

Literaturverzeichnis.

- [1] GUDERLEY, G.: Asymptotische Darstellungen für die Partikularlösungen der Hodographengleichung bei ebenen kompressiblen Potentialströmungen.
- [2] LANGER, R. E.: On the asymptotic solutions of linear differential equations of the second order. Trans. Amer. Math. Soc. 33, 23-64 (1931); 81-90 (1928).
- [3] MOLENBROEK, P.: Über einige Bewegungen eines Gases bei Annahme eines Geschwindigkeitspotentials. Arch. Math. u. Phys. Grunert-Hoppe (2), 9, 157 (1890).
- [4] TSCHAPLIGIN, A.: Über Gasströmungen. Wiss. Ann. d. Univ. Moskau, Math. Phys. Bd. 21.
- [5] BUSEMANN, A.: Hodographenmethode der Gasdynamik. Z. angew. Math. u. Mechan. 17, 73-79 (1937).
- [6] KLEIN, F.: Vorlesungen über die hypergeometrische Funktion. Herausgegeben von O. Haupt (Berlin 1933), Grundlehren, Bd. 39.
- [7] SEIFERT, H.: Zur asymptotischen Integration von Differentialgleichungen. Math. Z. 48, 172-92 (1942).
- [8] JAHNKE-EMDE: Funktionentafeln (Leipzig 1938).
- [9] SCHILLING, F.: Beiträge zur geometrischen Theorie der Schwarzschen s-Funktion. Math. Ann. 44, 260 (1894).
- [10] van Vleck, E. B.: A determination of the number of real and imaginary roots of the hypergeometric series. Trans. Amer. Math. Soc. 3, 110-131 (1902).

(Eingegangen am 25. 8. 1943)

Zahlentheorie: B. L. v. D. WAERDEN, Die Arithmetik der Pythagoreer, Math. Annalen, 120 (1948).²

Drei Stufen wissenschaftlicher Zahlentheorie sind klar zu erkennen: 1) die Lehre von Geraden und Ungeraden (vermutlich zwischen 500 und 450 entstanden), die O. BECKER aus dem 9. Buch der Elemente rekonstruieren konnte; 2) eine systematische Begründung der Lehre von den Proportionen und der Teilbarkeit der ganzen Zahlen, die Euklid im 7. Buch der Elemente unverändert übernommen hat (Zeit: 450-400); 3) eine Lehre von den geometrischen Proportionen und den „ähnlichen Zahlen“, die von Archytas herrührt und im 8. Buch der Elemente zu finden ist.

73 pag
WAERDEN, B.L.v.d.
1947

Die Arithmetik der Pythagoreer. I.

Von

B. L. v. D. WAERDEN in Laren, N.-Holland.

Constantin Carathéodory in Freundschaft und Verehrung
zum 70. Geburtstag gewidmet.

Die beliebtesten Quellen für die Arithmetik der Pythagoreer waren bisher die populären Schriften des Nikomachos von Gerasa und des Theon von Smyrna. Gewiß enthalten diese sehr viel Interessantes, und das meiste daran wird wohl auch auf die Pythagoreer zurückgehen, aber der Gesamteindruck, den man aus diesen Werken erhält, ist doch für einen Mathematiker nicht recht befriedigend. Nikomachos und Theon sind ja auch keine Mathematiker und schreiben vor allem nicht für Mathematiker, sondern für Philosophen, die etwas über Zahlen zu erfahren wünschen, teils um Platon besser zu verstehen, teils um daran neupythagoreische Spekulationen anzuknüpfen, jedenfalls aber leicht faßlich und unterhaltend, um Gottes willen nicht mit schwerfälligen Beweisen versehen! So erzählt denn Nikomachos über Dreieckszahlen, Quadratzahlen, Polygonalzahlen, über Rechtecks- und Gnomonzahlen, über Kubikzahlen und Balkenzahlen, über Verhältnisse und ihre Klassifikation, über Primzahlen, über geometrische Reihen, alles an tausend Beispielen erläutert, aber immer ohne Beweise, sogar ohne eine Andeutung der Gedankengänge, die zu alledem führen.

Aber die Pythagoreer verstanden unter μαθήματα ein geordnetes System von Sätzen mit Beweisen¹⁾, und die größte und erste von diesen Wissenschaften war ihnen die Lehre von den Zahlen (Epinomis 990 C). Wie finden wir den Zugang zu dieser Wissenschaft?

Einen ersten Zugangsweg haben BECKER²⁾ und REIDEMEISTER³⁾ angegeben. Die Lehre vom Geraden und Ungeraden im 9. Buch der Elemente Euklids stellt sich als ein ältestes Stück pythagoreischer Wissenschaft heraus, das sich aus dem Zusammenhang des 9. Buches leicht herauslösen läßt. Sie gipfelt in dem Satz über die vollkommenen Zahlen, und mit ihr hängt auch der Beweis der Irrationalität der Quadratdiagonale zusammen, auf den Aristoteles mehrfach anspielt und der als Anhang zum 10. Buche Euklids angefügt ist (X 114a).

¹⁾ REIDEMEISTER, K.: Mathematik und Logik bei Plato. Leipzig 1943.

²⁾ BECKER, O.: Die Lehre vom Geraden und Ungeraden im Neunten Buch der Euklidischen Elemente. Quellen und Studien z. Gesch. d. Math. B 3, S. 533.

³⁾ REIDEMEISTER, K.: Die Arithmetik der Griechen. Leipzig 1940, § 3.

Die Arithmetik der Pythagoreer. I.

Von

B. L. v. D. WAERDEN in Laren, N.-Holland.

Constantin Carathéodory in Freundschaft und Verehrung
zum 70. Geburtstag gewidmet.

Die beliebtesten Quellen für die Arithmetik der Pythagoreer waren bisher die populären Schriften des Nikomachos von Gerasa und des Theon von Smyrna. Gewiß enthalten diese sehr viel Interessantes, und das meiste daran wird wohl auch auf die Pythagoreer zurückgehen, aber der Gesamteindruck, den man aus diesen Werken erhält, ist doch für einen Mathematiker nicht recht befriedigend. Nikomachos und Theon sind ja auch keine Mathematiker und schreiben vor allem nicht für Mathematiker, sondern für Philosophen, die etwas über Zahlen zu erfahren wünschen, teils um Platon besser zu verstehen, teils um daran neupythagoreische Spekulationen anzuknüpfen, jedenfalls aber leicht faßlich und unterhaltend, um Gottes willen nicht mit schwerfälligen Beweisen versehen! So erzählt denn Nikomachos über Dreieckszahlen, Quadratzahlen, Polygonalzahlen, über Rechtecks- und Gnomonzahlen, über Kubikzahlen und Balkenzahlen, über Verhältnisse und ihre Klassifikation, über Primzahlen, über geometrische Reihen, alles an tausend Beispielen erläutert, aber immer ohne Beweise, sogar ohne eine Andeutung der Gedankengänge, die zu alledem führen.

Aber die Pythagoreer verstanden unter $\mu α θ ή μ α τ α$ ein geordnetes System von Sätzen mit Beweisen¹⁾, und die größte und erste von diesen Wissenschaften war ihnen die Lehre von den Zahlen (Epinomis 990 C). Wie finden wir den Zugang zu dieser Wissenschaft?

Einen ersten Zugangsweg haben BECKER²⁾ und REIDEMEISTER³⁾ angegeben. Die Lehre vom Geraden und Ungeraden im 9. Buch der Elemente Euklids stellt sich als ein ältestes Stück pythagoreischer Wissenschaft heraus, das sich aus dem Zusammenhang des 9. Buches leicht herauslösen läßt. Sie gipfelt in dem Satz über die vollkommenen Zahlen, und mit ihr hängt auch der Beweis der Irrationalität der Quadratdiagonale zusammen, auf den Aristoteles mehrfach anspielt und der als Anhang zum 10. Buche Euklids angefügt ist (X 114a).

¹⁾ REIDEMEISTER, K.: Mathematik und Logik bei Plato. Leipzig 1943.

²⁾ BECKER, O.: Die Lehre vom Geraden und Ungeraden im Neunten Buch der Euklidischen Elemente. Quellen und Studien z. Gesch. d. Math. B 3, S. 533.

³⁾ REIDEMEISTER, K.: Die Arithmetik der Griechen. Leipzig 1940, § 3.

Den zweiten Weg haben TANNERY⁴⁾ und neuerdings wiederum REIDEMEISTER⁵⁾ gezeigt: er führt über die Musiklehre der Pythagoreer, die wir aus der Darstellung des Ptolemaios und aus der Sectio canonis des Euklid kennen. In dieser Musiklehre werden nämlich gewisse zahlentheoretische Sätze benutzt, die wiederum andere Sätze aus den zahlentheoretischen Büchern VII und VIII Euklids voraussetzen. Sehr zustatten kommt uns dabei, daß ein Beweis eines solchen Satzes von Archytas von Taras uns durch Boethius überliefert ist. Durch logische Analyse dieser Beweise kann man große Teile der genannten Bücher als pythagoreisch erkennen. Eine Timaiosstelle führt zu weiteren Beziehungen. Wir werden nun auf diesem Wege noch weiter fortschreiten und durch Analyse der Bücher VII–IX tiefer in die Gedankengänge der Pythagoreer einzudringen versuchen. Die Ergebnisse dieser Analyse sind folgende:

Buch VII ist die Grundlage der pythagoreischen Arithmetik. Es bildet ein geschlossenes Ganzes von großer Schönheit und ist von Euklid ohne nennenswerte Änderung in die Elemente übernommen. Nur die letzten drei Sätze könnten einen späteren Zusatz darstellen. Es enthält die Theorie der Zahlenproportionen, die Lehre von der Teilbarkeit der ganzen Zahlen, vom größten gemeinsamen Teiler, vom kleinsten gemeinsamen Vielfachen und von den teilerfremden Zahlen. Historisch ist das Buch aus der Bruchrechnung entstanden. Weil die Eins unteilbar ist, hat man die Brüche nicht anerkennen wollen und sie durch Zahlenverhältnisse ersetzt; den gekürzten Brüchen entsprechen dabei teilerfremde Zahlenpaare, das Kürzen selbst führt auf den größten gemeinsamen Teiler, das Gleichnamigmachen auf das kleinste gemeinsame Vielfache, usw.

Buch VIII ist später als VII entstanden: es rührt aller Wahrscheinlichkeit nach von Archytas her. Es ist durch viele Wiederholungen, durch langwierige Beweise und andere logische Unzulänglichkeiten gekennzeichnet. Es handelt von geometrischen Proportionen und geometrischen Mitteln, von Quadrat- und Kubikzahlen und von endlichen ebenen und körperlichen Zahlen. Das Hauptproblem des Buches ist: unter welchen Bedingungen lassen sich zwischen zwei gegebenen Zahlen eine oder mehrere mittlere Proportionale einschalten? Das Problem hängt mit der Frage nach der Teilung musikalischer Intervalle in gleiche Teilintervalle, aber auch mit der Würfelverdoppelung des Archytas zusammen. Alle diese Zusammenhänge werden auch in der Epinomis hervorgehoben, die überhaupt stark unter dem Eindrucke des mathematischen Werkes des Archytas steht.

Die erste Hälfte des Buches IX beruht wiederum auf Buch VIII und ist später entstanden, also nicht mehr pythagoreisch. Der letzte Teil, die Lehre von Geraden und Ungeraden, ist aber, wie schon bemerkt, altpythagoreisch.

⁴⁾ TANNERY, P.: Un traité grec d'arithmétique antérieur à Euclide. *Mémoires scientifiques* 8, Nr. 83 (p. 244).

⁵⁾ REIDEMEISTER, K.: Die Arithmetik der Griechen. Leipzig 1940, § 3.

Dies ist in kurzen Worten der Inhalt des vorliegenden Teiles I. In einem anschließenden Teil II soll die Beziehung der pythagoreischen Zahlentheorie zu der Lehre vom Irrationalen untersucht werden. Die Hauptquellen dafür sind der Platonische Dialog Theaitetos, das X. Buch Euklids und einige Mitteilungen aus dem Papposkommentar dazu. Es handelt sich vor allem um die Frage: Wie hat sich die im X. Buch dargestellte Lehre vom Irrationalen aus der pythagoreischen Arithmetik, Logistik und Geometrie heraus entwickelt, und welchen Anteil haben die Personen des Platonischen Dialoges, Theodoros und Theaitetos, an dieser Entwicklung?

ZEUTHEN hat die Ansicht vertreten, eine Hauptleistung des Theaitetos sei die exakte Begründung der grundlegenden Sätze über Teilbarkeit der ganzen Zahlen, die wir aus dem Buch VII kennen, und auf diese Leistung beziehe sich das Lob, das der Theodoros im Dialog dem jungen Theaitetos spendet. Nun haben wir aber gesehen, daß das ganze Buch VII pythagoreisch ist und zur Zeit des Theaitetos schon fertig vorlag. Die Leistung des Theaitetos muß also anders bestimmt werden. Durch Analyse des Dialoges und Vergleich mit dem Anfang des Buches X kommen wir zur Schlußfolgerung, daß Theaitetos allererst auf Grund von exakten Definitionen der Begriffe meßbar, quadriert meßbar, rational und irrational die Sätze X 5, 6 und 9 bewiesen hat, welche diese Begriffe zu dem des Zahlenverhältnisses in Beziehung setzen und so die Anwendung der Arithmetik auf die Lehre von den rationalen und irrationalen Größen ermöglichen. Auf Grund dieser Sätze und der ihm bekannten Arithmetik des Buches VII hat er dann bewiesen: Die Seite eines Quadrates, dessen Fläche n -mal so groß ist als die des Einheitsquadrates, ist nur dann meßbar, wenn n eine Quadratzahl ist. Dieser Satz steht zwar nicht im Buch X, wird aber im Dialog vom Theaitetos klar ausgesprochen.

Die Leistung des Theaitetos beschränkt sich nicht auf diese grundlegenden Begriffe und Sätze, sondern das ganze Buch X und das damit zusammenhängende XIII mit den bewunderungswürdigen Konstruktionen der regulären Körper sind Werke des Theaitetos, wie EVA SACHS nachgewiesen hat. Theaitetos erweist sich damit als hervorragender Geometer und als der größte Algebraiker des Altertums. Man könnte ihn mit Galois vergleichen.

Die Beweise der Sätze X 9–10 muß Theaitetos anders geführt haben als in der Darstellung des Euklid, da er die Proportionenlehre des Eudoxos noch nicht hatte. Wir werden nachweisen, daß er eine ältere Definition der Proportion benutzt hat, die auf der Wechselwegnahme (Antanairesis oder Antihyphairesis) beruht. Die Wechselwegnahme ist ein aus der Arithmetik entlehntes Verfahren: von zwei ungleichen Größen wird die kleinere so oft als möglich von der größeren weggenommen, mit dem Rest und der kleineren Größe wird in derselben Weise verfahren, usw. X 2 besagt: Wenn die Wechselwegnahme ins Unendliche weitergeht, sind die beiden Größen inkommensurabel. X 3 be-

sagt: Wenn das Verfahren abbricht, sind sie kommensurabel. Bei Zahlen dient die Wechselwegnahme bekanntlich zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers. Läßt die kleinere Größe sich n_1 -mal von der größeren wegnehmen, der Rest n_2 -mal von der kleineren usw., so ist die endliche oder unendliche Zahlenfolge $n_1, n_2, \dots$ für das Verhältnis der beiden Größen maßgebend: Haben die Größen a und b dieselbe Zahlenfolge (oder wie Aristoteles es ausdrückt: dieselbe Wechselwegnahme) wie c und d , so besteht die Proportion $a : b = c : d$. Dies ist die Definition der Proportion, welche „die Alten“ nach Alexander von Aphrodisias zugrunde legten⁶⁾. Wie O. BECKER⁷⁾ gezeigt hat, kann man aus dieser Definition eine Reihe von grundlegenden Eigenschaften der Proportion leicht beweisen. Nur die Vertauschung der Mittelglieder einer Proportion bereitet Schwierigkeiten: sie wurde nach Aristoteles getrennt für Zahlen, Strecken, Zeiten usw. bewiesen.

Der Satz über die Inkommensurabilität der Quadratseiten, deren Quadratflächen n -mal so groß sind als das Einheitsquadrat, wurde von Theaitetos zum ersten Male allgemein bewiesen, aber nach dem Dialog hat Theodoros von Kyrene diese Irrationalität für die einzelnen Werte $n = 3, 5, \dots, 17$ nachgewiesen oder wenigstens „aufgezeigt“, indem er jeden einzeln vornahm. In welcher Weise er dabei vorgegangen ist, darüber kann man nur Vermutungen aufstellen: verschiedene Möglichkeiten sind von ZEUTHEN⁸⁾ und ANDERHUB⁹⁾ angegeben worden. Wir werden, an ZEUTHEN anknüpfend, mit den Methoden der geometrischen Algebra einen Beweis ausführen, den Theodoros möglicherweise verwendet haben kann, ohne behaupten zu wollen, daß er wirklich so verfahren ist.

Eines ist den von ZEUTHEN, von ANDERHUB und von mir aufgestellten Hypothesen gemeinsam: die Herleitungen beruhen alle auf dem eben angeführten Irrationalitätskriterium X 2. Wir können daher mit großer Wahrscheinlichkeit annehmen, daß Theodoros das Kriterium der unendlichen Wechselwegnahme gekannt und benutzt hat. Anders ist nämlich nicht einzusehen, warum Theodoros jeden Wert einzeln vorgenommen und bei $n = 17$ haltgemacht hat.

Im letzten Teil III kommen wir auf die Beziehung der pythagoreischen Mathematik zur babylonischen zu sprechen. Am klarsten wird diese Beziehung nach NEUGEBAUER¹⁰⁾ durch einen Vergleich der babylonischen Algebra mit der geometrischen Algebra der Griechen. Die Normalformen, auf welche die Babylonier ihre algebraischen Probleme zurückführten, sind die folgenden:

⁶⁾ Alexandri Aphrodis in Aristotelis Topicorum S. 545 (Wallies).

⁷⁾ BECKER, O.: Eudoxos-Studien I. Quellen u. Studien. Gesch. Math. B. 2, S. 311.

⁸⁾ ZEUTHEN, H. G.: Oversigt Danske Vidensk. Selsk. 1915, S. 341.

⁹⁾ ANDERHUB, J. H.: Joco-Seria aus den Papieren eines reisenden Kaufmanns, gewidmet den Freunden des Hauses Kalle & Co., Wiesbaden-Biebrich 1941.

¹⁰⁾ NEUGEBAUER, O.: Studien zur antiken Algebra. Quellen u. Studien z. Gesch. d. Math. B. 3, S. 1 u. 245.

A. Gleichungen mit einer Unbekannten.

(A 1) $ax = b$

(A 2) $x^2 = a$

(A 3) $x^2 + ax = b$

(A 4) $x^2 - ax = b$

(A 5) $x^3 = a$

(A 6) $x^2(x + 1) = a$

B. Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten.

(B 1)
$$\begin{cases} x + y = a \\ xy = b \end{cases}$$

(B 2)
$$\begin{cases} x - y = a \\ xy = b \end{cases}$$

(B 3)
$$\begin{cases} x + y = a \\ x^2 + y^2 = b \end{cases}$$

(B 4)
$$\begin{cases} x - y = a \\ x^2 + y^2 = b \end{cases}$$

Diese Normalformen sind durchaus typisch für die babylonische Algebra. Die arabische Algebra z. B. kennt (A 6) und (B 1–4) nicht, sondern reduziert alle Probleme auf Gleichungen mit einer Unbekannten. Es ist also ein vollgültiger Beweis für die Beziehungen zwischen der babylonischen und der griechischen Mathematik, daß wir sämtliche Probleme (A 1–5) und (B 1–4) in geometrischer Formulierung bei den Griechen wiederfinden¹¹⁾ und sogar Spuren von (A 6) in den *Ἀριθμοὶ παραμυχεπίπεδοι* der griechischen populären Arithmetik¹²⁾. Und auch die Lösungen dieser Probleme sind nicht etwa geometrisch gedacht, sondern sie sind wörtliche Übersetzungen der algebraischen Lösungen, wie die Keilschrifttexte sie geben, ins Geometrische¹³⁾. Nur insofern haben die Griechen eine Vereinfachung erreicht, als sie die Gleichungen (A 3–4) ständig auf die „hyperbolische Flächenanpassung“ (B 2) zurückführen.

