2) a. a. O. S. 148.

3) a. a. O. I², S. 237.

4) a. a. O. S. 99—102.

5) CANTOR wagt in dieser Frage keine Entscheidung.

6) TANNERY, a. a. O. S. 101, Zeile 1, 2.

schub eines unbekannten Überarbeiters zu erklären. Jedoch, mag man sich zu dieser *formellen* Frage stellen, wie man will, meine *sachlichen* Gründe und Ergebnisse bleiben davon unberührt.

§ 6. Von Pythagoras' Geometrie wissen wir nichts.

Wird die PYTHAGORAS-Stelle des Geometerverzeichnisses so gelesen und übersetzt, wie ich es gerechtfertigt zu haben glaube, „derselbe hat bekanntlich auch die Handhabung der Proportionen und die Zusammensetzung der kosmischen Körper entdeckt“, so stimmt sie zusammen mit PROKLUS' Urteil im Kommentar zu EUKLID I, 47, wonach die Entdeckung des Quadratsatzes durch PYTHAGORAS nicht glaubwürdig bezeugt ist.

Die erste sichere Kunde vom Vorhandensein des Quadratsatzes bei den Griechen geben uns die geometrischen Leistungen des HIPPOKRATES von Chios. Dieser verwendet in seiner Mönchenquadratur den Quadratsatz in sehr freier Weise, nicht nur für das rechtwinklige Dreieck, sondern auch zu Schlüssen über Spitzwinkligkeit und Rechtwinkligkeit von Dreiecken aus dem Verhalten ihrer Seitenquadrate. Derselbe hat das Problem der Würfelverdoppelung behandelt und es auf die Konstruktion der zwei mittleren Proportionalen zurückgeführt. Das setzt voraus, daß die Quadratverdoppelung und die Konstruktion *einer* mittleren Proportionalen schon geleistet war. HIPPOKRATES ist Zeitgenosse des THEODORUS, jünger als ÖNOPIDES; sein Aufenthalt in Athen wird um 450—430 angesetzt.¹⁾ Um diese Zeit also muß der Quadratsatz eine wissenschaftlich gesicherte, nicht mehr isolierte Tatsache, also gewiß schon seit mehreren Jahrzehnten bekannt gewesen sein.

Andrerseits aber wissen wir bestimmt, daß die Entdeckung des Quadratsatzes eine Blüte griechischen Geistes ist, nicht, wie behauptet worden ist, ein Erzeugnis indischer oder ägyptischer Spekulation, dem Abendlande etwa durch Weisheit suchende, reisende Griechen oder im Gefolge von Handels- oder allgemeinen Kulturbeziehungen übermittelt.

Es muß zwar zugestanden werden, daß Inder und Ägypter Einzelfälle des Quadratsatzes sehr früh (die Inder spätestens im 8. vorchristlichen Jahrhundert, vielleicht schon einige Jahrhunderte früher) gekannt und zu Konstruktionen von rechten Winkeln benutzt haben. Aber wenn die Inder den Satz auch bedingungslos und allgemein ausgesprochen haben, so war er bei den Orientalen doch nur ein aus Einzelfällen glücklich erratener Zusammenhang, nicht eine wissenschaftlich, anschaulich oder deduktiv begründete Tatsache, nicht ein geometrischer Lehrsatz.²⁾

1) CANTOR, a. a. O. I² S. 201.

2) Siehe meine Abhandlung: *haben die alten Inder den Pythagoreischen Lehrsatz und das Irrationale gekannt?* Biblioth. Mathem. 7₂, 1906/7, S. 6—23.

Es ist denkbar, daß Einzelfälle des Quadratsatzes (z. B. das rechtwinklige Dreieck 3, 4, 5) zum uralten allgemeinen Besitz der asiatisch-griechischen Kulturwelt gehört haben; es ist denkbar, daß die Auffindung dieser geometrischen Tatsachen an verschiedenen Stellen der Erde unabhängig voneinander erfolgt ist; es ist endlich denkbar, daß eine Überlieferung dieser Tatsachen von Volk zu Volk in der alten Kulturwelt erfolgt ist. Welcher von diesen Fällen für die Anfänge des Quadratsatzes vorliegt, ist nicht zu entscheiden. Das aber ist absolut sicher, daß die Griechen von den Orientalen nicht erhalten konnten, was diese selbst nicht besaßen. Mögen sie die Einzeltatsachen als geistiges Rohmaterial aus der Fremde bezogen haben, die Geometrie als Wissenschaft und der Quadratsatz als geometrische Wahrheit ist in Griechenland geboren.

Die Geburtszeit fällt nach dem Obigen in die ältere Zeit der pythagoreischen Schule, welcher HIPPOKRATES in seiner Jugend selbst angehört haben soll. Die Mathematik hatte im physischen und metaphysischen System der Pythagoreer eine große Bedeutung; ihre sicher beglaubigten Spekulationen über Zahlengesetze, ihre ebenso gesicherten Flächenuntersuchungen konnten sich naturgemäß zur Erkenntnis des Quadratsatzes zusammenschließen. So weist alles, was wir wissen, auf die älteren Pythagoreer als die Entdecker des Quadratsatzes hin.¹⁾ Näheres aber ist uns nicht bekannt.

Speziell über PYTHAGORAS' geometrische Leistungen versagen alle Zeugnisse. Selbst das, was PROKLUS und andere von PYTHAGORAS' Geometrie zu wissen glauben, müssen wir als nicht genügend bezeugt ansehen. Ja, ich behaupte weiter: wir werden nie lernen, PYTHAGORAS von seiner Schule zu unterscheiden; denn schon PLATO, ARISTOTELES und ARISTOTELES' Schüler haben das nicht vermocht.

Wenn schon von den frühesten Zeiten an bis PLATO und ARISTOTELES kein einziges Zeugnis für bestimmte wissenschaftliche und speziell geometrische Entdeckungen spricht²⁾, so ist ausschlaggebend für mich die negative Rolle, welche PYTHAGORAS bei ARISTOTELES spielt.

„In den erhaltenen echten Schriften von ARISTOTELES kommen die Pythagoreer ungezählte Male, dagegen PYTHAGORAS selbst nur ein- oder zweimal vor. Einmal bei der Aufzählung von Männern, die besonders verehrt werden, heißt es, die Italiker verehren PYTHAGORAS; und das andere Mal an einer Stelle, die vielleicht eingeschoben ist, ALKMAON sei etwas jünger als PYTHAGORAS. In den Fragmenten des ARISTOTELES wird

1) Deshalb ist die Beibehaltung der Bezeichnung „Pythagoreischer Lehrsatz“ für den Quadratsatz angemessen als für eine Glanzleistung der pythagoreischen Schule.

2) JUNGE hat alle in Betracht kommenden Stellen besprochen, a. a. O. S. 26—27. Vgl. DIELS, *Fragmente der Vorsokratiker* unter PYTHAGORAS.