Der Grund, warum die Griechen die algebraischen Probleme und Lösungen der Babylonier ins Geometrische übersetzen mußten, liegt in der Erkenntnis des Irrationalen. Die Lösung der Gleichungen in Zahlen, d. h. nach griechischen Begriffen in rationalen Zahlen, ist nicht immer möglich, und mit einer nur genäherten Lösung haben die Griechen sich nicht begnügen wollen. Die geometrische Lösung aber ist exakt und allgemeingültig, und die geometrische Algebra läßt sich auf beliebige, auch irrationale Strecken anwenden.

¹¹⁾ GANDZ, S.: *Osiris* 3 (1938) S. 405.

¹²⁾ BECKER, O.: *Quellen u. Studien z. Gesch. d. Math.* B 4, S. 181.

¹³⁾ NEUGEBAUER, O.: *Studien zur antiken Algebra III. Quellen u. Studien z. Gesch. d. Math.* B 8, S. 245.

Die geometrische Formulierung und Lösung der Probleme A 1 (parabolische Flächenanlegung), B 1 (elliptische Flächenanlegung) und B 2 (hyperbolische Flächenanlegung) ist nach Eudemos eine Erfindung der Pythagoreer. Sie sind es also, die die babylonische Algebra den Griechen übermittelt und dabei geometrisch umgestaltet haben.

Auch für die populäre pythagoreische Arithmetik, die wir aus Theon und Nikomachos kennen, lassen sich mehrere Beziehungen zur babylonischen Mathematik nachweisen. Quadrat- und Kubikzahlen sowie spezielle Körperzahlen der Form $n^2(n+1)$ oder $n^2(n-1)$ spielen in beiden eine Rolle; Summationsformeln für arithmetische und geometrische Reihen, für Quadrate und Kuben haben die Babylonier wie die Griechen interessiert; der Platonische Näherungsbruch $7/5$ für $\sqrt{2}$ stimmt mit dem Wert $1\frac{24}{60}$ der Keilschrifttexte überein.

Man hat die traditionelle Zuschreibung des „Pythagoreischen Lehrsatzes“ an Pythagoras mehrfach in Zweifel gezogen, weil man sich nicht hat erklären können, wie die Erkenntnis dieses Satzes in einem so frühen Stadium der Wissenschaft möglich war. Jetzt aber, wo die Beziehung der altpythagoreischen Mathematik zur babylonischen nachgewiesen ist und wo der Lehrsatz in den Keilschrifttexten der Hammirapizeit aufgezeigt werden kann, verliert die Zuschreibung alles Verwunderliche. Die griechische Mathematik steht eben, wie NEUGEBAUER sagt, nicht mehr am Anfang der Geschichte der Wissenschaft, sondern etwa in der Mitte. Die Leistung der ersten griechischen Mathematiker wie Thales, Pythagoras und die Pythagoreer ist nicht die Entdeckung der Mathematik, sondern ihre Systematisierung und exakte Begründung: Sie haben aus einer verwirrenden Fülle von Rechenvorschriften eine exakte Wissenschaft gemacht.

Wir sehen hier in der Mathematik wie in der Astronomie, wie die Griechen die wertvollsten Errungenschaften der Kultur des Zweistromlandes sich angeeignet, dabei aber umgeformt und ausgebaut haben. Sie haben der alten Wissenschaft ein eigenes, neues Gepräge gegeben und sie zu vorher ungeahnter Höhe weiterentwickelt. In der Astronomie sind die ionischen Naturphilosophen die Vermittler der orientalischen Wissenschaft an die Hellenen, in der Mathematik aber in erster Linie die Pythagoreer, angefangen mit Pythagoras selbst, dessen Orientreisen gar nicht so unglaublich oder so schlecht belegt sind, als man vielfach angenommen hat.

§ 1. Die in der Musiktheorie gebrauchten arithmetischen Sätze.

In der Begründung der pythagoreischen Musiktheorie, über die Ptolemaios kurz berichtet¹⁴⁾ und die in der Sectio canonicus des Euklid ausführlich dargestellt wird, werden folgende zwei zahlentheoretische Sätze benutzt:

¹⁴⁾ Klaudios Ptolemaios, Harmonielehre, ed. Düring, Göteborg Arsskr. 1930, Buch I, Kap. 5–6. Dazu B. L. v. D. WAERDEN, Harmonielehre d. Pythagoreer, Hermes 78 (1943).

A. Wenn ein Zahlenverhältnis¹⁵⁾, verdoppelt, ein Vielfaches bildet, so ist es selbst vielfach.

B. Zu zwei Zahlen in einem überteiligen Verhältnis können niemals mittlere Proportionale, weder eine noch mehrere, gefunden werden.

Dabei sagt man, eine Zahl¹⁶⁾ a stehe zu einer Zahl b in einem vielfachen Verhältnis, wenn a ein Teil von b , d. h. b ein Vielfaches von a ist: $a = b/n$ oder $b = na$. In einem überteiligen Verhältnis steht b zu a , wenn sie a um einen Teil von a übertrifft, d. h. wenn $b = a + a/n$ oder $a : b = n : (n + 1)$ ist. Die Verdopplung eines Verhältnisses schließlich ist durch die 9. Definition des V. Buches der Elemente Euklids erklärt:

V Def. 9. Wenn drei Größen in stetiger Proportion stehen, so sagt man von der ersten, daß sie zur dritten zweimal im Verhältnis stehe wie zur zweiten.

Die Verdopplung eines Verhältnisses entspricht offenbar der Multiplikation eines Bruches mit sich selbst; denn wenn $a : b = b : c$, so ist

$$\frac{a}{c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = \left(\frac{a}{b}\right)^2.$$

Die Griechen haben diese Multiplikation von Brüchen natürlich genau so gut gekannt wie wir: Sie ist in kaufmännischen und technischen Rechnungen unentbehrlich und wird auch in der altägyptischen Rechentechnik, die die Griechen kannten, immerfort geübt¹⁷⁾.

Der Ausdruck „verdoppeltes Verhältnis“ stammt, wie schon TANNERY bemerkt hat, aus der Musiklehre. Wenn nämlich zwei gleiche Teilintervalle A, B und B, C zu einem größeren Intervall A, C vereinigt werden (A, B, C stellen Töne dar), so ist es ganz natürlich, von Verdopplung des Intervalles A, B zu sprechen. Da aber die Intervalle nach der pythagoreischen Lehre durch Zahlenverhältnisse dargestellt werden, so hat man den Begriff Verdopplung in der angegebenen Weise auf Zahlenverhältnisse übertragen. Überträgt man in derselben Weise den Begriff der Zusammensetzung von ungleichen Intervallen, so kommt man auf die Zusammensetzung von zwei Verhältnissen $a : b$ und $b : c$ zu einem Verhältnis $a : c$. Dieser Begriff des „zusammengesetzten Verhält-

¹⁵⁾ Im Text der Sectio canonis heißt es: ein Intervall.

¹⁶⁾ Unter „Zahl“ verstehen wir hier wie die Griechen immer eine ganze Zahl. Wir bezeichnen durch $\frac{a}{b}$ den Bruch oder Quotienten im heutigen Sinne und im Sinne der griechischen Logistik, durch $a : b$ dagegen das Verhältnis von a zu b im Sinne der griechischen Arithmetik und der Proportionenlehre. $a : b$ ist also keine Zahl, auch keine gebrochene, sondern nur ein mögliches Glied in einer Proportion $a : b = c : d$, wobei die Proportion entweder nach Euklid V Def. 5 oder nach VII Def. 20 erklärt werden kann.

¹⁷⁾ Siehe VOGEL, K.: Beiträge zur griechischen Logistik I. S.-B. Bayer. Akad. München 1936, S. 357. Zu der dort genannten Literatur über ägyptische Bruchrechnung kommt noch VAN DER WAERDEN, B. L.: Quellen u. Studien z. Gesch. d. Math. B 4, S. 359, hinzu.

nisses“ (συγκείμενος λόγος) wird in Euklid VI 23 und VIII 5 benutzt; seine Eindeutigkeit ist durch V 22 gesichert.

Nachdem so die Bedeutung der Sätze *A* und *B* geklärt ist, fragen wir, wie die Pythagoreer diese Sätze bewiesen haben. Für Satz *B* ist ein Beweis des Archytas überliefert¹⁸⁾, der, wie TANNERY¹⁹⁾ nachgewiesen hat, in allen wesentlichen Punkten mit dem Beweis der Sectio canonis übereinstimmt. Der Beweis des Archytas verläuft so:

„Es sei *A*, *B* das gegebene überteilige Verhältnis. Die kleinsten Zahlen in diesem Verhältnis seien *C*, *DE*. Da nun also *C*, *DE* die kleinsten in diesem Verhältnis und überteilig sind, so übertrifft *DE* die Zahl *C* um einen Teil von sich selbst und von ihr. Es sei *D* der Überschuß. Ich behaupte, daß *D* keine Zahl ist, sondern die Einheit. Denn wenn *D* eine Zahl ist und ein Teil von *DE*, so mißt die Zahl *D* die Zahl *DE*, also mißt sie *E*. Das heißt, sie mißt auch *C*. Somit mißt die Zahl *D* die beiden Zahlen *C* und *DE*, was unmöglich ist. Denn die kleinsten Zahlen, die dasselbe Verhältnis haben wie andere Zahlen, sind zueinander prim. Also ist *D* eine Einheit. Also übersteigt *DE* die Zahl *C* um eine Einheit. Daher kann es keine mittlere Zahl geben, die mit ihnen gleiche Verhältnisse bildet. Deshalb kann es auch zwischen denen, die dasselbe Verhältnis haben wie sie, keine mittlere Zahl geben, die mit ihnen gleiche Verhältnisse bildet.“

Die Bezeichnung der Zahlen in diesem Beweis durch je einen Buchstaben und der Summe $D + E$ durch *DE* weicht ganz ab von dem, was wir aus Euklid und der späteren Literatur gewöhnt sind. Es ist daher anzunehmen, daß der Beweis wirklich alt ist. Dafür spricht auch die inhaltliche Übereinstimmung mit dem Beweis in der Sectio canonis. – Der Beweis beruht auf den folgenden Sätzen der Elemente Euklids:

VII 22. Die kleinsten unter den Zahlen, die dasselbe Verhältnis haben wie sie, sind gegeneinander prim.

VIII 8. Wenn sich zwischen zwei Zahlen Zahlen in stetiger Proportion einschalten lassen, dann lassen sich ebenso viele Zahlen wie zwischen jene auch zwischen solche Zahlen, die dasselbe Verhältnis haben, in stetiger Proportion einschalten.

Satz *A* aber wird in der Sectio bewiesen unter Berufung auf den folgenden, im Grunde mit Satz *A* gleichwertigen Satz der Elemente:

VIII 7. Hat man beliebig viele Zahlen in geometrischer Reihe und mißt die erste dabei die letzte, dann muß sie auch die zweite messen.

Wir schließen daraus, daß die Sätze VII 22, VIII 7 und VIII 8 zur Zeit des Archytas bekannt waren. Dabei sind VIII 7 und 8 keineswegs selbstverständlich. Die Tatsache, daß Archytas alle anderen Schritte seines Beweises mit

¹⁸⁾ BOETHIUS: De institutione musica, ed. Friedlein (Leipzig 1867) S. 285.

¹⁹⁾ TANNERY: Mém. Scient. III, S. 247.

peinlicher Sorgfalt ausführt, VII 22 und VIII 8 aber einfach als bekannt voraussetzt, deutet darauf hin, daß es zu seiner Zeit schon so etwas wie Elemente der Arithmetik gegeben hat, in denen diese Sätze vorkamen. Dieser Ansicht ist auch TANNERY.

Wir können diese Schlußfolgerung noch in anderer Weise bestätigen und vertiefen. Die Pythagoreer haben sich nach dem einstimmigen Zeugnis von Plato, Aristoteles und allen späteren aufs intensivste mit den mathematischen Wissenschaften: Arithmetik, Musik, Geometrie und Astronomie befaßt. Das Merkmal der pythagoreischen $\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha\tau\alpha$, durch das sie sich von anderen Kenntnissen und Künsten unterscheiden, war aber der logische Aufbau, die Gliederung in Sätzen und Beweisen. Wir finden diese logische Struktur bereits in voller Reife in dem ältesten uns zugänglichen Stück Mathematik, der Mondchenquadratur des Hippokrates²⁰). Denn daß Eudemos diese kunstvollen Beweise nachträglich hinzugefügt hat, ist völlig ausgeschlossen²¹). Wir erfahren von Eudemos, daß die Pythagoreer den Satz von der Winkelsumme im Dreieck so und so bewiesen haben, ja sogar Thales soll nach Eudemos bei Proklos seine Sätze nicht nur gefunden, sondern bewiesen haben²²). Ob das nun richtig ist oder nicht, jedenfalls beweist es, daß auch für Eudemos die ältesten ihm zugänglichen mathematischen Schriften bereits mit Beweisen versehen waren. Es ist also unbedingt anzunehmen, daß die Pythagoreer ihre arithmetischen Sätze, insbesondere die zur Begründung ihrer Musiktheorie notwendigen Sätze VII 22, VIII 7 und VIII 8 nicht nur formuliert, sondern auch bewiesen haben.

Das achte Buch und der Anfang des neunten handeln von geometrischen Reihen und geometrischen Mitteln, von ebenen und körperlichen Zahlen, von Quadrat- und Kubikzahlen. Diese Gegenstände gelten aus guten Gründen allgemein als pythagoreisch. Besonders zu erwähnen sind die Sätze VIII 18 und 19 und ihre Spezialfälle VIII 11 und 12, die besagen, daß man zwischen zwei ähnlichen ebenen Zahlen, speziell zwischen zwei Quadratzahlen, eine mittlere Proportionale, und ebenso zwischen zwei ähnliche körperliche Zahlen (speziell zwei Kubikzahlen) zwei mittlere Proportionale einschalten kann. Im Platonischen Timaios 31 B 4 und 32 A 7 wird auf diese Sätze angespielt; sie sind also vorplatonisch und, da Plato sie dem Pythagoreer Timaios in den Mund legt, sicherlich pythagoreisch.

Die Verallgemeinerung liegt nahe, daß die pythagoreische Arithmetik sich nicht auf diese zufällig überlieferten Sätze beschränkt hat, sondern daß die ganzen Bücher VII–VIII pythagoreisches Gedankengut darstellen. Wir wollen aber in unseren Schlüssen vorsichtig sein, da ZEUTHEN, dieser vorzügliche Ken-

²⁰) Siehe BECKER, O.: Quellen u. Studien z. Gesch. d. Math. B 3, S. 411, sowie die dort zitierte Literatur.

²¹) Nach den von ihm erhaltenen Fragmenten macht Eudemos den Eindruck eines etwas langweiligen, mittelmäßigen Schulphilosophen.

²²) Proklos in Euklid I, S. 157₁₀.

ner der griechischen Geometrie, anderer Meinung war und wesentliche Teile des VII. Buches dem Theaitetos zuschreiben wollte. Wir gehen daher so vor, daß wir von den bereits als pythagoreisch gesicherten Sätzen VIII 7–8 und VIII 11–12 ausgehen und Schritt für Schritt rückwärts schließend die pythagoreische Arithmetik rekonstruieren. Dieses Verfahren hat auch noch den Vorzug, daß wir nicht nur vereinzelte Sätze, sondern ganze Beweiszusammenhänge betrachten und so in die Gedankengänge der Pythagoreer selbst eindringen.

§ 2. Zergliederung der Beweise der Sätze VIII 7, 8, 11, 12.

Wir gehen so vor, daß wir von jedem der genannten Sätze einen Stammbaum aufstellen, in den alle die vorangehenden Sätze aufgenommen werden, die zu ihrem Beweis unbedingt gebraucht werden.

Am einfachsten ist der Stammbaum der Sätze VIII 11–12. Sie heißen:

VIII 11. Zwischen zwei Quadratzahlen gibt es eine mittlere Proportionalzahl; und die Quadratzahl steht zur Quadratzahl zweimal im Verhältnis wie die Seite zur Seite.

VIII 12. Zwischen zwei Kubikzahlen gibt es zwei mittlere Proportionalzahlen; und die Kubikzahl steht zur Kubikzahl dreimal im Verhältnis wie die Seite zur Seite.

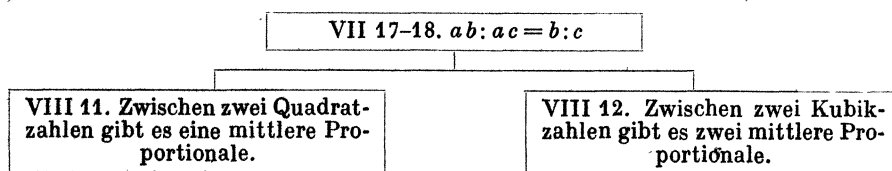
Die mit „und“ beginnenden Zusätze lasse ich außer Betracht, da sie nicht aus dem Timaios belegbar sind (obwohl man auf Grund der Würfelverdopplung des Archytas schließen könnte, daß Archytas sie gekannt hat).

VIII 11 wird nun so bewiesen: a^2 und b^2 seien die gegebenen Quadratzahlen, dann ist die Rechteckszahl ab die gesuchte mittlere Proportionale. Denn es ist $a^2 : ab = a : b = ab : b^2$. Der Beweis von VIII 12 ist ganz analog.

Der einzige Satz, der beim Beweis benutzt wird, aber auch notwendigerweise benutzt werden muß, ist VII 17 (bzw. der damit äquivalente VII 18):

VII 17. Wenn irgendwelche Zahlen entstehen, indem eine Zahl zwei Zahlen vervielfältigt, dann müssen die Ergebnisse dasselbe Verhältnis haben wie die Zahlen, die vervielfältigt werden.

Damit ist der Stammbaum der Sätze VIII 11–12 bereits fertig, denn VII 17 gehört zu den grundlegenden Sätzen über Proportionen, die am Anfang des siebenten Buches direkt aus der Definition der Proportion hergeleitet werden. Der Stammbaum sieht einfach so aus:



Wir kommen nun zu den Sätzen VIII 7 und 8, deren Formulierung in § 1 schon gegeben wurde. Der Spezialfall von VIII 7, der in der Musiktheorie Verwendung findet, hieß: *Hat man drei Zahlen in geometrischer Proportion und mißt die erste die dritte, so muß sie auch die zweite messen.* Der einfachste Beweis mit klassischen Mitteln verläuft so: Die kleinsten Zahlen, die sich wie die drei gegebenen a, b, c verhalten, seien a', b', c' . Dann sind a' und c' relativ prim (VIII 3), und weil c ein Vielfaches von a war, ist c' ein Vielfaches von a' (Def. der Proportion); also muß $a' = 1$ sein. Somit ist b' ein Vielfaches von a' und daher auch b ein Vielfaches von a .

Genau so geht auch Euklid vor, nur ist die Formulierung umständlicher. VIII 7 wird zunächst auf VIII 6 zurückgeführt, der dasselbe besagt wie VIII 7, aber ins Negative gewendet:

VIII 6. Hat man beliebig viele Zahlen in geometrischer Reihe und mißt dabei die erste die zweite nicht, dann kann auch sonst keine irgendeine (spätere) messen.

Diese umständliche Formulierung ist ein Zeichen für die Altertümlichkeit des Beweises. Hätte man VIII 7 ursprünglich anders bewiesen und die Beweise später überarbeitet, so hätte man wohl den einfachsten Weg gewählt. Ich nehme also an, daß die Pythagoreer dasselbe Beweisverfahren verwendet haben, und kann ihnen daher die folgenden beim Beweis von VIII 6 verwendeten Sätze zuschreiben:

VII 33. Zu beliebig vielen gegebenen Zahlen die kleinsten von denen zu finden, die dasselbe Verhältnis haben wie sie.

VIII 3. Hat man beliebig viele Zahlen in geometrischer Reihe, die kleinsten unter denen, die dasselbe Verhältnis haben wie sie, dann sind die äußeren Glieder gegeneinander prim.

Eine Bestätigung finden wir darin, daß der Beweis von VIII 8 bei Euklid ähnlich anfängt und ebenfalls die Sätze VII 33 und VIII 3 verwendet. Der Beweis von VIII 8 fängt damit an, daß zunächst folgende Teilaussage bewiesen wird, die übrigens zum Beweis des Satzes *B* bereits hinreicht:

VIII 8'. Zwischen die kleinsten Zahlen, die dasselbe Verhältnis haben wie zwei gegebene Zahlen a und c , kann man ebenso viele mittlere Proportionale einschalten wie zwischen a und c .

Beweis: Es sei etwa b eine mittlere Proportionale zwischen a und c . Die kleinsten Zahlen, die sich wie a, b, c verhalten, seien a', b', c' (VII 33). Dann sind a' und c' relativ prim (VIII 3), also sind a' und c' die kleinsten Zahlen im Verhältnis $a : c$ (VII 24). Somit läßt sich zwischen diese kleinsten Zahlen eine mittlere Proportionale einschalten.

Der Beweis bei Euklid ist etwas umständlicher, benutzt aber genau dieselben Sätze VII 33, VIII 3 und VII 21. Damit sind diese Sätze als pythagoreisch nachgewiesen. Verfolgen wir ihren Stammbaum weiter!

Zum Beweis von VII 33 könnte man wohl am einfachsten so vorgehen:

Wenn es kleinere Zahlen im Verhältnis der gegebenen gibt, so nehme man diese an ihre Stelle und fahre so fort, bis man die kleinsten gefunden hat. Jedoch war ein solcher reiner Existenzbeweis anscheinend dem Denken der antiken Zahlentheoretiker fremd. Auch wird niemand in der Praxis, wenn er ein Verhältnis auf kleinste Glieder zu bringen hat, so verfahren, daß er alle möglichen kleineren Zahlen durchmustert, die dasselbe Verhältnis haben wie die gegebenen, sondern man wird so vorgehen wie Euklid, indem man zuerst das größte gemeinsame Maß der gegebenen Zahlen bestimmt. So führt VII 33 zurück auf

VII 3. Zu drei gegebenen Zahlen, die nicht prim gegeneinander sind, ihr größtes gemeinsames Maß zu finden.

Diese Aufgabe wird naturgemäß gelöst durch Zurückführung auf die entsprechende für zwei Zahlen:

VII 2. Zu zwei gegebenen Zahlen, die nicht prim gegeneinander sind, ihr größtes gemeinsames Maß zu finden.

Zur Lösung dieser Aufgabe dient der berühmte „Euklidische Algorithmus“.

Daß dieser Algorithmus unseren Pythagoreern bekannt gewesen sein muß, kann man auch noch auf anderem Wege belegen. Die Sätze X 2–3 enthalten nämlich ein Verfahren zur Entscheidung, ob zwei Größen kommensurabel sind, welches darin besteht, daß abwechselnd immer die kleinere von der größeren weggenommen wird. Bricht das Verfahren nach endlich vielen Schritten ab, so sind die Größen kommensurabel, sonst nicht.

Es wird jedem Mathematiker einleuchten, daß dieses Verfahren der „Wechselwegnahme“ seinen eigentlichen Ursprung nicht in der Theorie der Irrationalitäten, sondern in der Zahlentheorie hat. Das ursprüngliche, sich von selbst bietende Problem ist: Wie findet man den größten gemeinsamen Teiler zweier Zahlen? und nicht: Wie findet man das größte gemeinsame Maß zweier Strecken, falls es ein solches gibt.

Nun zur Analyse von VIII 3! Die zunächst gar nicht evidente Behauptung VIII 3 wird sofort klar, wenn man sich überlegt, wie man kleinste Zahlen in geometrischer Reihe in gegebenem Verhältnis tatsächlich finden kann. Das Verfahren ist im Beweise von VIII 2 angegeben: Es sei $a : b$ das gegebene Verhältnis. Man multipliziere beide Zahlen a, b mit a und multipliziere auch noch b mit sich selbst. So erhält man drei Zahlen a^2, ab, b^2 in geometrischer Reihe. Um vier Zahlen zu erhalten, multipliziere man die drei gefundenen wieder mit a und die letzte, b^2 , auch noch mit b . So erhält man vier Zahlen a^3, a^2b, ab^2, b^3 usw.

Daß dieses Verfahren tatsächlich von den Pythagoreern angewandt wurde, dafür haben wir zwei weitere Belege: Erstens das Vorkommen desselben Verfahrens bei Nikomachos von Gerasa, der nirgends aus Euklid schöpft und auch sonst viel Altpythagoreisches überliefert, zweitens die Beziehung zu den

Sätzen VIII 11–12, die wir oben auf Grund des Timaios direkt als pythagoreisch nachgewiesen haben. Denn daß a^2 , ab , b^2 bzw. a^3 , a^2b , ab^2 und b^3 je eine geometrische Proportion bilden, das ist gerade der wesentliche Inhalt der Sätze VIII 11–12. Wir sind also bei unserer Analyse der Gedankengänge der alten Arithmetiker nicht vom richtigen Wege abgeirrt.

Zur Vervollständigung des Beweises von VIII 3 ist noch zu zeigen, daß die äußersten Glieder a^2 und b^2 bzw. a^3 und b^3 zueinander prim und die gefundenen Zahlen a^2 , ab und b^2 bzw. a^3 , a^2b , ab^2 und b^3 tatsächlich die kleinsten in den gegebenen Verhältnissen sind. Die letzte Behauptung folgt aus der ersten auf Grund des schon früher beim Beweis von VIII 8' benutzten Satzes:

VII 21. Zahlen, die gegeneinander prim sind, sind unter denen, die dasselbe Verhältnis haben wie sie, die kleinsten.

Daß aber a^2 zu b^2 und a^3 zu b^3 prim ist, folgt aus

VII 27. Sind zwei Zahlen gegeneinander prim und bildet jede der beiden, indem sie sich selbst vervielfältigt, eine weitere, so müssen die Ergebnisse gegeneinander prim sein; und wenn die ursprünglichen Zahlen, indem sie die Ergebnisse vervielfältigen, weitere bilden, so müssen auch diese gegeneinander prim sein.

VII 27 ist für die ganze Arithmetik der geometrischen Reihen und der mittleren Proportionalen fundamental. Um die Benutzung dieses Satzes kommt man auf keinen Fall herum, wie man auch den Beweis der Sätze VIII 7–8 in Angriff nehmen möge. Die vorhin schon besprochene Lösung der Aufgabe VIII 2: *Kleinste Zahlen in geometrischer Reihe in gegebenen Verhältnissen zu finden, so viele verlangt werden*, beruht ausschließlich auf VII 27 und auf den einfachsten Eigenschaften der Produkte und Proportionen. VII 27 muß also unbedingt den Pythagoreern bekannt gewesen sein.

An dieser Stelle könnte man den Einwand machen, daß die Pythagoreer vielleicht Sätze wie VII 21 und 27 ursprünglich als selbstverständlich betrachtet haben, und daß erst später, etwa in nachplatonischer Zeit, als an die Strenge der Beweise höhere Ansprüche gestellt wurden, diese Sätze ausdrücklich formuliert und bewiesen worden sind. Darauf ist folgendes zu erwidern: Bereits in sehr viel früherer Zeit waren gerade in der pythagoreischen Mathematik die Ansprüche an die Strenge des Beweises sehr hoch. Das sehen wir etwa an der Lehre vom Geraden und Ungeraden im IX. Buch der Elemente, die BECKER²³⁾ und REIDEMEISTER²⁴⁾ als sehr alt nachgewiesen haben. Sätze wie IX 21–29 sind jedem Rechner selbstverständlich, werden aber ausdrücklich formuliert und bewiesen. IX 30–32 sind mindestens ebenso einleuchtend wie VII 21 und 27, werden aber peinlich exakt aus noch einfacheren Tatsachen hergeleitet. In dem Beweis des Archytas, den wir in § 1 dargestellt haben, wird die genaue Ausführung aller einzelnen Beweisschritte sogar bis zur Pedanterie übertrieben.

²³⁾ BECKER, O.: Quellen u. Studien z. Gesch. d. Math. **3**, 533 (1936).

²⁴⁾ REIDEMEISTER, K.: Die Arithmetik der Griechen (1939) § 3.

In dem Hippokrates-Fragment über die Quadratur der Mondchen werden Ungleichungen, die man ohne weiteres aus einer Figur hätte entnehmen können, auf das sorgfältigste bewiesen. Aus alledem schließen wir, daß die Pythagoreer die Sätze VII 21 und 27 ausdrücklich formuliert und bewiesen haben müssen.

Euklid beweist VII 27 durch wiederholte Anwendung (über die Mittelglieder VII 25–26) aus:

VII 24. Sind zwei Zahlen gegen irgendeine Zahl prim, so muß auch ihr Produkt gegen dieselbe prim sein.

Heute würde man VII 24 etwa so beweisen: Sind a und b gegen c prim, und ist p irgendeine Primzahl, die in der Faktorzerlegung von c vorkommt, so geht p weder in a noch in b auf. Unter Berufung auf die eindeutige Primfaktorzerlegung oder auf VII 30: „Wenn eine Primzahl ein Produkt mißt, so muß sie einen der Faktoren messen“ folgt dann, daß p auch nicht in ab aufgeht. Also haben ab und c keinen Primfaktor gemeinsam, also sind sie teilerfremd.

Es wäre nun an sich denkbar, daß die Alten ursprünglich ebenso geschlossen hätten wie wir und dabei die eindeutige Primfaktorzerlegung oder den Satz VII 30 zunächst als selbstverständlich angenommen und erst später den Beweis hinzugefügt hätten. Wenn das so wäre, so müßte man erwarten, daß die jetzige Fassung des VII. Buches, der alten Tradition möglichst weit folgend, VII 24 aus VII 30 und 31 gefolgert hätte, was ohne weiteres möglich gewesen wäre. Aber VII 30 kommt erst 6 Sätze später, und VII 24 wird durch einen ganz kurzen Beweis direkt aus VII 19–21 gefolgert. Wir schließen daraus, daß bereits die Pythagoreer in ihrem Aufbau nicht etwa von der eindeutigen Primfaktorzerlegung (die im ganzen Buch VII nicht vorkommt) ausgegangen sind, sondern daß sie VII 24, so wie es im Text steht, aus VII 19–21 gefolgert haben. Der Beweis verläuft so:

Wären c und ab nicht prim gegeneinander, so müßte eine Zahl e und ab messen. Dies geschehe, die Zahl sei e . Da c und a gegeneinander prim sind, e aber in c aufgeht, so wären e und a gegeneinander prim. Da e auch ab mißt, kann man $ab = ef$ setzen. Daraus folgt $e : a = b : f$ (VII 19). Die Zahlen e und a wären, weil gegeneinander prim, auch die kleinsten im Verhältnis $b : f$ (VII 21), also messen sie die Zahlen b, f gleich oft (VII 20), das Vorderglied das Vorderglied und das Hinterglied das Hinterglied. e mæße also b . Nun soll e aber auch c messen. e mæße also b und c , während sie gegeneinander prim sind; dies ist unmöglich.

Ist dieser Beweis nicht wunderbar? Er beruht auf

VII 19. Stehen vier Zahlen in Proportion, dann muß das Produkt aus der ersten und vierten dem Produkt aus der zweiten und dritten gleich sein; und wenn das Produkt aus der ersten und vierten Zahl dem aus der zweiten und dritten gleich ist, dann müssen die vier Zahlen in Proportion stehen.

VII 20. Die kleinsten unter den Zahlen, die dasselbe Verhältnis haben wie sie,

messen Zahlen, die dasselbe Verhältnis haben, gleich oft, die größere die größere und die kleinere die kleinere.

VII 21. Zahlen, die gegeneinander prim sind, sind unter denen, die dasselbe Verhältnis haben wie sie, die kleinsten.

Daß VII 20–21 notwendige Bestandteile der pythagoreischen Zahlentheorie sind, ergibt sich auch noch auf einem zweiten Wege. Wir haben nämlich oben schon VII 21 als notwendig zum Beweise von VIII 8' erkannt. VII 21 beruht aber seinerseits auf VII 20; der Beweis liegt unmittelbar auf der Hand: Sind a, b relativ prim und sind c, d die kleinsten Zahlen im gleichen Verhältnis, so ist nach VII 20 $a = nc$ und $b = nd$; da aber a und b relativ prim waren, muß $n = 1$ sein.

VII 20 ist also der zentrale Satz, aus dem die ganze Lehre von den relativ primen Zahlen entspringt. Das ursprüngliche Interesse an diesem Satz wird verständlich, wenn man annimmt, daß die im VII. Buche dargestellte Proportionenlehre aus der Bruchrechnung hervorgegangen ist, daß also die Zahlenverhältnisse gewissermaßen getarnte Brüche sind²⁵). VII 20–21 beziehen sich dann auf gekürzte Brüche, wo Zähler und Nenner teilerfremd sind: VII 21 besagt, daß Zähler und Nenner eines solchen Bruches eindeutig bestimmt sind, und VII 20 gibt an, in welcher Beziehung die ungekürzten Darstellungen eines Bruches zu der gekürzten stehen.

VII 19 ist ein unentbehrlicher Bestandteil einer jeden Proportionenlehre. Sein Beweis fußt auf den beiden gleichwertigen Sätzen VII 17–18, die bereits im Stammbaum von VIII 11 und 12 vorkamen.

Die drei eben genannten Sätze VII 17–19 sind die letzten einer Reihe von formalen Sätzen VII 11–19, die das Rechnen mit Proportionen und Produkten beherrschen und auf denen auch die Beweise von VII 20 und allen folgenden Sätzen beruhen. VII 15 ist ein Hilfssatz zum Beweis des kommutativen Gesetzes der Multiplikation VII 16. Diese beiden Sätze könnten eventuell in der ursprünglichen Theorie gefehlt haben, denn das kommutative Gesetz der Multiplikation folgt auch unmittelbar aus der geometrischen Deutung des Produktes als Rechteckszahl, die den Pythagoreern geläufig war. Jedoch deutet die doppelte Fassung von VII 17–18 darauf hin, daß man bereits in der ursprünglichen Fassung zwischen $a \cdot b$ und $b \cdot a$ unterschieden hat. Wenn nämlich die Unterscheidung erst später eingeführt worden wäre, so wäre es deswegen noch nicht nötig gewesen, den einen Satz VII 17 in zwei Sätze aufzuspalten. Offenbar haben die Pythagoreer das Bedürfnis gehabt, die Arithmetik rein arith-

²⁵) Die Griechen kannten die ägyptische Bruchrechnung und rechneten, zumindest in späterer Zeit (Archimedes), auch mit gemischten Brüchen. Die Mathematiker der Zeit Platons vermieden aber, wie aus Plato, Staat 525 E, hervorgeht, die Brüche, weil die Eins theoretisch unteilbar ist, und rechneten statt dessen mit Zahlenverhältnissen. Siehe zu diesen Fragen VOGEL, K.: Griechische Logistik, S.-B. Bayer. Akad. München 1936 sowie KLEIN, J.: Quellen u. Studien z. Gesch. d. Math. B 3, S. 8, 18.

metisch ohne Zuhilfenahme geometrischer Vorstellungen zu begründen. So heißt es auch in der *Epinomis* (990 C): Die größte und erste von den Wissenschaften ist die Lehre von den Zahlen.

Die vier ersten Sätze der genannten Gruppe VII 11–14 haben denselben Wortlaut wie die entsprechenden Sätze 19, 12, 16, 22 des V. Buches, nur daß statt „Größen“ hier „Zahlen“ steht. Sie hätten also als Spezialfälle aus dem V. Buch übernommen werden können. Aus mehreren Aristotelesstellen²⁶⁾ geht nämlich hervor, daß der allgemeine Größenbegriff des Eudoxos auch die Zahlen umfaßte. Daß die Sätze VII 11–14 für Zahlen neu bewiesen werden, hängt damit zusammen, daß die Definition der Proportionen für Zahlen eine andere ist als die für allgemeine Größen im V. Buche. Sie heißt:

VII Def. 20. Zahlen stehen in Proportionen, wenn die erste von der zweiten Gleichvielfache oder derselbe Teil oder dieselbe Menge von Teilen ist wie die dritte von der vierten.

Hätte Euklid die allgemeine Definition V Def. 5 auch für Zahlen zugrunde gelegt, so hätte er VII 11–14 nicht für Zahlen neu zu beweisen brauchen. Man nimmt daher allgemein an, daß VII Def. 20 eine ältere Definition der Proportion darstellt, die schon existierte, bevor Eudoxos die Proportionenlehre für allgemeine Größen aufstellte, und daß Euklid aus Respekt vor der Tradition diese ältere Definition übernommen hat. Diese ältere Definition muß man dann natürlich auch den älteren Zahlentheoretikern, d. h. eben den Pythagoreern zuschreiben. Das stimmt aufs beste zu unserer Untersuchung, die ja dazu geführt hat, den wesentlichen Inhalt des Buches VII den Pythagoreern zuzuschreiben. Euklid hat offenbar eine ältere Zahlentheorie vorgefunden, die ganz auf der Definition VII 20 aufgebaut war und die er neu hätte aufbauen müssen, wenn er die allgemeine Definition V 5 auch für Zahlen zugrunde gelegt hätte. Er hat es mit Recht vorgezogen, die ältere Definition beizubehalten und den geschlossenen Aufbau der Zahlentheorie nicht zu zerstören.

VII 13 besagt, daß man die Mittelglieder einer Proportion vertauschen darf. Nach Aristoteles (*Anal. post.* 74a 17) hat man diesen Satz früher getrennt bewiesen für Zahlen, Strecken, Körper und Zeiten, aber nach der Aufstellung des allgemeinen Größenbegriffs, unter den sowohl Zahlen als Strecken, Körper und Zeiten fallen, konnte der Satz allgemein bewiesen werden. Dieser allgemeine Beweis ist offenbar der uns aus Euklid V 16 bekannte. Der Satz für Zahlen ist also älter und gehört natürlich in die pythagoreische Arithmetik, da er dort unentbehrlich ist.

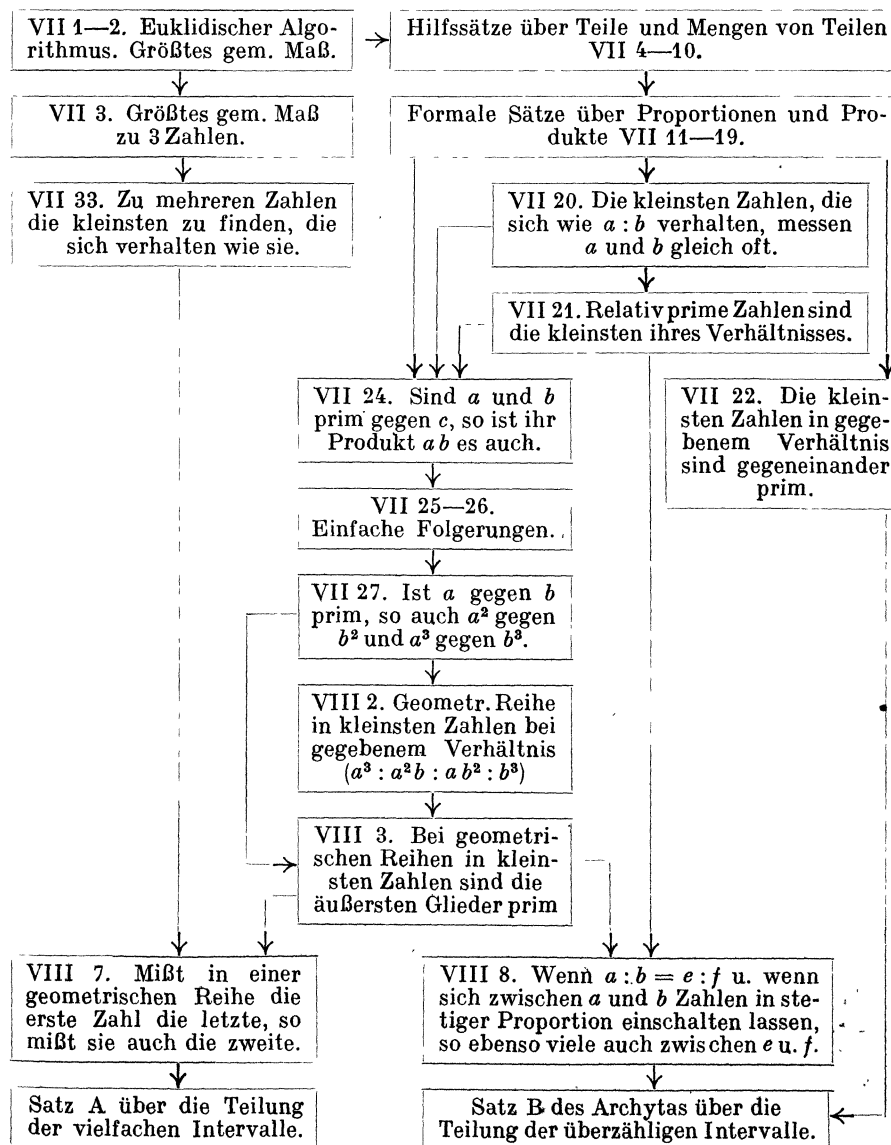
Nach alledem ist es verantwortet, die Definition VII 20 und die Satzgruppe VII 11–14 den Pythagoreern zuzuschreiben. Zum Beweise dieser Satzgruppe aus der Definition dienen aber die Sätze VII 5–10, und zwar dienen VII 5–6 zum Beweise von VII 12, VII 7–8 zum Beweise von VII 11, VII 9–10 zum Be-

²⁶⁾ Aristoteles, *Anal. post.* 75b 4: Ein arithmetischer Beweis ist nicht anwendbar auf Größen, sofern diese Größen nicht Zahlen sind. Vgl. auch die nachher zitierte Stelle 74a 17.

weise von VII 13. Kein Stück aus diesem Gebäude ist entbehrlich, das Ganze von einer wunderbaren Symmetrie und Harmonie.