PYTHAGORAS mehrmals erwähnt. Doch von wissenschaftlichen Leistungen ist nicht die Rede.¹⁾ Im ersten Buche der Metaphysik bespricht ARISTOTELES systematisch die alten Philosophen, welche nach den metaphysischen Gründen des Seins und Geschehens geforscht haben; er zählt jeden einzelnen mit seiner Lehre namentlich auf. So gehen an uns vorüber THALES, ANAXIMENES, HIPPIASUS, HERAKLIT, EMPEDOKLES, PARNENIDES, ANAXAGORAS, HERMOTIMUS, LEUKIPPUS, DEMOKRIT. Dann fährt er fort²⁾: ἐν δὲ τούτοις καὶ πρὸ τούτων οἱ καλούμενοι Πυθαγόρειοι τῶν μαθημάτων ἀψάμενοι πρῶτοι ταῦτα προήγαγον — „zu den Zeiten dieser Männer und vor ihnen haben die sogenannten Pythagoreer sich zuerst mit Mathematik befaßt und sie gefördert“. Dies Verschweigen von PYTHAGORAS' Namen in diesem Zusammenhange kann nicht zufällig sein. ZELLER urteilt: „Die Pythagoreer überhaupt werden so bezeichnet, als ob der Berichtersteller nicht wüßte, ob und wie weit ihre wissenschaftlichen Ansichten auf PYTHAGORAS zurückzuführen sind.“³⁾ Ähnlich ERWIN ROHDE: „Wir können — freilich durch einen Schluß ex silentio, wie es aber wohl nie einen gerechtfertigteren gab — mit Bestimmtheit erkennen, daß die besten Kenner pythagoreischer Lehre, ARISTOTELES und ARISTOXENUS, nichts von physischen und ethischen Doktrinen des PYTHAGORAS selbst wußten: ARISTOTELES redet ausdrücklich immer nur von Ansichten der *Pythagoreer*, und ARISTOXENUS, noch vorsichtiger, referiert sogar nur, was die ihm bekannten letzten Pythagoreer von den ethischen Prinzipien älterer Mitglieder der Schule aussagten.“⁴⁾

Früh schon, ja, noch ehe er seine ionische Heimat verließ, hatte die Sage um PYTHAGORAS, die übermächtige und unverstandene Persönlichkeit, den Seher und Wundertäter, ihren Schleier gehüllt⁵⁾; früh schon war das, was er an wissenschaftlichen Leistungen hervorgebracht haben mag, in der Gesamtheit seiner Schule verborgen. Wenn ARISTOTELES und sein Schüler ARISTOXENUS dieses Dunkel nicht haben erhellen können, mit

1) JUNGE, a. a. O. S. 26—27.

2) ARISTOTELES, Metaphysik, Ausg. von BEKKER, Berlin 1831, I, 5, S. 985.

3) ZELLER, a. a. O. S. 280. 310.

4) E. ROHDE, *Kleine Schriften* II, S. 103.

5) ZELLER I, S. 280, 310, 311, 312. ROHDE, *Kleine Schriften* II, S. 105, 106. Derselbe, *Psyche* 2. Aufl. II, S. 99, 160. NESTLE, *Die Vorsokratiker in Auswahl*, Jena 1908, S. 26. So erklärt es sich auch, daß ISOKRATES (um 393) in seiner Lügenrede (BUSIRIS) gerade den PYTHAGORAS nach Ägypten reisen und dort sein Wissen schöpfen läßt. Zu dem famosen König BUSIRIS paßte besser PYTHAGORAS, von dem man schon damals viel fabelte und wenig wußte, als ein im hellen Lichte der Geschichte stehender Mann. Gerade für PYTHAGORAS durfte ISOKRATES die an sich unverfängliche Erzählung vom Aufenthalt in Ägypten in seine Übertreibungen auslaufen lassen, ohne Lügen gestraft zu werden (ZELLER, a. a. O. I, S. 304, 2; anders urteilt CANTOR, a. a. O. I, S. 149).

welchem Rechte dürfen wir erwarten, daß EUDENUS, ebenfalls Schüler des ARISTOTELES, imstande sein sollte, uns Mitteilungen über geometrische Entdeckungen des PYTHAGORAS zu machen?

EUDENUS hat mit THEOPHRAST dem ARISTOTELES von allen seinen Schülern am nächsten gestanden. Er hat die Metaphysik des ARISTOTELES herausgegeben¹⁾, das Werk, in welchem das Nichtwissen um PYTHAGORAS so handgreiflich zutage tritt. Eine Durchmusterung der Fragmente des EUDENUS²⁾, zunächst abgesehen von den durch PROKLUS überlieferten Zitaten, lehrt, daß in sicheren EUDENUS-Stellen die Pythagoreer viermal erwähnt werden, dreimal der Pythagoreer ARCHYTAS, aber nicht einmal PYTHAGORAS selbst.³⁾ Am überzeugendsten wirken die Fragmente der *ἀστρολογικὴ ἰστορία*. Darin werden mit fester Namenszuordnung astronomische Lehren von ÖNOPIDES, THALES, ANAXIMANDER, ANAXIMENES, ANAXAGORAS, EUDOXUS, KALIPPUS, EUKTEMON, METON erwähnt; dann heißt es (ed. SPENGLER 141, 16—18): ὡς Εὐδήμος ἰστορεῖ τὴν τῆς θέσεως τάξιν εἰς τοὺς Πυθαγορείους πρώτους ἀναγέρων — „so erzählt EUDENUS, welcher die erste Kenntnis der Reihenfolge (der Planeten) den Pythagoreern zuschreibt“. Es ist deutlich zu erkennen, daß EUDENUS' Wissen um PYTHAGORAS in keiner Weise über das seines Lehrers hinausgeht. Ebenso wenig wie dieser weiß er PYTHAGORAS von seiner Schule zu trennen — natürlich: denn wo die Überlieferung fehlt, können historische Angaben wohl bei Phantasten und Legendenschöpfern, wie die Neupythagoreer waren, aus dem Nichts auftauchen, aber nicht bei einem exakten Forscher wie EUDENUS. Er hat im Auftrage und unter den Augen ARISTOTELES' seine Geschichte der Geometrie als Teil des großen enzyklopädischen Werkes verfaßt, welches sich die Darstellung der Geschichte aller Wissenschaften zum Ziele setzte.⁴⁾ Derselbe Mann hat unmöglich in dem einen Werk sagen können, wozu ihm die Quellen in dem anderen versagten.

1) ZELLER, a. a. O. II, S. 84. ROHDE, *Kleine Schriften* II, S. 441, 2. PAULY-WISSOWA, *Realenzyklopädie des klassischen Altertums* VI, S. 896, 897.

2) EUDENI Rhodii Peripatetici Fragmenta collegit SPENGLER, Berlin 1866, iterum 1870. MULLACH, *Fragmenta philosophorum graecorum* III, Paris 1881, 222—292, 296—297.

3) Eine Bestätigung liefern die Werke THEOPHRASTS, des anderen ἐταίρος Ἀριστοτέλους (herausgeg. von WIMMER, Leipzig 1854—1862 und Paris 1866). Darin werden 76mal Philosophen zitiert, davon 56mal vorsokratische, einmal die Pythagoreer (416, 38 in der Verbindung Πλάτων δὲ καὶ οἱ Πυθαγόρειοι), nicht einmal PYTHAGORAS selbst.

4) ZELLER, a. a. O. II, S. 869, 870. DIELS, *Hermes* 28, 1893, S. 408, 409. PAULY-WISSOWA, *Realenzyklopädie* VI, S. 897. Die Angabe des DIOGENES LAERTIUS (V, 48), daß auch THEOPHRAST eine Geschichte der Geometrie verfaßt habe, beruht nach USENER (*Analecta Theophrastica*, diss. Bonn 1858, S. 17) auf Verwechslung mit EUDENUS. An USENER schließen sich an ZELLER a. a. O. II, S. 810, HEIBERG, *Philologus* 43, S. 346, TANNERY, a. a. O. S. 78. Vgl. dagegen CANTOR, a. a. O. I, S. 118, 257.

Bestätigt sehen wir diesen Schluß durch das verschiedene Verhalten des PROKLUS da, wo es sich um geometrische Leistungen der Pythagoreer, und da, wo es sich um PYTHAGORAS selbst handelt. Dreimal weist er den Pythagoreern geometrische Entdeckungen zu; zweimal davon beruft er sich auf EUDEMUS, das drittemal muß er nach dem ganzen Tone des Berichts eine sichere Quelle vor sich haben, welche wohl keine andere als EUDEMUS' Geschichte der Geometrie sein kann.¹⁾ Dreimal wird PYTHAGORAS als Geometer erwähnt, aber nicht einmal mit Berufung auf EUDEMUS. Ich erinnere auch an die Zaghaftigkeit, Umständlichkeit, Verkläuterung, mit der PROKLUS in der Besprechung von EUKLID I, 47 den PYTHAGORAS selbst berührt, und im Gegensatz dazu an die Sicherheit und Klarheit, mit der er dicht hinterher von der Mehrzahl der ἐπιστάτες spricht²⁾, welches nur die Pythagoreer sein können: man merkt, daß er von dem schwankenden Boden der Legende auf den festen Grund der Geschichte hinübertritt.