Schließlich wird bei den Beweisen der erwähnten Hilfssätze VII 5–10 noch von dem Satz über die Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers (VII 2) Gebrauch gemacht, den wir früher schon in anderer Weise auch als pythagoreisch erkannt haben.

Das Ergebnis der bisherigen Untersuchung ist der folgende Stammbaum der Sätze VIII 7–8 und der aus ihnen folgenden musiktheoretischen Sätze A und B:



§ 3. Das siebente Buch Euklids.

Daß der größte Teil des Buches VII pythagoreisch ist, nicht nur dem Inhalte der Sätze, sondern auch der logischen Gliederung nach, ist im vorgehenden nachgewiesen. Welche Sätze bleiben noch übrig?

Die Sätze VII 29–32 handeln von Primzahlen:

VII 29. Jede Primzahl ist gegen jede Zahl, die von ihr nicht gemessen wird, prim.

VII 30. Wenn zwei Zahlen, indem sie einander vervielfältigen, irgendeine Zahl bilden und irgendeine Primzahl dabei das Produkt mißt, dann muß diese auch eine der ursprünglichen Zahlen messen.

VII 31. Jede zusammengesetzte Zahl wird von irgendeiner Primzahl gemessen.

VII 32. Jede Zahl ist entweder Primzahl oder wird von irgendeiner Primzahl gemessen.

Sie werden in den Elementen nirgends mehr benutzt. Es ist also nicht gut denkbar, daß Euklid oder einer seiner Vorgänger im vierten Jahrhundert sie neu hinzugefügt hätte, sondern es ist viel wahrscheinlicher, daß sie in der pythagoreischen Vorlage bereits vorhanden waren.

Die letzten sechs Sätze des Buches VII handeln von dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen. Zunächst werden die Existenz des K.G.V. und seine Haupteigenschaft bewiesen:

VII 34. Zu zwei gegebenen Zahlen die kleinste zu finden, die von ihnen gemessen wird.

VII 35. Wenn zwei Zahlen irgendeine Zahl messen, muß auch die kleinste von ihnen gemessene Zahl dieselbe messen.

VII 36. Zu drei gegebenen Zahlen die kleinste Zahl zu finden, die von ihnen gemessen wird.

Dann folgen drei merkwürdige, im Grunde überflüssige Sätze:

VII 37. Wird eine Zahl von irgendeiner Zahl gemessen, so muß die gemessene Zahl einen Teil besitzen, dessen Nenner der messenden Zahl gleich ist.

VII 38. Wenn eine Zahl einen Teil besitzt, einerlei welchen, so läßt sie sich durch eine Zahl messen, die dem Nenner des Teiles gleich ist.

VII 39. Die kleinste Zahl zu finden, die vorgeschriebene Teile besitzt.

Der Beweis von VII 39 wird nur für 3 Zahlen a, b, c geführt; der Satz besagt also nichts Neues gegenüber VII 36. Was mag wohl der Sinn dieser neuen Formulierung sein?

Vielleicht wirft eine Platonstelle einiges Licht auf diese Frage. Im Staat 525 E heißt es, man solle nur von reinen Zahlen reden und nicht dulden, daß man etwa mit Zahlen komme, die mit sichtbaren oder greifbaren Körpern vermischt sind. „Denn du weißt ja, wie es die geschulten Mathematiker machen: wenn einer versucht, die reine Eins in Gedanken zu teilen, so lachen sie ihn aus und weisen ihn ab, und während du sie zerstückelst, antworten sie mit der Vervielfältigung derselben.“

Veranschaulichen wir uns die Meinung Platons einmal an einem konkreten Zahlenbeispiel! Die „zu Zwecken der Krämerei“ geübte Rechenkunst, die die Einheiten als teilbar betrachtet, möge irgendeine Rechnung vornehmen, wie wir sie aus der ägyptischen Bruchrechnung kennen, z. B. $1/2 - 1/3 = 1/6$. Während die Eins hier zerstückelt, nämlich halbiert und gedrittelt wird, wird der „fachkundige Mathematiker“ sie vervielfachen, in diesem Fall versechsfachen. Er geht also von 6 Einheiten aus; von dieser Menge kann er dann ohne weiteres die Hälfte (nämlich 3) und ein Drittel (nämlich 2) bilden; die Differenz ergibt dann in der Tat ein Sechstel der Menge, nämlich 1. So kann er jede Bruchrechnung in eine Rechnung mit ganzen Zahlen verwandeln.

Um dieselbe Überlegung allgemein für irgendwelche Bruchrechnungen durchzuführen, ist es nötig, jeweils eine Zahl zu finden (wie die 6 in meinem Beispiel), von der man irgendwelche vorgegebenen Bruchteile bilden kann. Daß das immer möglich ist, besagt gerade unser Satz VII 39. Zu seiner Vorbereitung dienen VII 37–38.

Damit ist aber noch nicht gesagt, daß diese drei Sätze zum ursprünglichen Bestand der pythagoreischen Theorie gehören. Sie könnten ganz gut einen Zusatz aus platonischer Zeit darstellen. Wohl halte ich die vorangehenden Sätze VII 34–36 für ursprünglich. Denn eine Theorie des kleinsten gemeinsamen Vielfachen gehört, schon wegen der Anwendung auf die Bruchrechnung, zu einer abgerundeten Teilbarkeitstheorie, wie sie das Buch VII bietet, unbedingt dazu.

Wir haben nunmehr das Ganze des Buches VII mit Ausnahme der letzten drei Sätze 37–39 als pythagoreisch erkannt. Das Ganze ist von außerordentlicher Geschlossenheit und Schönheit: ein Werk aus einem Guß, ohne Nähte und Flickstellen, ein Gebäude, aus dem man keinen Stein herausbrechen kann. Die Ausdrucksweise ist manchmal archaisch und umständlich (so die immer wiederkehrende Wendung: „Wenn eine Zahl eine Zahl vervielfacht und dadurch eine Zahl entsteht“), aber die Beweise sind fast immer die kürzest denkbaren. Die Beweismethode des Hauptteiles läßt sich so charakterisieren: Sätze über Produkte werden konsequent auf Sätze über Proportionen zurückgeführt, diese ihrerseits auf gleichlautende Sätze über Teile und Mengen von Teilen. Der euklidische Algorithmus liegt dem Ganzen zugrunde. Die Proportionenlehre ist in 6 Sätzen (VII 11–14 und 17–18) zusammengedrängt. Darauf fußend, werden nacheinander die Theorie der relativ primen Zahlen und die Kürzung von Verhältnissen behandelt, dann die Haupteigenschaften der Primzahlen, schließlich das K.G.V.

Die Tatsache, daß Archytas in dem bei Boethius dargestellten Beweis (§ 1) einen Satz VII 22 wörtlich zitiert und eine Folgerung aus der Theorie, nämlich VIII 8, wesentlich benutzt, beweist, daß die ganze Theorie dem Archytas im wesentlichen fertig vorgelegen hat. Wie wir gesehen haben, zeigt das Buch VII keine Spuren einer späteren Überarbeitung. *Ich nehme also an, daß Buch VII*

einen Lehrgang der pythagoreischen Zahlentheorie oder einen Teil eines solchen Lehrganges darstellt, der schon vor 400 schriftlich fixiert wurde und den Euklid ohne erhebliche Änderungen übernommen hat.

Diese Schlußfolgerung geht weiter als die von HEATH: „We have seen reason to suppose that there existed Elements of Arithmetics partly (at all events) on the lines of Euclid, Book VII, while some propositions of Book VIII (e. g. Propositions 11 and 12) were also common property“ und steht in direktem Gegensatz zur Ansicht ZEUTHENS, nach der die Sätze des Buches VII von Theaitetos zuerst bewiesen worden seien.

§ 4. Das achte Buch Euklids.

Während das siebente Buch durch die Konzentration und zwingende Logik seines Aufbaues unsere Bewunderung erregte, ist das achte viel weniger straff gegliedert. Die meisten Beweise enthalten überflüssige Bestandteile. Im Beweis von VIII 3 z. B. ist die Bildung und Benennung von vier neuen Zahlen, die sich wie a, b, c, d verhalten und die kleinsten ihres Verhältnisses sind, überflüssig, da a, b, c, d nach Voraussetzung schon selber die kleinsten ihres Verhältnisses sind. Der Beweis von VIII 4 ist von einer unausstehlichen Weitschweifigkeit. Daß VIII 6 und 7 genau dasselbe besagen, mithin einer von beiden entbehrlich ist, wurde oben schon bemerkt. Aber auch VIII 14 und 16 besagen dasselbe, ebenso VIII 15 und 17, auch VIII 18 und 26 sowie VIII 19 und 27.

Derselbe Mangel an Prägnanz zeigt sich im ganzen Aufbau des Buches VIII. Eine Hauptfrage des Buches heißt: Wie müssen zwei Zahlen a und d beschaffen sein, damit man zwischen sie oder zwischen zwei Zahlen im gleichen Verhältnis irgendeine Anzahl von mittleren Proportionalen einschalten kann? Die einfachste Antwort auf diese Frage steht nicht ausdrücklich im Text; sie heißt so: Sind a' und d' kleinste Zahlen im Verhältnis $a : d$, so müssen diese, damit man n mittlere Proportionale zwischen sie einschieben kann, $(n + 1)$ -te Potenzen sein, oder in griechischer Ausdrucksweise: Jede der beiden Zahlen a' und d' muß durch n -mal wiederholte Vervielfältigung einer Zahl mit sich selbst entstehen. Daß das richtig ist, folgt sehr leicht aus VIII 2 und VIII 3, nämlich so:

Es mögen etwa 2 mittlere Proportionale b und c zwischen a und d verlangt werden. Sind solche vorhanden, so ist also $a : b = b : c = c : d$. Die kleinsten Zahlen in diesem Verhältnis $a : b$ seien p und q . Dann sind nach VIII 2 die kleinsten Zahlen, die sich wie die Glieder der Proportion a, b, c, d verhalten, die Zahlen p^3, p^2q, pq^2 und q^3 . Die äußeren Glieder p^3 und q^3 sind nach VII 27 oder nach VIII 3 zueinander prim; sie sind also die kleinsten Zahlen im Verhältnis $a : d$ (VII 21). Also sind diese kleinsten Zahlen tatsächlich dritte Potenzen.

Umgekehrt: Wenn a' und b' dritte Potenzen sind: $a' = p^3$, $b' = q^3$, so bilden sie die äußersten Glieder einer nach VIII 2 gebildeten geometrischen Reihe p^3, p^2q, pq^2, q^3 . Nach VII 20 messen a' und b' die gegebenen Zahlen a und b gleich oft, etwa n -mal. Multipliziert man nun die Glieder der Reihe p^3, p^2q, pq^2, q^3 alle mit n , so erhält man eine viergliedrige geometrische Reihe mit den Endgliedern a und b . Damit ist alles bewiesen.

Dieser Beweis verwendet im Grunde genau dieselben Überlegungen wie der Text der Elemente selbst. Daß sie nur am Beispiel einer viergliedrigen Proportion erklärt wurden, entspricht dem ständigen Verfahren Euklids. Aber wieviel umständlicher verfährt dieser! Nach dem entscheidenden und unentbehrlichen Satz VIII 2 wird zunächst VIII 3 aufgestellt, im Grunde nur ein Duplikat von VII 27. Nach einer Abschweifung über andere Gegenstände (VIII 4–7) kommt der uns schon bekannte Satz VIII 8, der es gestattet, sich künftig auf den Fall zu beschränken, wo die gegebenen Zahlen a und d die kleinsten ihres Verhältnisses, also relativ prim sind. Nun wird bewiesen:

VIII 9. Sind zwei Zahlen gegeneinander prim und kann man zwischen sie Zahlen in stetiger Proportion einschalten, dann müssen sich ebenso viele Zahlen, wie sich zwischen jene in stetiger Proportion einschalten lassen, auch zwischen jede von ihnen und die Einheit in stetiger Proportion einschalten lassen.

VIII 10. Kann man zwischen jede von zwei Zahlen und die Einheit (gleichviele) Zahlen in stetiger Proportion einschalten, dann müssen sich ebenso viele Zahlen, wie sich zwischen jede der beiden und die Einheit in stetiger Proportion einschalten lassen, auch zwischen jene in stetiger Proportion einschalten lassen.

Damit ist das gestellte Problem prinzipiell gelöst, und die Lösung ist auch mit der oben angegebenen gleichwertig, denn die Zahlen einer mit der Einheit anfangenden geometrischen Proportion $1, p, p^2, \dots$ sind genau die Potenzen von p . Der Autor des Buches VIII ist aber mit dieser Formulierung noch nicht ganz zufrieden: er will insbesondere noch ausdrücklich sagen, daß man zwischen zwei Quadratzahlen eine, zwischen Kubikzahlen zwei mittlere Proportionale einschalten kann (VIII 11 und 12). Dabei werden aber VIII 11 und 12 nicht als Spezialfälle aus VIII 10 erhalten, sondern neu bewiesen. Die Umkehrungen von VIII 11 und 12 werden nicht formuliert.

Nachdem unser Autor in der angegebenen Weise die Frage, unter welchen Bedingungen es eine oder zwei mittlere Proportionale gibt, einmal ganz und einmal halb gelöst hat, nimmt er sie noch ein drittes Mal in Angriff, diesmal mit Hilfe der Begriffe „ähnliche ebene Zahlen“ und „ähnliche Körperzahlen“. Die Sätze VIII 18–21 besagen nämlich: Dann und nur dann gibt es zwischen zwei Zahlen eine bzw. zwei mittlere Proportionale, wenn diese Zahlen ähnliche ebene bzw. körperliche Zahlen sind.

Der Begriff „ähnliche Zahlen“ verführt leicht zu Trugschlüssen. Im Beweis

von VIII 22 steckt ein solcher; darauf hat schon REIDEMEISTER (Arithm. d. Gr. § 4) aufmerksam gemacht. Es heißt dort nämlich: a ist zu c ähnlich und a ist eine Quadratzahl, also ist c eine Quadratzahl. Das ist zwar richtig, aber es muß bewiesen werden, denn a und c könnten ja auch ähnliche Rechteckszahlen mit ungleichen Seiten sein.

Wir sehen, daß unser Autor ständig mit der Ausdrucksweise ringt: er hat die Probleme, die er sich gestellt hat, wohl gelöst, aber er weiß die Lösung nicht kurz und prägnant, ein für allemal gültig zu formulieren. Nicht zuletzt liegt das auch daran, daß kurze Worte wie Produkt und Potenz ihm fehlen. Während aber der Autor des Buches VII mit der umschreibenden Ausdrucksweise für Produkt usw. leicht fertig wird und seine Hauptsätze klar und logisch aneinanderreihet, ist das dem Autor des Buches VIII nicht gelungen. Ein weiteres Beispiel dafür: Er bringt den entscheidenden Satz VIII 2, auf dem im Grunde das ganze Buch beruht, nicht als Satz, sondern als Aufgabe, was zufolge hat, daß er sich später nicht auf eine fertige Formulierung berufen kann, sondern immer ein Stück des Beweises mit zitieren muß.

Nach dieser Stiluntersuchung des Buches VIII wird es klar, daß das ganze Buch das Werk eines einzigen Autors ist. Dieser Autor muß ein Pythagoreer sein. Es ist unmöglich, zwischen den als pythagoreisch nachgewiesenen Sätzen VIII 2–3, 7–8, 11–12, 18–21 und den nachfolgenden Sätzen irgendwo eine Trennungslinie zu legen, wo das Werk eines Späteren anfangen sollte. Die mit VIII 2–3 und 8 eingeleitete Problemstellung verlangt eine Lösung, wie sie eben durch VIII 9–10 gegeben ist. Sachlich fängt zwar mit VIII 11 ein neuer Abschnitt an, der von den ebenen und körperlichen Zahlen, von Quadrat- und Kubikzahlen handelt, aber dieser neue Abschnitt ist ebenso pythagoreisch wie der erste und die Stileigentümlichkeiten und logischen Mängel sind dieselben.

Es wäre an sich denkbar, daß die größere Prägnanz des Buches VII eine Folge einer späteren Überarbeitung wäre. Der Bearbeiter hätte dann alles überflüssige ausgeschieden, das Ganze straffer zusammengefaßt und die Beweise ganz zwingend gemacht. Jedoch scheint das nicht wahrscheinlich. Das Problem des Buches VII: die Begründung der Lehre von den Zahlenproportionen und von den Teilbarkeitseigenschaften der ganzen Zahlen ist ein logisches Problem. Ein solches Problem stellt sich nur einer, dem es auf die logische Gliederung der Wissenschaft und die völlige Schärfe der Beweise als Hauptsache ankommt. Ein solcher scharfer Logiker stellt aber auch präzise dar, er wiederholt sich nicht und macht keine Fehlschlüsse.

Buch VIII ist jünger als VII, denn es benutzt dessen Ergebnisse. Wir können dasselbe aber noch tiefer begründen. Die in VII behandelten Probleme und Begriffe: Proportion, Primzahl, G.G.T., K.G.V. haben die Zahlentheoretiker naturgemäß von jeher interessiert. Die Probleme des Buches VIII dagegen hängen aufs engste mit der Lehre des Irrationalen zusammen, die nach

einer gut begründeten Ansicht²⁷⁾ erst kurz vor 400 aktuell wurde. Das VIII. Buch enthält nämlich die Erkenntnis, daß es unter Umständen unmöglich ist, eine rationale mittlere Proportionale zwischen zwei Zahlen zu finden. Stellt man aber diese Zahlen durch Strecken dar, so gibt es zwischen diesen Strecken wohl immer eine mittlere Proportionale²⁸⁾. Diese geometrisch konstruierte mittlere Proportionale kann also nicht durch eine ganze oder gebrochene Zahl dargestellt werden, d. h. sie ist irrational. So hängt das VIII. Buch mit der Lehre vom Irrationalen zusammen, die ja bekanntlich auch von den Pythagoreern begründet wurde.

§ 5. Der Verfasser des achten Buches.

Unter den pythagoreischen Mathematikern am Anfang des 4. Jahrhunderts ragt Archytas von Taras, der Freund und Lehrer Platons, hervor. Wir haben oben schon gesehen, daß die zahlentheoretischen Sätze des achten Buches eng mit den musiktheoretischen Untersuchungen des Archytas, nämlich mit der von ihm bewiesenen Unmöglichkeit der Teilung der überteiligen Intervalle in zwei oder mehr gleiche Teilintervalle, zusammenhängen. Aber noch in anderer Hinsicht berührt sich das achte Buch mit dem Werke des Archytas. Die Archyteische Lösung des Delischen Problems²⁹⁾ der Würfelverdopplung geht davon aus, daß dieses Problem gleichbedeutend ist mit der Konstruktion von zwei mittleren Proportionalen zwischen zwei gegebenen Strecken. Mit der Einschaltung von mittleren Proportionalen befaßt sich auch das achte Buch. Den Zusammenhang zwischen dem Problem der Würfelverdopplung und den ähnlichen Körperzahlen betont auch die *Epinomis* mit allem Nachdruck³⁰⁾.