Wir sehen: die Lage der PYTHAGORAS-Frage war für PROKLUS 1000 Jahre nach PYTHAGORAS keine andere wie für uns weitere 1500 Jahre später. Alte Zeugnisse fehlten damals wie heute: junge Nachrichten gab es, aber sie waren schlecht beglaubigt und wenig vertrauenswürdig durch legendarisches Beiwerk; ihnen glauben wir nicht, und auch PROKLUS hat ihnen nicht geglaubt. So wissen wir nichts Gewisses von PYTHAGORAS dem Geometer, und PROKLUS hat ebenso wenig gewußt.

Wenn PROKLUS trotzdem im Geometerverzeichnis dem PYTHAGORAS bestimmte geometrische Entdeckungen, die Proportionen und die regelmäßigen Körper, zuweist, so kann er sich nur auf nacheudemische Schulüberlieferung, nicht auf alte Zeugnisse gestützt haben. Wir müssen heute einerseits zurückhaltender sein als PROKLUS, indem wir uns ganz auf den Aristotelischen Standpunkt zurückziehen und nicht das Unmögliche versuchen, PYTHAGORAS' Leistungen von denen seiner Schule zu trennen. Andererseits aber werden die vorhandenen geschichtlichen Überlieferungen und unsere Einsicht in den notwendigen Werdegang einer Wissenschaft es uns ermöglichen, in die gesamte griechische Geometrie die Geometrie der Pythagoreer organisch einzureihen und innerhalb dieser eine Entwicklung vom Einfachen zum Komplizierten zu konstruieren.

Daß freilich PYTHAGORAS in den Augen seiner Zeitgenossen nicht bloß Seher und Wundertäter war, daß er nicht bloß ethische und theosophische Tendenzen verfolgte, sondern eine starke Richtung auf das Wissenschaftliche hatte, scheint durch die wissenschaftliche Betätigung seiner Schule und durch den ältesten Zeugen, der sich über ihn äußert,

1) Vgl. oben S. 27.

2) Vgl. oben S. 21.

durch HERAKLIT (um 500) sichergestellt, und zwar um so sicherer, als HERAKLIT ihm in zwei bissigen Fragmenten¹⁾ nicht lobend, sondern von seinem Standpunkte aus tadelnd seine πολυμαθία — „Vielwisserei“ — vorwirft. Diesen Zeugnissen scheint JUNGE nicht genügend Rechnung zu tragen.²⁾ Wir dürfen an PYTHAGORAS' wissenschaftliche Bestrebungen glauben; aber wir müssen eingestehen, daß wir Einzelnes oder Bestimmtes über diese Bestrebungen oder ihre Ergebnisse auf keinem Gebiete des Wissens erkennen können. Was speziell die Mathematik betrifft, so kann das Ergebnis meiner Untersuchung nicht zutreffender ausgedrückt werden als mit den Worten ZELLERS³⁾: „So wenig wir aber auch bezweifeln können, daß PYTHAGORAS zu der erfolgreichen Entwicklung der Mathematik in seiner Schule den Anstoß gegeben hat, so unmöglich ist es doch, aus den abgerissenen und durchaus unzuverlässigen Angaben über ihn eine Vorstellung von seinem mathematischen Wissen zu gewinnen, welche auch nur annähernde geschichtliche Sicherheit hätte“.