So könnte man auf die Vermutung kommen, daß Archytas selbst der Autor des achten Buches sei. Und in der Tat besteht eine auffallende Ähnlichkeit im Stil zwischen diesem Buch und den überlieferten Archytasfragmenten. Man vergleiche zunächst den oben mitgeteilten, von Boethius überlieferten Beweis des Satzes B mit Buch VIII. Hier wie dort dieselbe Umständlichkeit und Weit-schweifigkeit, dieselbe pedantische Ausführlichkeit in den kleinsten Beweis-

²⁷⁾ VOGT, H.: Die Entwicklungsgeschichte des Irrationalen, *Bibliotheca Math.* X (1910). JUNGE, G.: Wann haben die Griechen das Irrationale entdeckt? Halle 1907.

²⁸⁾ Die geometrische Konstruktion der mittleren Proportionale ist Archytas und den Pythagoreern ganz geläufig, aber sie muß bereits Hippokrates bekannt gewesen sein; denn wie könnte dieser sonst zwei Strecken bilden, die sich in der Potenz wie 1 : 3 oder wie 2 : 3 oder wie 1 : 6 verhalten?

²⁹⁾ Eudemos im Eutokioskommentar zu Archimedis Opera (Heiberg) III, S. 99.

³⁰⁾ Plato, *Epinomis* 990 D: „Was aber vollends ein nicht mehr menschliches, sondern göttliches Wunder bedeutet, das würde dem offenbar werden, der nach dieser die dreifach ausgedehnten und körperlichen Zahlen verstehen könnte. Die aber wiederum, die in diesem Sinne unähnlich geworden sind, möge er durch eine andere Kunst ähnlich machen, durch diejenige nämlich, die die mit ihr bekannt gewordenen Stereometrie genannt haben“. Vgl. TOEPLITZ, O.: Quellen u. Studien z. Gesch. d. Math. B 2, S. 334, und BECKER, O.: Quellen u. Studien z. Gesch. d. Math. B 4, S. 191.

schritten! Wortreichtum und viele Wiederholungen kennzeichnen auch das bekannte Archytasfragment über die hohen und tiefen Töne³¹⁾.

In meiner Abhandlung über die Harmonielehre der Pythagoreer habe³²⁾ ich die Vermutung aufgestellt, daß die in der Sectio canonis mitgeteilte Begründung der pythagoreischen Musiktheorie von Archytas stammt. In dieser Begründung findet sich, wiederum typisch für Archytas, an der entscheidenden Stelle (nämlich im Beweis von Satz 11) ein Fehlschluß. Aber auch sonst ist die Sectio in mancher Hinsicht dem VIII. Buche der Elemente ähnlich. Satz 5 der Sectio ist nur eine Wiederholung des Satzes 1. Der Beweis des Satzes 6 ist unnötig kompliziert, weswegen auch ein späterer Bearbeiter einen zweiten, kürzeren hinzugefügt hat. Auch der Beweis des Satzes 10 läßt sich kürzen. So erkennt man in der Sectio canonis trotz der erheblichen späteren Überarbeitung (namentlich in der Einleitung, wo sich der Einfluß des Herakleides Pontikos nachweisen läßt³³⁾, und in den Sätzen 17 und 18, die das enharmonische Tongeschlecht anders definieren als Archytas) den Stil des Tarentiners deutlich wieder.

Die Würfelverdopplung des Archytas zeugt von einer hervorragenden Raumanschauung und einer starken Erfindungsgabe. Die Körper und Raumkurven, die er als Hilfsmittel heranzieht, werden durch mechanische Bewegungen erzeugt. Archytas soll auch ein Werk über Mechanik (oder über Maschinen) geschrieben und selber Maschinen konstruiert haben³⁴⁾. Wir können ihn also charakterisieren als einen *erfindungsreichen Geometer und hervorragenden Mechaniker und Musiktheoretiker mit einer unglücklichen Liebe zur Logik und zur exakten Arithmetik*.

Wie alle Pythagoreer, war Archytas immer geneigt, alles auf Zahlen zurückzuführen und durch Zahlen auszudrücken, und so gibt er auch der Logistik den Vorrang vor der Geometrie, „weil sie deutlicher als diese behandeln kann, was sie will“³⁵⁾. Die anschließende Bemerkung: „Und wo die Geometrie wiederum versagt, bringt die Logistik Beweise zustande“, ist wiederum typisch für die schwache Logik des Archytas. Er hat das Problem des Irrationalen nicht klar erkannt und nicht gesehen, daß gerade umgekehrt die Geometrie, nämlich die geometrische Algebra, strenge und allgemeine gültige Beweise für algebraische Formeln wie $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ zu geben vermag³⁵⁾, wo die Logistik im Falle der Irrationalität der Größen a und b versagt.

§ 6. Das neunte Buch Euklids.

Der Anfang des Buches IX (Satz 1–13) schließt sich sachlich unmittelbar an VIII an: hier wie dort ist von geometrischen Reihen, von Quadrat- und

³¹⁾ DIELS: Fragmente der Vorsokratiker, Archytas B. 1.

³²⁾ VAN DER WAERDEN, B. L.: Hermes 78 (1943).

³³⁾ DIELS: Fragmente der Vorsokratiker, Archytas A. 1.

³⁴⁾ DIELS: Fragmente der Vorsokratiker, Archytas B 4.

³⁵⁾ Vgl. Euklid II 4.

Kubikzahlen die Rede. Aber der Stil verrät einen anderen Autor. Hier keine Wiederholungen, keine überflüssigen Sätze, keine Weitschweifigkeit in den Beweisen. Die 13 Sätze werden nach einer ganz einheitlichen Methode bewiesen, und zwar ist diese Beweismethode eine ganz andere als die in VIII meistens angewandte. Die Sätze des Buches VIII beruhen nämlich letzten Endes alle auf VIII 2: Kleinste Zahlen in geometrischer Reihe in gegebenem Verhältnis zu finden, soviel verlangt werden. In IX 8–13 nun handelt es sich um geometrische Reihen von der 1 aus. Würde man die Konstruktionsmethode VIII 2 auf diesen Fall anwenden, so würde herauskommen, daß die Glieder einer solchen Reihe alle durch Vervielfältigung einer Zahl a mit sich selbst entstehen: $1, a, a^2, \dots$. Daraus könnte man Sätze wie IX 8, 9, 11 unmittelbar herleiten. Aber das neunte Buch verfährt anders: die Vervielfältigungsmethode wird nirgends angewandt, sondern vorzugsweise die Sätze über ähnliche ebene und körperliche Zahlen. Um z. B. zu beweisen, daß das 5. Glied d einer geometrischen Reihe $1, a, b, c, d, \dots$ eine Quadratzahl ist (IX 8), wird nicht etwa bemerkt, daß d das Quadrat von b ist, sondern es heißt: Aus $b : c = c : d$ folgt nach VIII 22, da b eine Quadratzahl ist, daß auch d eine sein muß.

Diese Beweismethode hat den Vorzug, daß sie es gestattet, gewisse Umkehrsätze ebenso einfach zu beweisen wie die Sätze selbst. Z. B. besagt IX 10; die Umkehrung von IX 9: Wenn das vierte Glied c eine Quadratzahl ist, so auch das zweite Glied a . Beweis: Wegen $a : b = b : c$ sind a und c ähnliche ebene Zahlen.

Nach dieser Beweismethode werden alle Sätze IX 1–14 einheitlich und ohne Umwege bewiesen.

Der Verfasser des Buches IX ist demnach ein anderer als der von VIII. Da er die Sätze des Buches VIII dauernd anwendet, müssen wir ihn später als Archytas ansetzen. Wahrscheinlich gehörte er dem Kreise der Platonischen Akademie an: Proklos nennt in seinem Mathematikerverzeichnis eine ganze Reihe von Mathematikern aus diesem Kreise, die zur Vervollkommnung der Elemente beigetragen haben.

IX 14–20 haben wenig Zusammenhang untereinander und mit dem Vorangehenden und Folgenden. IX 20 ist mit Recht berühmt: Es gibt mehr Primzahlen als jede vorgelegte Anzahl von Primzahlen. Wann und von wem diese Sätze aufgestellt worden sind, wissen wir nicht.

Den Schluß des Buches IX bildet die Lehre von Geraden und Ungeraden. Nach O. BECKER³⁶⁾ muß der Beweis von IX 32 ursprünglich anders gelaute haben: IX 32 kann ohne Verwendung des in den Zusammenhang nicht hineingehörigen IX 13 direkt aus einem der beiden vorangehenden Sätze IX 30 oder 31 hergeleitet werden. Nach dieser Bereinigung bilden IX 21–34 ein geschlos-

³⁶⁾ BECKER, O.: Quellen u. Studien z. Gesch. d. Math. B 3, S. 533.

senes Satzgefüge, welches nirgends auf die übrigen arithmetischen Bücher Bezug nimmt.

Schon daraus geht das hohe Alter dieser Gruppe von Sätzen hervor. Als Bestätigung kommt noch ein Epicharmfragment hinzu, das auf das „Gerade und Ungerade“ anspielt³⁷). Ich möchte die Entstehung dieses „ältesten $\mu\acute{\alpha}\theta\eta\mu\alpha$ der Pythagoreer“ (REIDEMEISTER) in die 1. Hälfte des 5. Jahrhunderts verlegen.

Die Krönung der Lehre vom Geraden und Ungeraden ist der Satz über die vollkommenen Zahlen IX 36, zu dessen Beweis die Sätze IX 21–34, wie BECKER gezeigt hat, vollkommen ausreichen. Der bei Euklid dargestellte Beweis scheint, wie REIDEMEISTER es ausdrückt, „aus dem sachlich nicht gerechtfertigten Bemühen hervorzugehen, den Satz in den allgemeinen Zusammenhang des Buches hineinzustellen, die Lehre von den geometrischen Reihen“. Deshalb wurde auch die Summenformel der geometrischen Reihe als Satz IX 35 vorausgeschickt.

Die vollkommenen Zahlen sind verwandt mit den „befreundeten Zahlen“, das sind Paare von Zahlen, von denen jede gleich der Summe der Teiler der anderen ist. Als man Pythagoras fragte, was ein Freund sei, sagte er „ein zweites Ich“ und gab dazu die befreundeten Zahlen 220 und 284 an³⁸).

Die einzige Anwendung der Lehre vom Geraden und Ungeraden bei Euklid selbst ist der Beweis des Satzes X 115 a, der am Schluß des X. Buches steht, aber aus dessen Zusammenhang herausfällt:

X 115 a. *Man soll zeigen, daß in jedem Quadrat die Diagonale der Seite linear inkommensurabel ist.*

Auf diesen Beweis spielt Aristoteles mehrfach an³⁹). Er läßt darauf hinaus, daß man zeigt: Wenn die Diagonale der Seite kommensurabel wäre, so wäre eine und dieselbe Zahl gleichzeitig gerade und ungerade. Wenn die obige Datierung der Lehre vom Geraden und Ungeraden richtig ist, so hätte man um 450 schon über die Elemente dieses Beweises verfügt.

Einen Terminus ante quem für die Entdeckung der Irrationalität der Quadratdiagonale gewinnen wir nach ZEUTHEN folgendermaßen: Theodoros von Kyrene, der nach der dichterischen Fiktion Platons (im Theaitetos) als alter Mann um 400 in Athen gelehrt haben soll, setzte bei seinen Hörern die Irrationalität von $\sqrt{2}$ offenbar als bekannt voraus, denn er verlor kein Wort über $\sqrt{2}$, sondern ging gleich zu $\sqrt{3}$ und dann zu $\sqrt{5}$ bis $\sqrt{17}$ über⁴⁰). Es ist anzunehmen, daß Platon, der sich in diesem seinem verstorbenen Freunde Theaitetos zu Ehren geschriebenen Dialog an die Hervorhebung der Verdienste des Freundes sehr viel gelegen sein läßt, die Abgrenzung der mathematischen Lei-

³⁷) DIELS: Fragmente der Vorsokratiker, Epicharm A 2. Vgl. dazu vor allem ROSTAGNI, Il Verbo di Pitagora.

³⁸) Jamblichos in Nicomachi Arithm. Introd. 35 1–7.

³⁹) HEIBERG: Mathematisches zu Aristoteles, S. 24.

⁴⁰) Platon, Theaitetos 147 D.

stungen der dramatis personae gegeneinander wahrheitsgetreu dargestellt hat. Danach hat also Theodoros (der nach Diog. Laert., Jamblichos und Proklos in der 2. Hälfte des 5. Jahrhunderts, etwa gleichzeitig mit Hippokrates von Chios gewirkt hat) die Irrationalität der Quadratseiten $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ... $\sqrt{17}$ aufgezeigt, aber die von $\sqrt{2}$ war schon vor ihm bekannt.

Durch die Aufzählung der Lerngebiete; in die Theodoros den jungen Theaitetos unterrichtet haben soll: Geometrie, Astronomie, Harmonielehre und Rechenkunst⁴¹⁾ erweist sich Theodoros als Pythagoreer oder zumindest den Pythagoreern nahestehend. Auch Pappos⁴²⁾ bestätigt uns, daß die Theorie der irrationalen Größen in der pythagoreischen Schule ihren Anfang genommen hat (und dann von Theaitetos weiter ausgebaut wurde). Der Irrationalitätsbeweis für $\sqrt{2}$ muß also auch den Pythagoreern zugeschrieben werden, und zwar den vor Theodoros lebenden. So kommen wir von der anderen Seite auf dieselbe Zeit: *Um 450, jedenfalls aber vor 420 ist der Irrationalitätsbeweis für $\sqrt{2}$ auf Grund der pythagoreischen Lehre vom Geraden und Ungeraden geführt worden.*

⁴¹⁾ Platon, Theaitetos 145 C.

⁴²⁾ Pappos, Commentary on Book X of Euclids Elements ed. JUNGE-THOMSON, Cambridge 1930.

(Eingegangen am 7. Juli 1943.)

Die Arithmetik der Pythagoreer. II.

Die Theorie des Irrationalen.

Von

B. L. VAN DER WAERDEN in Leipzig.

Diese Arbeit ist die Frucht einer ausgiebigen Diskussion mit K. REIDEMEISTER. Dieser hatte in seiner „Arithmetik der Griechen“ (Leipzig 1940) die These aufgestellt, daß die Theorie der quadriert rationalen Strecken¹⁾, von der uns im Platonischen Dialog Theaitetos und in Euklid X Bruchstücke erhalten sind, die direkte Fortsetzung der Arithmetik der geometrischen Reihen der Bücher VIII und IX sei und daß diese Theorien ursprünglich ein Ganzes gebildet hätten. Demgegenüber glaube ich, zeigen zu können, daß die Theorie der quadriert rationalen Strecken am Anfang des X. Buches nicht nur mit dem Dialog Theaitetos, sondern auch mit dem Hauptteil des X. Buches eng verwandt ist, daß diese drei einen Geist atmen, auf dem gleichen hohen mathematischen Niveau stehen und eine einheitliche geometrisch-algebraische Methode benutzen, daß aber dieser Geist und diese Methode ganz verschieden sind von dem Geist und der Methode des VIII. Buches, dessen logische Mängel im I. Teil dieser Arbeit aufgezeigt wurden. Nur die Beweise der Sätze X 9 und X 10 sind dem Stile des Buches VIII verwandt, aber diese Beweise lassen sich als spätere Zusätze entlarven.

Trotzdem steckt, wie sich im Laufe der Diskussion herausgestellt hat, in REIDEMEISTERS These ein wahrer Kern. Es gab nämlich nicht nur *eine* Theorie der quadriert rationalen Strecken, sondern deren zwei, die mit ganz verschiedenen Methoden im wesentlichen zu denselben Ergebnissen führten. Die eine habe ich $A\rho$ genannt, weil sie an die Arithmetik des Archytas, die wir aus Boethius, Euklid VIII und der Sectio canonis kennen, anknüpft. Sie geht von der Frage nach der Existenz eines geometrischen Mittels zwischen Strecken oder Zahlen aus und hat ihre methodische Basis in der Arithmetik der geometrischen Reihen und der daran anknüpfenden Lehre von den ähnlichen ebenen und körperlichen Zahlen des Buches VIII. Dieser Theorie $A\rho$ entstammen die erwähnten Beweise der Sätze X 9–10. Aus der Epinomis sieht man, daß die pythagoreisierenden Platoniker sich für diese Arithmetik und Lehre vom Irrationalen sehr begeistert haben.

¹⁾ Eine Strecke heißt nach Euklid quadriert rational oder kurz rational ($\rho\eta\tau\omicron\varsigma$), wenn ihr Quadrat zum Einheitsquadrat kommensurabel ist.

Die zweite Theorie möchte ich $\Theta\varepsilon$ nennen, weil der Theaitetos des platonischen Dialoges, an seinen Lehrer Theodoros anknüpfend, die Grundbegriffe dieser Theorie erörtert und einen Lehrsatz aus ihr formuliert. Eine vollständigere Darstellung dieser Theorie $\Theta\varepsilon$ finden wir im Anfang des X. Buches. Sie arbeitet nicht mit dem Begriff des geometrischen Mittels, sondern mit der Quadrierung von Strecken und mit den Hilfsmitteln der geometrischen Algebra, die auch sonst im X. Buche dauernd verwendet werden. Sie benutzt nicht die Sätze des Buches VIII über geometrische Reihen von Zahlen, sondern sie greift direkt auf die grundlegenden Sätze über teilerfremde Zahlen des älteren Buches VII zurück.

Das Hauptergebnis der Theorie $\Theta\varepsilon$ ist mit dem der Theorie $A\rho$ identisch; es kann etwa so formuliert werden: *Zwei quadriert rationale Strecken a und b sind nur dann kommensurabel, wenn die teilerfremden Zahlen M und N , die das Verhältnis der Quadratflächen $a^2:b^2$ in kleinsten Termen ausdrücken, Quadratzahlen sind.* Entsprechendes gilt von zwei Strecken a und b , deren Kuben kommensurabel sind. Reduziert man das Verhältnis ihrer Rauminhalte auf kleinste Terme $M:N$, so müssen M und N Kubikzahlen sein, damit die Strecken a und b selbst kommensurabel sind.

Die Beweise beruhten in der Theorie $\Theta\varepsilon$ auf einer vor-Eudoxischen Proportionenlehre. Da Euklid (oder dessen Vorlage) die Darstellung auf der Eudoxischen Proportionenlehre aufbauen wollte, konnte er diese Beweise nicht gebrauchen und ersetzte sie durch andere, nicht ganz einwandfreie, die der Theorie $A\rho$ entlehnt waren.

Im folgenden sollen zunächst die Gedankengänge der Theorien $A\rho$ und $\Theta\varepsilon$ dargestellt werden. Sodann kommen wir auf die Frage der Urheberschaft. Die Theorie $A\rho$ ist, wie schon erwähnt, pythagoreisch: sie stammt von Archytas oder aus dessen Umgebung. Die Theorie $\Theta\varepsilon$ wird von Platon dem Theaitetos in den Mund gelegt, und es gibt gute Gründe dafür, daß er seinen Helden nicht mit fremden Federn schmücken wollte. Sie hängt auch methodisch und inhaltlich aufs engste mit der Theorie der höheren Irrationalitäten Mediale, Apotome und Binomiale zusammen, die Eudemos selbst dem Theaitetos zuschreibt.

Die Geschichte der „Wechselwegnahme“, die in der Theorie $\Theta\varepsilon$ zur Definition der Proportion benutzt wurde, läßt sich von ihren ersten Anfängen in der pythagoreischen Zahlentheorie (Buch VII Euklids) über das Irrationalitätskriterium X 2 bis zur Proportionenlehre verfolgen. Wir zeigen, eine Idee von ZEUTHEN weiter entwickelnd, daß Theodoros von Kyrene höchstwahrscheinlich dieses Kriterium X 2 zum Nachweis der Nichtmeßbarkeit der Quadratsseiten, welche Flächen von 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15 oder 17 Flächeneinheiten erzeugen, benutzt hat.

§ 1. Die Theorie A_9 .

Ob zwischen zwei Zahlen M und N eine oder mehrere mittlere Proportionale möglich sind, hängt nach VIII 8 nur von dem Verhältnis $M : N$ ab; man kann sich also auf den Fall beschränken, daß M und N teilerfremd sind. Nach VIII 9 gibt es zwischen zwei teilerfremden Zahlen M und N eine oder mehrere mittlere Proportionale nur dann, wenn zwischen 1 und M und auch zwischen 1 und N ebensoviele mittlere Proportionale möglich sind. Im Fall einer mittleren Proportionalen müssen demnach M und N Quadratzahlen, im Fall von zwei mittleren Proportionalen Kubikzahlen sein, und das genügt auch (VIII 11 und 12). Sind M und N nicht teilerfremd, so müssen sie ähnliche Rechteckzahlen bzw. ähnliche Körperzahlen sein, damit zwischen ihnen eine bzw. zwei mittlere Proportionale existieren (VIII 18–21).

Die Pythagoreer, die diese zahlentheoretischen Sätze aufstellten, wandten sie nun an auf die Musiktheorie, auf die Geometrie, auf die Kosmologie und überhaupt auf alle Bereiche des Seienden, wo immer sie Abbilder der Zahlen erblickten. Die musiktheoretische Anwendung haben wir in Teil I besprochen. Die um Archytas waren aber auch Geometer. Es liegt daher auf der Hand, daß sie sich auch überlegt haben, was herauskommt, wenn man die Zahlen M und N durch Strecken a und c geometrisch darstellt. Da zeigt sich nun etwas ganz Merkwürdiges und Aufregendes: Während zwischen zwei unähnlichen Zahlen M und N keine mittlere Proportionale möglich ist, existiert zwischen den Strecken a und c stets eine mittlere Proportionale: das „geometrische Mittel“ b , das den Pythagoreern durchaus geläufig war. Diese Strecke b nun läßt sich ersichtlich nicht durch eine Zahl darstellen, sie ist zu a inkommensurabel. Denn gesetzt, b wäre wie c zu a kommensurabel, dann würden die Strecken a, b, c sich wie Zahlen A, B, C verhalten: $a:b:c = A:B:C$, und die Zahl B wäre die mittlere Proportionale zwischen A und C . Aber nach den anfangs angeführten Sätzen ist zwischen den Zahlen A und C , die sich wie M zu N verhalten ($A:C = a:c = M:N$) keine mittlere Proportionale möglich.

Daß die Pythagoreer Überlegungen dieser Art wirklich angestellt haben, ist nicht nur von vornherein wahrscheinlich, sondern auch die Zeugnisse bestätigen es. So heißt es in der *Epinomis*, nachdem von den zahlentheoretischen Eigenschaften von geometrischen Reihen wie 1, 2, 4, 8 die Rede war: Die Geometrie aber lehrt, nicht ähnliche Zahlen doch ähnlich zu machen²⁾. Das bedeutet: Wenn auch die Zahlen M und N nicht ähnlich sind, so existiert zwischen den sie darstellenden Strecken a und c doch eine mittlere Proportionale, und die Geometrie lehrt uns, sie zu konstruieren. Die *Epinomis* kommt dann auf die „neue Kunst“ der Stereometrie und fährt fort: „Diese neue

²⁾ Plato, *Epinomis*. Siehe dazu TOEPLITZ, O.: Quellen u. Studien Gesch. Math. B 2, S. 338, sowie BECKER, O.: ebenda B 4, S. 191.

Kunst lehrt uns, solche Zahlen, die im räumlichen Sinne nicht ähnlich sind, doch ähnlich zu machen.“ Offenbar wird hier angespielt auf das berühmte Problem der Würfelverdopplung. Eine bekannte Konstruktion des Archytas lehrt, in jedem gegebenen Streckenverhältnis $a:d$ zwei ähnliche Würfel zu konstruieren, oder, was damit äquivalent ist, zwischen zwei gegebenen Strecken a und d zwei mittlere Proportionale zu konstruieren³⁾. Die einzelnen Beweisschritte des oben skizzierten Irrationalitätsbeweises und ihr Zusammenhang waren also den Pythagoreern und ihren Freunden in der Platonischen Akademie ganz geläufig, sowohl für eine als für zwei mittlere Proportionale.

Die beiden allgemeinen Sätze, die man mit dieser Methode beweisen kann, lauten:

1. Konstruiert man zu zwei Strecken a und c , deren Verhältnis in kleinsten Termen durch zwei Zahlen M und N ausgedrückt wird, die nicht beide Quadratzahlen sind, eine mittlere Proportionale b , so ist b zu a inkommensurabel.
2. Konstruiert man zu zwei Strecken a und d , deren Verhältnis in kleinsten Termen durch zwei Zahlen M und N ausgedrückt wird, die nicht beide Kubikzahlen sind, zwei mittlere Proportionale b und c , so sind diese zu a inkommensurabel.

Eine weitere Spur dieser Überlegungen finden wir bei Euklid im Beweis von X 9. Hier handelt es sich darum, zu beweisen, daß zwei Quadratflächen a^2 und b^2 sich wie Quadratzahlen zueinander verhalten, wenn ihre Seiten a und b kommensurabel sind, also ein Verhältnis haben wie eine Zahl zu einer Zahl: $a:b = A:B$. Dazu wird zunächst unter Berufung auf VI, 20 bemerkt, daß das Verhältnis der Quadrate $a^2:b^2$ das „verdoppelte Verhältnis“ $(a:b)^2$ ist, sodann unter Berufung auf VIII 11 („zwischen zwei Quadratzahlen gibt es eine mittlere Proportionalzahl, und die Quadratzahl steht zur Quadratzahl zweimal im Verhältnis wie die Seite zur Seite“), daß auch $A^2:B^2 = (A:B)^2$ ist, woraus dann die Behauptung $a^2:b^2 = A^2:B^2$ folgt.

Auch im Beweis von X 10 werden ähnliche ebene Zahlen und mittlere Proportionale zur Konstruktion von inkommensurablen Strecken benutzt. Beide Beweise passen, wie auch HEIBERG und HEATH bemerkt haben, sprachlich und sachlich schlecht in das X. Buch hinein: in der Tat werden wir in § 2 nachweisen, daß sie einen späteren Zusatz darstellen. Aus der Wendung ἐμάθομεν γάρ: „wir haben nämlich gelernt“ im Beweis von X 10, die sonst nur in der Sectio canonis vorkommt, könnte man vermuten, daß der Urheber dieses Beweises mit einem der Bearbeiter der Sectio identisch ist. Jedenfalls gehört er zu denen, die die pythagoreischen Lehren über ähnliche Zahlen und geometrische Mittel gelehrt und angewandt haben. In der Platonischen Akademie galten diese Lehren sehr viel, wie die Anspielungen auf sie im Timaios und in der

³⁾ Eudemos bei Eutokios, oder DIELS: Fragmente der Vorsokratiker, Archytas A 14.

Epinomis beweisen. Sie gehörten offenbar zu den regelmäßigen Lerngegenständen für die Adepten der Akademie, wie denn auch in der Epinomis verlangt wird, daß die Hüter des Staates sich diese Mathemata aneignen sollen.

Es ist klar, daß der Urheber der Theorie $A\rho$ in dem Kreis um Archytas zu suchen ist. Archytas ist ja auch an der Musiktheorie der *Sectio canonis* und an der Arithmetik des Buches VIII stark beteiligt; er hat die Lehre von den drei Mitteln dargestellt und auf die Musiktheorie angewandt; er hat in seiner „Würfelverdopplung“ die Konstruktion von zwei mittleren Proportionalen behandelt und dabei die Konstruktion einer mittleren Proportionalen zweimal angewandt; er hat schließlich die Nichtexistenz einer mittleren Proportionalen zwischen zwei Zahlen im überteiligen Verhältnis $(n + 1) : n$ bewiesen⁴⁾. Die ganze Theorie $A\rho$ verläuft somit in den Gedankengängen des Archytas. In der Epinomis wird der Grundgedanke dieser Theorie geradezu in den Zusammenhang der Lehren des Archytas hineingestellt.

Ob Archytas selbst oder einer der Pythagoreer seines Freundeskreises die Theorie $A\rho$ ausgearbeitet hat, ist historisch gleichgültig; ich halte es aber für das Wahrscheinlichste, daß er es selbst war.

Bevor wir die Theorie $A\rho$ verlassen, möge noch eine Bemerkung über den allgemeinen Charakter dieser Art Mathematik Platz finden.

Wenn in Platonischen Schriften von ähnlichen Zahlen und verwandten Gegenständen die Rede ist, so fällt einem jeden der feierliche Ton der Darstellung auf. In der Epinomis werden alle diese Lehren immerfort „göttlich“ und „wunderbar“ genannt. Statt nüchterner, klarer Formulierungen hören wir dunkle Andeutungen in einer erhabenen Sprache. Es ist so, als ob man diese Lehren nicht einfach lernt, sondern in sie eingeweiht wird und durch diese Einweihung sich dem Göttlichen nähert. Jedes Wort hat nicht nur seine exakt-mathematische, sondern daneben auch noch eine metaphysische Bedeutung. Ebenso ist es im Timaios, wo das arithmetische und das harmonische Mittel zur Konstruktion der Seelentonleiter verwandt werden und der Satz über die Existenz von zwei mittleren Proportionalen zwischen zwei Kubikzahlen zur Begründung dient, warum der Schöpfer zwischen Erde und Feuer zwei weitere Elemente einschaltete. Hier befinden wir uns nicht in der Sphäre des nüchtern unterscheidenden Verstandes, sondern bewegen uns in halbdunklen Ahnungen, wie wohl der Schöpfer aus Zahlen die Dinge erschuf.

Dieser metaphysische Einschlag ist unzweifelhaft pythagoreisch. Denn nach Aristoteles folgte Platons Spekulation in den meisten Stücken den Pythagoreern. Auch sie lehrten schon, daß das Seiende durch Nachahmung der Zahlen sei, und die Prinzipien der Zahlen waren ihnen die Prinzipien aller Dinge.

⁴⁾ Siehe den ersten Teil dieser Arbeit, sowie meinen Aufsatz über die Musiktheorie in *Hermes* 78 (1943).

Nicht umsonst leiht Plato im Timaios einem Pythagoreer das Wort! Auch der Begriff der Einweihung war pythagoreisch (vgl. die Fragmente des Empedokles), und durch Kenntnis der mystischen Eigenschaften der Zahlen hofften schon die ältesten Pythagoreer dem Kreislauf der Wiedergeburten zu entgehen und mit dem Göttlichen eins zu werden.

Eines der Wesensmerkmale dieser Art des Denkens ist, daß zwischen Verschiedenem nicht klar unterschieden wird. Man sagt 3 und meint die Gerechtigkeit, oder man sagt $\acute{\epsilon}\pi\acute{o}\gamma\delta\omega\nu$ (d. h. 9:8) und meint das Ganztonintervall. Die ersten drei Lehrsätze in der Sectio canonis sind rein zahlentheoretisch, aber in der Formulierung ist nicht von Zahlenverhältnissen, sondern von Intervallen die Rede. Für die Pythagoreer „sind“ die Intervalle ja Zahlenverhältnisse, ebenso wie die Gerechtigkeit die Zahl 3 „ist“.

Dieser Mangel an klarer Unterscheidung führt ganz von selbst auch innerhalb der Mathematik zu Unklarheiten und Trugschlüssen. So liegt, wie auch REIDEMEISTER ausgeführt hat, in dem Begriff der ähnlichen Zahlen eine Unklarheit, die zu einem Fehlschluß geführt hat (vgl. Teil I dieser Arbeit). In der Musiktheorie der Sectio canonis steckt, wie wir gesehen haben, ein ganz wesentlicher Trugschluß, der auf der Nichtunterscheidung einer Aussage von ihrer Umkehrung beruht.

So sehen wir, daß die Theorie $A\rho$, die Zahlentheorie des Buches VIII und die ihr verwandte Musiktheorie der Sectio in derselben Sphäre mystischen Halbdunkels erwachsen sind, in der auch die pythagoreische Metaphysik zu Hause ist. In der ursprünglichen pythagoreischen Lehre war dieser Charakter sicherlich noch ausgeprägter als in der mehrfach überarbeiteten Darstellung Euklids.

Plato aber ist nicht nur in diesen dunklen Ahnungen zu Hause: er kennt auch die andere Sphäre des klaren, durchdringenden Verstandes. In den Meisterdialogen Theaitetos und Sophistes führt er uns in diese Sphäre ein: Wir sehen den an der Mathematik geschulten Verstand am Werk, wie er im dialektischen Verfahren die Schleier des Truges und der Scheinwahrheit zerreißt, damit die ahnende Seele die Wahrheit erblicken kann. Folgen wir ihm in die Sphäre des Lichtes und der Klarheit!

§ 2. Die Theorie $\Theta\epsilon$.

Welche mathematische Theorie trägt der Jüngling Theaitetos im gleichnamigen Platonischen Dialog als Ergebnis seiner eigenen, gemeinsam mit dem jungen Sokrates angestellten Überlegungen vor?

Wie er berichtet, hatte Theodoros von Kyrene gezeigt, daß die Seiten der Quadrate von 3, 5, . . . , 17 Quadratfuß Flächeninhalt der Länge nach nicht kommensurabel sind mit der Einheitsstrecke von einem Fuß. Die jungen Leute hatten sich nun, da es doch unendlich viele solche Quadratseiten gibt,

überlegt, ob man sie nicht alle unter einem allgemeinen Begriff zusammenfassen könnte. Das Ergebnis dieser Überlegung wird in den folgenden Sätzen mitgeteilt:

(147 E) ΘΕΑΙ. Τὸν ἀριθμὸν πάντα
δίχα διελάζομεν· τὸν μὲν δυνάμενον
ἴσον ἰσάχῃς γίγνεσθαι τῷ τετραγώνῳ
τὸ σχῆμα ἀπεικάσαντες τετράγωνόν
τε καὶ ἰσόπλευρον προσείπομεν.

(148 A) ΘΕΑΙ. "Ὅσαι μὲν γραμμαὶ
τὸν ἰσόπλευρον καὶ ἐπίπεδον ἀριθμὸν
τετραγωνίζουσι, μῆκος ὠρισάμεθα,
ὅσαι δὲ τὸν ἑτερομήκη, δυνάμεις, ὡς
μῆκει μὲν οὐ συμμέτρους ἐκείναις,
τοῖς δ' ἐπιπέδοις ἃ δύνανται. Καὶ
περὶ τὰ στερεὰ ἄλλα τοιοῦτον.

Theait.: Alle Zahlen teilten wir in
zwei Arten. Die Produkte aus zwei
gleichen Faktoren nannten wir, sie mit
der Quadratfigur vergleichend, qua-
dratisch oder auch gleichseitig....

Theait.: Solche Strecken, die beim
Quadrieren eine gleichseitige ebene Zahl
hervorbringen, bestimmten wir als
Länge (μῆκος); solche dagegen die eine
ungleichseitige Zahl hervorbringen,
nannten wir *Quadratseiten* (δυνάμεις),
als der Länge nach nicht mit jenen
kommensurabel (μῆκει οὐ σύμμετρος),
wohl aber der Flächen nach, die sie
erzeugen. Und ebenso bei den Raum-
inhalten.

Sokr.: Ganz ausgezeichnet, ihr
Knaben!

Um die Überlegungen des Theaitetos richtig zu würdigen, ist es unbedingt nötig, jeden Gedanken an irrationale Zahlen auszuschließen. Aus diesem Grunde bezeichnen wir die Quadratseiten diesmal nicht mit $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, ..., sondern mit ω_1 , ω_2 , Es sei also ω_n die Seite des Quadrates mit Flächeninhalt n . Dann heißt der Satz, den Theaitetos im letzten Absatz ausspricht:

Satz Q. Ist n keine Quadratzahl, so ist ω_n zu ω_1 linear inkommensurabel.

Da nun Theaitetos selbst über seine Leistung durchaus zufrieden war und der Geometer Theodoros ebenso, so müssen wir annehmen, daß er diesen Lehrsatz nicht nur aufgestellt, sondern auch bewiesen hat.

Der Beweis zerfällt notwendigerweise in einen geometrischen und einen arithmetischen Teil. Zunächst hat man zu zeigen: Wenn die Quadratseite ω_n zu ω_1 kommensurabel ist, so verhalten sich die Quadratflächen wie zwei Quadratzahlen $p^2 : q^2$, also ist dann $p^2 = n \cdot q^2$. Der arithmetische Teil besteht dann in dem Nachweis, daß $p^2 = n \cdot q^2$ nur möglich ist, wenn n eine Quadratzahl ist.

ZEUTHEN hat die eigentliche Leistung des Theaitetos in dem arithmetischen Nachweis erblicken wollen. Mir scheint aber der geometrische Teil genau so wichtig, und das Wichtigste die logische Klärung des ganzen Sachverhaltes:

die Aufstellung der grundlegenden Begriffe wie linear kommensurabel und quadriert kommensurabel, auf die auch Plato ersichtlich den größten Wert legt, die Formulierung des Hauptsatzes und die Zerlegung des Beweises in einen arithmetischen und einen geometrischen Teil.

Der arithmetische Nachweis, daß $p^2 = n \cdot q^2$ nur möglich ist, wenn n eine Quadratzahl ist, kann nach REIDEMEISTER⁵⁾ auf Grund der Sätze des Buches VIII der Elemente geführt werden. Es scheint mir aber wichtig, daß die Behauptung auch unmittelbar aus dem älteren Buch VII gefolgert werden kann. Ist nämlich $p^2 = n \cdot q^2$, so ist p^2 durch q^2 teilbar. Nun kann man p und q als teilerfremd annehmen, da man ja sonst in der Gleichung $p^2 = nq^2$ die gemeinsamen Faktoren gegenseitig wegkürzen könnte. Dann ist nach VII 27 auch p^2 zu q^2 teilerfremd, und da p^2 durch q^2 teilbar war, so muß $q^2 = 1$, also $n = p^2$ sein.

Der geometrische Satz, den Theaitetos, wie wir sahen, zu seinem Beweis notwendig brauchte, heißt: *Wenn die Seiten zweier Quadrate kommensurabel sind, so haben die Quadratflächen ein Verhältnis wie eine Quadratzahl zu einer Quadratzahl.*

Genau diese Aussage und ihre Umkehrung bilden aber den Inhalt des Satzes Euklid X 9, und in der Tat schreibt ein Scholion zu Euklid diesen Satz dem Theaitetos zu. Man hat das Scholion für verdächtig gehalten, weil es aus der betreffenden Stelle des Dialoges Theaitetos entstanden sein könnte. Ich glaube das nicht; denn solche Scholien beruhen meistens auf Überlieferung, nicht auf verzwickten Schlüssen aus platonischen Dialogen; aber selbst wenn es so wäre, so würde die Zuschreibung des Satzes an Theaitetos zu Recht bestehen. Der Scholiast hätte dann eben denselben Schluß aus dem Dialog gezogen wie wir.

Jedoch wollen wir die Personenfrage zunächst außer Betracht lassen. Wichtiger ist die gewonnene Erkenntnis, daß der Satz X 9 in den Zusammenhang der im Dialog entwickelten Theorie $\Theta\epsilon$ hineingehört.

Als weitere Bestätigung des Zusammenhanges zwischen dem Dialog und dem Anfang des X. Buches betrachte ich die Tatsache, daß die Begriffe „linear kommensurabel“ ($\mu\acute{\eta}\chi\epsilon\iota\ \sigma\acute{\upsilon}\mu\mu\epsilon\tau\rho\omicron\varsigma$) und „quadriert kommensurabel“ ($\delta\upsilon\nu\acute{\alpha}\mu\epsilon\iota\ \sigma\acute{\upsilon}\mu\mu\epsilon\tau\rho\omicron\varsigma$) in beiden mit fast gleichen Bezeichnungen vorkommen und für beide grundlegend sind.