Die geometrische PYTHAGORAS-Frage ist eben keine andere wie die philologische und philosophische: der Unterschied ist nur, daß die Mathematiker sich immer noch nicht zu den Konsequenzen verstehen können, welche Philologen und Philosophen längst gezogen haben. Zwar macht jeder Geschichtsschreiber der alten Geometrie formell den Quellen das Zugeständnis der Unsicherheit und Unzuverlässigkeit, aber keiner kann sich entschließen, den lieben alten Glauben an PYTHAGORAS, den Schöpfer der Geometrie, aus dem Herzen zu reißen. Solche Anhänglichkeit an Altgewohntes hat HANKEL⁴⁾, der von allen am weitesten im Zweifel geht, die Worte diktiert: „Doch möchte ich nicht so weit gehen, den Lehrsatz selbst (nämlich den Quadratsatz) dem PYTHAGORAS abzusprechen, obgleich keine einzige, nur einigermaßen glaubwürdige Nachricht darüber vorhanden ist“. TANNERY⁵⁾ gesteht zu: „L'insuffisance des preuves relatives à l'extension réelle des connaissances géométriques de PYTHAGORE ne peut être niée“; aber statt diese Beweise wegen ihrer Unzulänglichkeit zu verwerfen, findet er, „que ces preuves ont été un peu trop négligées“; und der geistreiche Mann läßt aus ihnen „le premier Ouvrage mathématique“, seine „Tradition

1) DIELS, *Fragmente der Vorsokratiker*, Berlin 1903; HERAKLIT fragm. S. 40 u. 129. Wenn fragm. 129, in welchem PYTHAGORAS' ἵστορίη „Forschung“ als πολυμαθία, κακοτεχνία „Vielwisserei, eine üble Kunst“ — („Rabulisterei“ DIELS, „Spitzfindigkeit“ NESTLE) — bezeichnet wird, nach DIELS (II, S. 666) unecht und eine teilweise Wiederholung von fragm. 40 ist, so bleibt doch eben dieses bestehen, in welchem HERAKLIT in bezug auf HESIOD, PYTHAGORAS, XENOPHANES und HERATAEUS erklärt: πολυμαθία γόον ἔχει οὐ δίδασκει — „Vielwisserei lehrt nicht Verstand haben“.

2) JUNGE, a. a. O. S. 44

3) a. a. O. I, S. 320, 2. 321. Vgl. E. RONDE, *Psyche*, 2. Aufl. II, S. 159, 168. NESTLE, a. a. O. S. 27. 4) a. a. O. S. 97; vgl. oben S. 18. 5) a. a. O. S. 106.

touchant PYTHAGORE“ entstehen. Für derartige Konstruktionen hatte bisher schon die Grundlage gefehlt; sie fehlt erst recht, wenn der Eckstein PROKLUS-EUDEMUS nicht mehr standhält.

Die Geschichtsforschung der Mathematik hat sich in der PYTHAGORAS-Frage im Eifer des Kombinierens, im Glauben an eigene und fremde geniale Inspiration in Gebiete vorgewagt, in denen die Widerlegung aufhört, aber auch der Beweis und sogar die haltbare und fruchtbare Hypothese. Sie wird sich darauf besinnen müssen, daß sie keine anderen Handhaben besitzt, wie gesicherte Überlieferung und das Gesetz der Entwicklung des Schwierigeren aus dem Leichterem. Wo beide versagen, muß sie den Mut haben, ein „ignoramus“ auszusprechen.

Zusammenfassung.

I. Von wissenschaftlichen und speziell geometrischen Entdeckungen des PYTHAGORAS hat weder EUDEMUS, der älteste Geschichtsschreiber der griechischen Geometrie, noch sein Lehrer ARISTOTELES, noch überhaupt die klassische Zeit etwas gewußt. Alle Angaben über solche Entdeckungen sind späte erfolglose Versuche, PYTHAGORAS' Leistungen von denen seiner Schule zu trennen.