Der Theaitetos des Dialoges deutet an, daß analoge Begriffe und Sätze sich für Raumkörper entwickeln lassen. Der zu X 9 analoge Satz für Raumkörper würde heißen:

Satz R. Wenn die Seiten zweier Würfel kommensurabel sind, so haben die Rauminhalte ein Verhältnis wie eine Kubikzahl zu einer Kubikzahl.

⁵⁾ REIDEMEISTER, K.: Die Arithmetik der Griechen, S. 27, Leipzig 1940.
Mathematische Annalen. 120.

X 9 und Satz R bilden das zweite und dritte Glied einer Reihe von Sätzen, deren erstes Glied besagen würde, daß kommensurable Strecken ein Verhältnis haben wie eine Zahl zu einer Zahl. Diesen Satz nun finden wir, etwas allgemeiner formuliert, bei Euklid wieder als

X 5. *Kommensurable Größen haben zueinander ein Verhältnis wie eine Zahl zu einer Zahl.*

Die Umkehrung bietet X 6.

Wie man sieht, fügen sich die Mosaiksteine aus dem „Theaitetos“ und Euklid X sehr schön zu einer Theorie der Rhetai (so heißen bei Euklid die Strecken, deren Quadrate rational sind) zusammen.

Daß es eine solche Theorie als selbständiges Ganzes einmal gegeben haben muß, dafür spricht auch die Terminologie Euklids. Rhetos heißt nämlich *aussprechbar*: die Rhetai können benannt werden durch Angabe der Flächeninhalte der von ihnen erzeugten Quadrate. Alle übrigen Strecken heißen bei Euklid $\alpha\lambda\omicron\gamma\omicron\varsigma$, irrational. Im weiteren Verlauf des X. Buches werden aber außer den Rhetai noch weitere Strecken „benannt“ und somit aussprechbar gemacht: so die Binomiale, „die mit zwei Namen“, die Summe zweier Rhetai. Der Wortgebrauch $\rho\eta\tau\omicron\varsigma - \alpha\lambda\omicron\gamma\omicron\varsigma$ muß, so meinte Herr REIDEMEISTER, wohl aus einer Zeit stammen, da man nur die Rhetai zu benennen und behandeln gelernt hatte.

Die grundlegenden Begriffe „linear kommensurabel“ und „quadriert kommensurabel“ beziehen sich auf Streckenpaare, nicht auf einzelne Strecken. Im Dialog wie im X. Buch wird weiter eine Längeneinheit ausgezeichnet: im X. Buch heißt sie „die Rationale“ ($\eta\ \rho\eta\tau\eta$), im Dialog populär „die von einem Fuß“. Strecken, die mit der Längeneinheit linear oder nur quadriert kommensurabel sind, heißen bei Euklid alle zusammen Rhetai, während sie bei Platon in $\mu\eta\chi\omicron\varsigma$ und $\delta\upsilon\lambda\alpha\mu\iota\varsigma$ unterschieden werden. Diese leicht mißverständlichen Ausdrücke kommen bei Euklid nicht vor, aber ihre Verwandtschaft mit den grundlegenden Bezeichnungen $\mu\eta\chi\epsilon\iota\ \sigma\acute{\upsilon}\mu\mu\epsilon\tau\rho\omicron\varsigma$ und $\delta\upsilon\lambda\alpha\mu\epsilon\iota\ \sigma\acute{\upsilon}\mu\mu\epsilon\tau\rho\omicron\varsigma$ liegt auf der Hand. In der folgenden Übersichtstafel sind die Grundbegriffe der Theorie $\Theta\epsilon$ mit ihren Platonischen und Euklidischen Bezeichnungen noch einmal zusammengestellt.

Auch hier zeigt sich wieder, wie eng der Dialog und der Anfang des X. Buches zusammengehören. Beiden ist das Grundprinzip gemeinsam: *Nicht direkt meßbare Strecken werden benannt und untersucht durch Bildung der Quadrate, die sie erzeugen.* Dieses Grundprinzip zieht sich übrigens durch das ganze Buch X: es bildet den roten Faden, an dem man sich am leichtesten durch das Gewirr dieser schwierigen Untersuchungen hindurchfindet.

Durch diese Beweismethode, nicht durch die Ergebnisse, unterscheidet sich die Theorie $\Theta\epsilon$ von der früher besprochenen Theorie $A\rho$. In $A\rho$ ist die Exi-

stanz oder Nichtexistenz eines geometrischen Mittels das entscheidende Beweismittel, in $\Theta\epsilon$ dagegen ist nie vom geometrischen Mittel die Rede, sondern die Eigenschaften der Strecken werden durch die über sie errichteten Quadrate bewiesen.

	Platon	Euklid
kommensurabel linear kommensurabel quadriert kommensurabel inkommensurabel	σύμμετρος μήκει σύμμετρος umschrieben οὐ σύμμετρος	σύμμετρος μήκει σύμμετρος δυνάμει σύμμετρος ἄσύμμετρος
Die Längeneinheit meßbar (i. B. a. die Längeneinheit) nur quadriert meßbar rational (= quadriert meßbar) irrational (= nicht quadriert meßbar)	ἡ ποδιαία μήκος δύναμις	ἡ ῥητή ῥητός ἄλογος

Natürlich wußten die Urheber beider Theorien ganz genau, daß eine Übersetzung von der einen Sprache in die andere jederzeit möglich ist. Statt daß man das Rechteck ac in ein flächengleiches Quadrat b^2 verwandelt oder umgekehrt, wie das im X. Buch dauernd geschieht, kann man auch b als geometrisches Mittel zwischen a und c bestimmen, daher auch im X. Buch eine solche Quadratseite b , wenn a und c Rhetai sind, als „Mediale“ (μέση) bezeichnet wird; aber nichtsdestoweniger verlaufen die Gedankengänge in der Theorie $\Theta\epsilon$ ganz anders als in Ap. Der Lehrsatz X 9 z. B., der zentrale Satz der Theorie $\Theta\epsilon$, spielt in Ap überhaupt keine Rolle. Wohl kann man ihn natürlich, wenn man will, mit den Hilfsmitteln der Theorie Ap beweisen, und einen solchen Beweis bringt auch der Euklidtext, aber dieser Beweis ist eine spätere Zutat.

Um das zu zeigen und den Bestand der Theorie $\Theta\epsilon$ genauer zu bestimmen, müssen wir zunächst etwas näher auf die Struktur des X. Buches eingehen.

Die Sätze X 29–35 bilden die Grundlage der Konstruktion der 12 Irrationalitäten, deren Eigenschaften in den darauffolgenden X 36–111 untersucht werden. X 29–111 bilden also ein Ganzes, das ich den „Hauptteil“ des Buches X nennen will.

X 27–28b mögen als unecht oder zumindest verdächtig außer Betracht bleiben.

X 21–26: Lehre von den Medialen. Der straffe Stil und die Beweismethoden sind dieselben wie im Hauptteil. Die medialen Flächen bilden überdies ein unentbehrliches Hilfsmittel bei den Untersuchungen des Hauptteiles. Auch

gehören die medialen Strecken nicht zu den Rhetai; also gehören X 21–26 zum Hauptteil.

X 19–20 handeln zwar von rationalen Strecken und Rechtecken, sind aber in Formulierung und Beweis vollkommen analog zu ihren logischen Komplementen X 21–22. Also gehören auch sie zum Hauptteil.

X 17–18 enthalten die Bedingungen dafür, daß die Wurzeln einer elliptischen Gleichung $x^2 + b^2 = ax$ zueinander und zu a kommensurabel sind. Diese beiden Sätze sind offensichtlich dazu geschaffen, um im Hauptteil an entscheidender Stelle (X 54 ff.) angewandt zu werden. Wären sie ursprünglich Selbstzweck gewesen, warum dann die Beschränkung auf die elliptische Flächenanpassung?

X 15–16 sind Hilfssätze für die Irrationalitätsbeweise, insbesondere der Binomiale und Apotome.

X 14 hat nur Sinn als Hilfssatz zu X 103–107.

Andem straffen logischen Gefüge von X 14–111 ist demnach nicht zu rütteln. Es bleiben nun folgende Stücke übrig:

X 1–4: Wechselwegnahme und kleinstes gem. Maß;

X 5–6: Kommensurable Größen verhalten sich wie Zahlen und umgekehrt;

X 9: Quadrate über kommensurable Strecken verhalten sich wie Quadratzahlen und umgekehrt;

X 10: Existenzbeweis inkommensurabler und quadriert inkommensurabler Strecken;

X 11–13: Drei Sätzchen über kommensurable und inkommensurable Größen, einfache Folgerungen aus X 5–6.

Dies wäre also die Lehre von den Rhetai, soweit sie sich bei Euklid erhalten hat. Dazu kommt noch Satz Q aus dem Dialog, sowie Satz R, auf den im Dialog ganz kurz hingewiesen wird. X 5–6, X 9 und R sind drei sich entsprechende Sätze für die Gerade, die Ebene und den Raum, und Q ist eine hübsche Anwendung von X 9, gleichzeitig ein Existenzbeweis für nur quadriert rationale Strecken.

Leider ist das eben herauspräparierte Anfangsstück des X. Buches durchaus keine Einheit: es zerbröckelt in den Händen. Denn:

X 1–4 haben keine Beziehung zum folgenden;

X 10 war schon HEIBERG und HEATH als unecht verdächtig. Im Beweis wird X 11 benutzt. Nach REIDEMEISTER deutet das auf eine nicht ganz geglückte Zusammenstückelung aus älterem Gut. Genauer können wir sagen: Die falsche Reihenfolge von X 10 und X 11 deutet darauf hin, daß entweder X 10 und X 11 aus verschiedenen Quellen stammen und bei der Zusammenstellung falsch angeordnet sind, oder daß der Beweis von X 10 von einem späteren Redaktor neu gefaßt und dabei verdorben worden ist. In beiden Fällen folgt, daß der Beweis von X 10 aus anderer Quelle stammt als X 11–13.

Aber auch der Beweis von X 9 ist unzureichend, denn es wird aus der Gleichheit der verdoppelten Verhältnisse $(a : b)^2 = (A : B)^2$ auf die Gleichheit der ursprünglichen Verhältnisse $a : b = A : B$ geschlossen, ein Schluß, der für den Musiktheoretiker, der die Verhältnisse als Intervalle zu deuten gewohnt ist, nahe liegt, nicht aber für den Geometer.

Die mangelhafte Logik des Beweises von X 9 ist zu der von X 10 ähnlich. In beiden Beweisen werden ähnliche Zahlen und geometrische Mittel benutzt, Beweismittel, die dem X. Buche sonst fremd sind. Beide weisen auf die pythagoreische Musiktheorie hin: der eine durch den Schluß von den verdoppelten Intervallen, der andere durch die Wendung *ἐμάθομεν γάρ*, der sonst nur in der Sectio canonis vorkommt. Wir können also annehmen, daß beide Beweise aus derselben Quelle stammen.

Der Satz X 9 selbst stammt nicht aus dieser trüben Quelle, denn er bildet, wie wir gesehen haben, einen Kernsatz der Theorie $\Theta\epsilon$. Er rührt wie die ganze Theorie von jenem klaren Denker her, der zum ersten Male die Begriffe rational und irrational, kommensurabel und quadriert kommensurabel exakt gefaßt und die grundlegenden Sätze darüber bewiesen hat. Der Beweis, wie er bei Euklid steht, muß später eingefügt worden sein. Der ursprüngliche Beweis hat offenbar nicht in Euklids System hineingepaßt, und Euklid (oder seine Vorlage) hat ihn durch einen anderen, aus dem Gedankenkreise der Theorie $\Lambda\rho$ stammenden, ersetzt. Wollen wir die ursprüngliche Gestalt der Theorie $\Theta\epsilon$ wieder herstellen, so müssen wir die Beweise von X 9–10 tilgen. Ob der ganze Satz X 10 getilgt werden muß, ist mir nicht klar. Irgend ein Existenzsatz für nicht meßbare und für nicht quadriert meßbare Strecken muß doch wohl zur Theorie $\Theta\epsilon$ gehört haben, aber wie er gelautet hat und was mit ihm geschehen ist, als ein Teil der Theorie $\Theta\epsilon$ mit dem Hauptteil des X. Buches zu einem Werk vereinigt wurde, das wissen wir nicht.

§ 3. Der Begriff des Verhältnisses in der Theorie $\Theta\epsilon$.

Die Wechselwegnahme.

In den wichtigsten Sätzen der Theorie $\Theta\epsilon$ ist von Verhältnissen die Rede, und zwar nicht nur von Verhältnissen kommensurabler Größen, sondern auch von irrationalen Verhältnissen (vgl. besonders X 11: Stehen vier Größen in Proportion und ist die erste der zweiten inkommensurabel, so auch die dritte der vierten). Es muß also der Theorie eine Definition der Proportion zugrunde gelegen haben, die nicht nur auf kommensurable Größen anwendbar ist. Welche?

Auf diese Frage scheint mir nur eine Antwort möglich zu sein. Die Definition 20 des Buches VII ist nur auf meßbare Verhältnisse anwendbar. Die Eudoxische Definition der Proportion aber, auf der Euklid V–VI aufgebaut

ist, kann der Urheber der Theorie $\Theta\epsilon$ noch nicht gekannt haben. Eudoxos blühte 368, und das Gespräch zwischen Theaitetos und Theodoros soll nach Platon vor Sokrates Tode (399) stattgefunden haben. Außerdem: Wenn die Eudoxische Definition schon der ursprünglichen Darstellung der Theorie $\Theta\epsilon$ zugrunde gelegen hätte, so wäre für den Redaktor des Buches X gar kein Grund vorhanden, die ursprünglichen Beweise der Sätze X 9–10 zu verwerfen. Er hat sie offenbar deswegen durch neue ersetzt, weil sie in den Rahmen des Euklidischen Werkes nicht paßten, eben weil sie auf einer anderen Definition der Proportion beruhten.

Auch eine Stelle der zweiten Analytik des Aristoteles (I 5, p. 74a, 17–25) deutet darauf hin, daß es vor der Eudoxischen Proportionslehre noch eine ältere gegeben hat, in der die Beweise für Zahlen, Strecken, Körper und Zeiten getrennt geführt wurden.

Mir ist nur eine Definition der Proportion bekannt, die hier in Betracht kommt, nämlich die folgende: Zwei Größen haben dasselbe Verhältnis wie zwei andere, wenn sie dieselbe „Wechselwegnahme“ haben, d. h. wenn das wechselseitige Wegnehmen der kleineren Größe von der größeren, wie es beim Euklidischen Algorithmus gemacht wird, bei den ersten beiden Größen zu derselben Quotientenreihe führt wie bei den anderen beiden. ZEUTHEN⁶⁾, DYKSTERHUIS⁷⁾ und BECKER⁸⁾ haben diese Definition der Proportion aus einer Aristotelesstelle⁹⁾ und der Erläuterung dazu bei Alexander von Aphrodisias herauspräpariert, und ihre Beweisführung scheint mir vollkommen überzeugend. Wir sehen jetzt aber, daß man sogar ohne die Aristotelesstelle unter ausschließlicher Berufung auf Euklid zu dem zwingenden Schluß kommen kann, daß Alexander recht hatte, wie er schrieb: „Es ist aber die Definition der Proportionalen, deren sich die Alten bedienten, folgende: In Proportion stehen Größen zueinander, denen dieselbe Wechselwegnahme (Anthyphairesis oder nach Aristoteles Antanairesis) zukommt.“

Diese Definition muß, wie wir jetzt sehen, auch der Theorie $\Theta\epsilon$ zugrunde gelegen haben; denn welche käme sonst in Betracht? Und in der Tat findet man einen Hinweis auf die Wechselwegnahme genau dort, wo man sie nach unserer Auffassung erwarten würde, nämlich am Anfang des X. Buches! Zwar

⁶⁾ ZEUTHEN, H. G.: Danske Vidensk. Selsk. Skrifter, nat.-math. Aft. (8) I. 5, 108 (306) ff. (1917).

⁷⁾ DYKSTERHUIS, E. J.: De Elementen van Euclides I, S. 71 (Groningen 1929).

⁸⁾ BECKER, O.: Quellen u. Studien Gesch. Math. 2, 311 (1933).

⁹⁾ Aristoteles, Topik. Θ 3, p. 158b 29–35: „Es scheint aber auch in der Mathematik einiges wegen des Fehlens einer Definition nicht leicht zu beweisen sein, wie z. B. daß die ein Parallelogramm parallel zur Seite schneidende Gerade die Linie und die Fläche in demselben Verhältnis teilt; wenn aber die Definition ausgesprochen ist, ist das Gesagte sogleich einleuchtend. Denn dieselbe Wechselwegnahme (Antanairesis) haben die Flächen und die Linien. Dies ist aber die Definition der Verhältnissgleichheit.“

wird dort der endliche oder unendliche Prozeß der Wechselwegnahme nicht zur Definition der Verhältnisgleichheit verwendet – das ging nicht, weil Euklid ja seinem System die Definition des Eudoxos zugrunde gelegt hatte – sondern als Kriterium, ob zwei Größen kommensurabel sind oder nicht, und als Methode, das größte gemeinsame Maß zweier kommensurabler Größen zu bestimmen.

Es leuchtet ein, daß diese Methode letzten Endes aus der Zahlentheorie stammt. Das ursprüngliche Problem, das sich in der Bruchrechnung ganz von selbst bietet, auch wenn man noch nichts von irrationalen Streckenverhältnissen ahnt, ist: Wie bestimme ich den größten gemeinsamen Teiler zweier Zahlen? Die Lösung dieses Problems liefert das Verfahren der Wechselwegnahme der „Euklidische Algorithmus“, auf dem sich die Zahlentheorie des Buches VII aufbaut. Die Entdeckung dieses Verfahrens für Zahlen ist die *erste Stufe* in der Geschichte der Wechselwegnahme.

Die *zweite Stufe* besteht in der mechanischen Übertragung von den Zahlen auf andere Größen. Dieselbe Wechselwegnahme, die bei zwei Zahlen auf den größten gemeinsamen Teiler führt, ergibt zu zwei Strecken das größte gemeinsame Maß, falls es ein solches gibt (X 3). Auch auf musikalische Intervalle kann das Verfahren übertragen werden. Geht man etwa, wie es in einem vielbesprochenen Philolaosfragment¹⁰⁾ geschieht, von der Oktave und der Quinte aus, so ist ihre Differenz die Quarte, die Differenz von Quinte und Quarte aber der Ganzton. Dieser kann zweimal von der Quarte abgezogen werden; als Rest bleibt der kleinere Halbton übrig. Zieht man diesen von dem Ganzton ab, so erhält man den größeren Halbton, und die Differenz des großen und kleinen Halbtones ist das Komma. Weiter wird das Verfahren im Philolaosfragment nicht fortgesetzt; was dann noch folgt, ist mathematisch wie musikalisch sinnlos.

Dritte Stufe. Der zunächst mechanischen Übertragung des zahlentheoretischen Verfahrens der Wechselwegnahme auf die Geometrie mußte, nachdem man auf das Phänomen des Irrationalen gestoßen war, die Überlegung folgen: Zu was führt das Verfahren, wenn kein gemeinsames Maß existiert? Die Antwort war nicht schwer zu finden: Dann nimmt die Wechselwegnahme nie ein Ende. Zum Beispiel kann man die Seite eines Quadrates einmal auf die Diagonale übertragen, den Rest zweimal auf die Seite, den dann übrigbleibenden Rest wieder zweimal auf

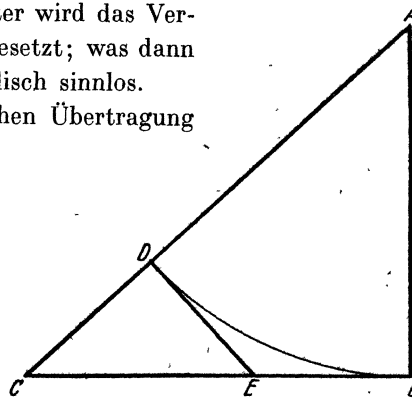


Fig. 1.

¹⁰⁾ DIELS: Fragmente der Vorsokratiker, Philolaos.

den ersten Rest, usw. Jeweils nach zwei Schritten wiederholt sich das Restverhältnis. Trägt man nämlich (Fig. 1) die Seite AB auf die Diagonale AC ab, so bleibt CD übrig. Errichtet man nun in D das Lot DE , so wird $CD = DE = EB$. Zieht man nun $BE = CD$ von $BC = AB$ zunächst einmal ab, so bleibt CE als Rest, und das Verhältnis $CD:CE$ ist gleich dem ursprünglichen Verhältnis $AB:AC$. Also wiederholt sich das Verfahren ohne Ende¹¹⁾.