II. Dem Geometerverzeichnis des PROKLUS liegt hauptsächlich EUDEMUS' Geschichte der Geometrie, daneben auch andere Quellen und quellenlose Schulüberlieferung zugrunde. Doch ist es Auszug aus EUDEMUS nur, soweit es Namensverzeichnis ist. Im wesentlichen ist es ein von PROKLUS selbst verfaßtes Raisonement über die Angaben des EUDEMUS.

III. PROKLUS hat im Geometerverzeichnis PYTHAGORAS nicht die Entdeckung des Irrationalen ($\tau\acute{\omega}\nu \alpha\lambda\acute{o}\gamma\omega\nu$) und die geometrische Konstruktion der regelmäßigen Körper zuerkannt, sondern höchstens die Handhabung der Proportionen ($\tau\acute{\omega}\nu \acute{\alpha}\nu\alpha\lambda\acute{o}\gamma\omega\nu$) und Kenntnis der Zusammensetzung der regelmäßigen Körper. Für den Entdecker des Quadratsatzes hat PROKLUS den PYTHAGORAS nicht gehalten.

IV. Bei dem Versagen aller alten Quellen sind wir außerstande, PYTHAGORAS irgendeine bestimmte geometrische Entdeckung, z. B. die des Quadratsatzes, zuzuschreiben. Wohl aber wissen wir von der Entwicklung der griechischen Geometrie genug, um behaupten zu können, daß er gewisse Entdeckungen, wie die des Irrationalen, Konstruktion der regelmäßigen Körper, allgemeine Flächenanlegung, Konstruktion einer Figur von gegebener Gestalt und Größe, nicht gemacht haben kann.

Le plus ancien traité français d'algorithme.

Par VICTOR MORTET à Paris.

Le plus ancien traité français d'algorithme a été publié pour la première fois, en 1882, dans le *Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche*.¹⁾ Il avait déjà été signalé comme étant à la Bibliothèque Sainte-Geneviève par l'abbé LENEUR²⁾ et par DUCLOS.³⁾ Après avoir porté successivement les cotes BB2, (in-4^o) et R. I. 17, il est désigné actuellement par la notation 2200. A la suite de cet opuscule français sur l'algorithme (150 r^o—151 r^o), se trouve un traité de géométrie, également écrit en français, qui est aussi le plus ancien qui soit connu, et que nous publions ailleurs.

Nous n'entrerons pas ici dans la description du manuscrit 2200 de la Bibliothèque Sainte-Geneviève; nous renverrons à ce sujet aux observations contenues dans la publication faite, en 1882, dans le *Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche*, au Catalogue des mss.⁴⁾ de cette Bibliothèque, et enfin à l'édition que nous donnerons du plus ancien traité français de géométrie qui s'y trouve conservé. Mais nous avons à signaler aussi un autre ms. du XIII^e siècle de l'algorithme en question, celui de la Bibliothèque Nationale, qui porte le no. 2021 (Mazarin) du fonds français (anc. 7929), où ce traité occupe les f^{os} 154 r^o—155 r^o.

Il est d'autant plus nécessaire de publier avec soin le plus ancien traité français d'algorithme que dans l'édition qui en a été donnée, d'après le seul ms. 2200 de la Bibliothèque Sainte-Geneviève, différents passages

1) Il a été édité dans ce recueil par M. CHARLES HENRY.

2) *L'Etat des sciences en France depuis la mort du roy ROBERT . . . jusqu'à celle de PHILIPPE le Bel . . .*, 1741, p. 93; cf. *Collection LEBER* (1838), p. 540: „Le traité anonyme de l'algorithme conservé à Sainte-Geneviève et rédigé au plus tard sous PHILIPPE le Hardi en langue vulgaire, enseigne l'usage de la multiplication selon les chiffres arabes, et les règles pour chercher la racine cube de quel nombre on voudra“.

3) *Discours sur l'état des lettres en France au XIII^e siècle*, dans l'*Hist. littéraire de la France*, t. XVI (1824), p. 114.

4) *Voy. ce Catalogue . . .* par M. CH. KOHLER, t. II (1896), p. 283—285.