Haben dagegen zwei Strecken ein gemeinsames Maß, so führt das Verfahren der Wechselwegnahme auf immer kleinere Vielfache dieses Maßes, muß also einmal abbrechen. Daraus folgt das

Irrationalitätskriterium X 2. Mißt, wenn man unter zwei ungleichen Größen abwechselnd immer die kleinere von der größeren wegnimmt, der Rest niemals genau die vorangehende Größe, so müssen die Größen inkommensurabel sein.

Dieses Kriterium wird bei Euklid niemals angewandt. Die Tatsache, daß es in den Euklidtext hineingeraten ist, deutet darauf hin, daß es einmal in einer Theorie des Irrationalen eine größere Rolle gespielt hat. In der Tat werden wir später wahrscheinlich machen, daß Theodoros von Kyrene mit Hilfe dieses Kriteriums die Nichtmeßbarkeit der Quadratseiten $\omega_3, \omega_5, \dots, \omega_{17}$ nachgewiesen hat.

Vierte Stufe. Durch die Quotientenzahlen $q_1, q_2, \dots$, die angeben, wie oft die kleinere von zwei Größen sich von der größeren und der Rest von der kleineren (usw.) abziehen läßt, wird das Verhältnis der beiden Größen immer genauer bestimmt (vgl. das in Fußnote 11 behandelte Beispiel der Seiten- und

¹¹⁾ Herr REIDEMEISTER macht mich freundlichst aufmerksam, daß die Seiten- und Diagonalzahlen bei Theon von Smyrna (ed. HILLER, S. 43–44), auf die auch Platon im Staat (546 C) anspielt, mit der eben geschilderten Wechselwegnahme sachlich unmittelbar zusammenhängen. Setzt man in Fig. 1 nämlich $AB = x$ und $AC = y$, ebenso $CD = x'$ und $CE = y'$, so ist

$$\begin{aligned} x &= x' + y' \\ y &= x' + x = 2x' + y'. \end{aligned}$$

Setzt man nun für x' und y' zwei Zahlenwerte ein, deren Verhältnis das Verhältnis der Quadratseite zur Diagonale annähert, so erhält man in $x:y$ eine verbesserte Näherung. Von 1:1 als erster Näherung ausgehend, erhält man als nächste 2:3, dann die von Platon erwähnte Näherung 5:7, dann 12:17, usw. wie bei Theon.

Man erhält dieselben Zahlen offenbar auch, wenn man die Wechselwegnahme nach n Schritten abbricht und den Rest vernachlässigt. Denn diese Vernachlässigung bedeutet gerade, daß man für die letzte Seite und Diagonale x' und y' , auf die man nach n Schritten kommt, das Verhältnis 1:1 ansetzt; die vorletzten werden dann 3:2, usw.

Bekanntlich verwendeten die Pythagoreer den Satz Euklid II 9 zu dem Nachweis, daß die Seiten- und Diagonalzahlen die Gleichung

$$2x^2 - y^2 = \pm 1$$

erfüllen. Auf Grund dieses Satzes kann man nämlich leicht zeigen, daß x und y diese Gleichung erfüllen, sobald x' und y' sie erfüllen, wobei das Vorzeichen immer wechselt. Siehe PROKLOS, Kommentar zum Staat II, Kap. 23 u. 27.

Diagonalzahlen). Im Fall der Kommensurabilität kann man, wenn die Quotientenzahlen bekannt sind, sogar genau angeben, wie oft das gemeinsame Maß in den letzten Rest, den vorletzten usw. und schließlich in die gegebenen Größen aufgeht, also ist ihr Verhältnis in diesem Falle durch die Quotientenzahlen $q_1, q_2, \dots$ eindeutig bestimmt. Umgekehrt hängen die Quotientenzahlen (auch im inkommensurablen Fall) offensichtlich nur von dem Verhältnis der gegebenen Größen ab: proportionale Größen haben dieselben Quotientenzahlen.

Durch diese Überlegungen wird der Gedanke nahegelegt, die Gleichheit der Quotientenzahlen ganz allgemein zur Definition der Verhältnissgleichheit zu benutzen. Wer es war, der um die Jahrhundertwende diesen tiefsinnigen Gedanken zuerst erfaßt hat, wissen wir nicht; wir wissen aber, daß die Theorie $\Theta\epsilon$ auf dieser Definition der Proportion aufgebaut war. Wir kennen auch (aus Aristoteles; siehe Fußnote 9) einen Beweis, der auf Grund dieser Definition der Proportion geführt wurde, nämlich den Beweis des Satzes, daß zwei Rechtecke auf derselben Basis dasselbe Verhältnis haben wie ihre Höhen: $ab:ac = b:c$.

Auf Grund dieses Rechtecksatzes können wir uns nun auch denken, in welcher Weise man die Vertauschung der Mittelglieder in einer Proportion, die ja nach Aristoteles „früher gesondert bewiesen wurde für Zahlen, Strecken, Körper und Zeiten“, im Fall der Strecken dargetan hat. Denn aus $a:b = c:d$ folgt nach dem Rechteckssatz $ac:bc = ac:ad$, daraus $bc = ad$, daraus wieder nach dem Rechteckssatz $a:c = ab:cb = ab:ad = b:d^{12}$). Bei diesem Beweis wird davon Gebrauch gemacht, daß aus $A:B = A:C$ folgt $B = C$. Diese kann man, wie BECKER⁶⁾ gezeigt hat, mit Hilfe des Satzes X 1 beweisen. Und nun erklärt sich sehr schön, warum dieser Satz X 1, dessen wichtigste Anwendungen bei Euklid erst viel später kommen, am Anfang des X. Buches steht. Er wird zwar auch zu einem eleganten Beweis des Irrationalitätskriteriums X 2 gebraucht, aber dieses Kriterium kann man, wie wir oben gesehen haben, auch direkt beweisen. Der wahre Grund, warum der Satz X 1 am Anfang des X. Buches steht, scheint mir vielmehr der zu sein, daß er in der Begründung der Proportionenlehre, mit der die Darstellung der Theorie $\Theta\epsilon$ ursprünglich anfang, eine wesentliche Rolle gespielt hat. Wir haben ja schon früher (§ 2) bei der Analyse des X. Buches gesehen, daß dessen Verfasser die Eigentümlichkeit hat, manchmal Hilfssätze, die erst viel später gebraucht werden, ganz an den Anfang zu stellen: so ist X 14 nur ein Hilfssatz zu X 103–107, und X 17–18 werden erst bei X 54 und folgende gebraucht. So hat er auch den Satz X 1, der eigentlich erst zu dem Nachweis gebraucht wird, daß aus der Gleichheit der Vorderglieder einer Proportion die Gleichheit der Hinterglieder folgt, vor X 2–3 gestellt und den Beweis von X 2 auf X 1 gegründet. Kein

¹²⁾ Für diese Beweismethode siehe Euklid VI 16 und VII 19.

Mathematiker würde jemals X 1 zum Beweis von X 2 erfinden; wohl aber kann man, wenn man X 1 einmal hat, ihn zu dem raffinierten Beweis von X 2, den wir bei Euklid vorfinden, benutzen.

Hat man einmal den Satz von der Vertauschung der Mittelglieder einer Proportion in der angegebenen Weise bewiesen, so bieten die übrigen Sätze der Proportionenlehre nach BECKER⁶⁾ keine Schwierigkeit mehr.

Alle vier Stufen der Geschichte der Wechselwegnahme ließen sich durch gute alte Quellen belegen: die erste durch Euklid VII, die zweite durch X 3 und Philolaos, die dritte durch X 2, die vierte durch Aristoteles und X 1. Die Reihenfolge der vier Stufen ist durch die Entwicklung der Gedanken selbst vorgeschrieben.

Wir sind jetzt imstande, uns ein klares und nur in belanglosen Einzelheiten unsicheres Bild von dem Aufbau der Theorie $\Theta\epsilon$, wie sie Platon bekannt war, zu machen.

Am Anfang standen die Definitionen der Kommensurabilität, der Wechselwegnahme und, darauf fußend, der Proportion. Der Begründung der Proportionenlehre wurde der Hilfssatz X 1 vorausgeschickt, dann folgten die Sätze X 2–3 über Wechselwegnahme und größtes gemeinsames Maß, das einzige, was uns bei Euklid von der Antanairesislehre übrig geblieben ist. Nun kam wahrscheinlich ein Abriß der Proportionenlehre, sofern diese nicht schon damals als bekannt vorausgesetzt werden konnte, was ich nicht beurteilen kann. Die Vertauschbarkeit der Mittelglieder einer Proportion wurde für Strecken etwa in der oben angegebenen Weise mittels X 1 bewiesen, für Flächen und Raumkörper aber nach der Andeutung des Aristoteles getrennt, vielleicht durch Zurückführung auf den entsprechenden Satz für Strecken.

Nun wurden die für die eigentliche Theorie $\Theta\epsilon$ grundlegenden Begriffe quadriert kommensurabel, meßbar und quadriert meßbar eingeführt und die drei Hauptsätze der Theorie bewiesen, die wir oben gesperrt haben: X 5–6 für Strecken, X 9 für Quadratflächen und R für Rauminhalte. Über die Beweise dieser Sätze wissen wir nichts, als daß sie auf Grund der Definition der Verhältnismeinheit durch die Wechselwegnahme geführt wurden und daher in der Euklidischen Redaktion durch andere ersetzt werden mußten. Aus X 9 wurde der im Dialog erwähnte Satz Q gefolgert. Dieser enthielt schon einen Existenzbeweis für nur quadriert meßbare Strecken. Vielleicht schloß sich daran noch ein Existenzbeweis für nicht quadriert meßbare Strecken (wie X 10). An X 5–6 konnten sich die einfachen Folgerungen X 11–13 knüpfen, an Satz R der zu Satz Q analoge Satz für Würfelkanten, der im Dialog durch die Schlußworte des Theaitetos: „Und ebenso bei den Rauminhalten“ angedeutet wird.

Der Autor des X. Buches hat aus dieser Theorie die Sätze herausgesucht, die im Hauptteil gebraucht werden, und ein späterer Redaktor hat diejenigen Beweise, die wesentlich auf der alten Definition der Proportion beruhten, durch andere ersetzt, die sich an die Theorie A_p anlehnten. Jener Autor war ein hervorragender Mathematiker, der das Ganze, wie wir noch sehen werden, zu einer logisch wohldurchdachten Einheit gemacht hat, wohingegen der Redaktor der Beweise X 9–10 sich beträchtliche logische Mängel zuschulden hat kommen lassen. Wer war nun jener Autor?

§ 4. Der Urheber der Theorie Θ_ε und die Beziehung zum Hauptteil des X. Buches.

Wie H. Vogt¹³⁾ in seiner wertvollen Studie ausführlich auseinandergesetzt hat, sind zwar die äußeren Umstände des Dialoges Theaitetos, insbesondere die Begegnung des alten Theodoros mit dem jungen Theaitetos, nicht als historische Wahrheit ernst zu nehmen, wohl aber die Abgrenzung der wissenschaftlichen Leistungen der Dramatis Personae. Man kann unmöglich annehmen, daß Plato seinen gefallenen Freund Theaitetos, dem zu Ehren der Dialog geschrieben ist, mit fremden Federn hat schmücken wollen. Was dieser also als Ergebnis seiner eigenen Überlegungen mitteilt und scharf gegen das, was Theodoros ihm vorgetragen hat, abgrenzt, muß ihm auch wirklich angehören.

Als Bestätigung kommt noch das bekannte Scholion hinzu, das den Satz X 9 dem Theaitetos zuschreibt¹⁴⁾. Ich nehme an, daß der Scholiast aus einer Quelle schöpft (vielleicht einem Theaitetos-Kommentar), die eine die Theorie Θ_ε enthaltende Arbeit unter dem Namen des Theaitetos gekannt hat. Diese Arbeit, vielleicht eine Jugendschrift des Theaitetos, wäre demnach getrennt vom Hauptteil des X. Buches veröffentlicht worden. Jedoch wollen wir diese unsicheren Vermutungen nicht weiter ausspinnen.

Daß Theaitetos selbst der Urheber der Theorie Θ_ε ist, wird noch bestätigt durch die Beziehung dieser Theorie zu ihrer Fortsetzung und Erweiterung im X. Buch. Denn die Sätze 14–16 dieses Buches, die, wie wir gesehen haben, bereits zum Hauptteil gehören, schließen sich ganz logisch an 11–13 und frühere Sätze an. Die Sätze X 11 und X 14 fangen sogar fast mit denselben Worten an. Der Stil der Beweise ist ganz derselbe: der gleiche Geist scharfer Logik ist in allen zu erkennen. Auf die eigentümliche Art des Verfassers, Hilfsätze nicht dort zu bringen, wo sie gebraucht werden und wo ihr Zweck einleuchtet, sondern viel weiter vorne, haben wir schon hingewiesen.

¹³⁾ Vogt, H.: Bibliotheca Math. 10, 97 ff (1910).

¹⁴⁾ Scholium zu Euklid X 9: „Dieses Theorem ist eine Erfindung des Theaitetos und wird von Platon in seinem Dialog erwähnt. Aber dort (bei Platon) wird es speziell hier aber (bei Euklid) allgemein ausgesprochen.“

Nun könnte man noch einwenden, daß das alles vielleicht eine nachträgliche Glättung, das Werk eines Redaktors sein könne. Was aber entscheidet, ist, daß nicht nur die äußere Form, sondern auch die Beweismethoden übereinstimmen, daß im ganzen Buch X mit Flächen und Strecken nach den Methoden der geometrischen Algebra gerechnet wird, und vor allem, daß die Grundidee der Theorie $\Theta\epsilon$: *irrationale Strecken zu benennen und zu unterscheiden durch Benennung und Unterscheidung der auf sie errichteten Quadrate*, sich durch das ganze X. Buch hindurchzieht. Die Irrationalität der Binomiale z. B. wird dadurch bewiesen, daß ihr Quadrat irrational ist; ebenso wird die Verschiedenheit der 13 Hauptgattungen von Irrationalitäten durch die Verschiedenheit ihrer Quadrate begründet.

Die Identität der Urheber dieser beiden Teile des X. Buches ist also unverkennbar. Nun sind aber Mediale, Binomiale und Apotome nach dem Zeugnis des Eudemos¹⁵⁾ Erfindungen des Theaitetos, der sie mit den drei Mitteln in Beziehung gesetzt hat. Also muß auch die Theorie $\Theta\epsilon$ von Theaitetos herühren.

Sollte man nach diesem übereinstimmenden Zeugnis der besten Quellen immer noch zweifeln und wie REIDEMEISTER (l. c.) den Verdacht äußern, „daß Theaitet der Mathematiker nur eine Legende ist, die sich um den Theaitet des platonischen Dialoges kristallisiert hat“, so kann dieser Verdacht sofort entkräftet werden durch den Hinweis auf das Scholion zu Euklid XIII, das die Erfindung des Oktaeders und des Ikosaeders dem Theaitetos zuschreibt. Dieses Scholion kann in keiner Weise aus dem Platonischen Dialog hergeleitet werden, denn dort steht kein Wort über die regulären Körper. Ergänzend kommt noch die (wiederum unabhängige) Mitteilung des „Suidas“ hinzu, daß Theaitetos als erster die sogenannten fünf Körper konstruierte. Denkt man bei diesen Konstruktionen, wie es naheliegt, an die kunstvolle Herstellung der 5 regulären Körper in Euklid XIII, bei der die Begriffe Minor und Apotome aus Buch X benutzt werden, so erhält man einen weiteren, von allen Theaitetoskommentaren völlig unabhängigen Hinweis auf die Beziehung des Theaitetos zum Buche X. Wie man da noch zweifeln kann, ist mir ein Rätsel. Auch im Beweisstil sind Ähnlichkeiten zwischen dem X. und XIII. Buch nachweisbar, aber das auszuführen, würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen¹⁶⁾.

Derjenige, der die Beweise von X 9–10 durch neue ersetzt hat, um so den Anfang des X. Buches mit der Eudoxischen Proportionenlehre in Einklang zu bringen, wird wohl Euklid selbst gewesen sein. Denn wir haben gesehen,

¹⁵⁾ Bei Pappos im arabischen Kommentar zu Euklid X. Siehe THOMSON, W. und G. JUNGE: *The Commentary of Pappus*, Cambridge 1930.

¹⁶⁾ EVA SACHS hat im Anschluß an Tannery den Nachweis erbracht, daß das XIII. Buch eine Abhandlung des Theaitetos darstellt, die Euklid als Ganzes in seine Elemente aufgenommen hat. Siehe SACHS, E.: *Die fünf platonischen Körper*, Philol. Unters. Heft 24, Berlin 1917.

daß diese neuen Beweise mit der Sectio canonis, die auch auf Euklids Namen steht, sprachlich verwandt sind. Derselbe Euklid wird wohl auch die Sätze X 1–6 für allgemeine Größen formuliert haben, statt für Strecken¹⁷). So bestätigt sich die Mitteilung des Proklos, daß Eukleides, der die Elemente zusammenbrachte, vieles von Eudoxos zusammengeordnet und vieles von Theaitetos vollendet habe.

§ 5. Theodoros von Kyrene und das Irrationalitätskriterium X 2.

Die vierte Stufe in der Entwicklung der Idee der Wechselwegnahme fanden wir in der Theorie $\Theta\epsilon$, die der Theaitetos des Dialoges für sich in Anspruch nimmt. Wollen wir über die vorangehende Stufe etwas mehr erfahren, so müssen wir zuhören, was er über seinen Lehrer Theodoros sagt:

Περὶ δυνάμεων τι ἡμῖν Θεόδωρος
ὅδε ἔγραψε, τῆς τε τρίποδος περὶ
καὶ πεντέποδος ἀποφαίνων ὅτι μήκει
οὐ ἑξόμετροι τῇ ποδιαίᾳ, καὶ οὕτω
κατὰ μίαν ἐκάστην προαιρούμενος
μέχρι τῆς ἑπτακαίδεκάποδος. ἐν δὲ
ταύτῃ πως ἐνέσχετο.

Unser Theodoros hier zeichnete etwas auf Quadratseiten Bezügliches und machte bei der dreifüßigen und fünf-füßigen klar, daß sie nicht linear kom-mensurabel sind zu der einfüßigen; so nahm er jede einzeln heraus bis zu der 17-füßigen. Bei dieser wurde er irgend-wie aufgehalten.

Hier ist δύναμις nicht, wie in der späten mathematischen Literatur, mit „Quadrat“ zu übersetzen, sondern es handelt sich um Strecken, die Quadrate erzeugen (δύνανται). Das geht nicht nur aus dem Ausdruck μήκει σύμμετρος hervor, der nur auf Strecken anwendbar ist und bei Platon dieselbe Bedeutung hat wie bei Euklid, sondern auch aus der Fortsetzung des Textes, wo Theaitetos gewisse Strecken δυνάμεις nennt. Sprachlich erscheint es durchaus möglich, unter der Macht oder Kraft, die ein Quadrat hervorbringt, die Quadratseite zu verstehen. Später hat man, sprachlich weniger korrekt, unter δύναμις das hervorgebrachte Quadrat verstanden. – Die „dreifüßige“ Quadratseite ist die, deren Quadrat eine Fläche von 3 Quadratfuß hat, d. h. die Strecke ω_3 . Theodoros hat also ω_3 , ω_5 usw. bis ω_{17} einzeln durchgenommen und gezeigt, daß sie mit ω_1 nicht kommensurabel sind. Theaitetos hat sich daraufhin überlegt, daß es doch unendlich viele Quadratseiten ω_n gibt, die man durch einen allgemeinen Begriff erfassen müßte. Das Ergebnis dieser Überlegung kennen wir schon (§ 2).

Daraus, daß Theodoros mit ω_3 und nicht mit ω_2 angefangen hat, hat schon ZEUTHEN geschlossen, daß die Irrationalität von ω_2 schon früher bekannt war. In der Tat haben wir im I. Teil dieser Arbeit gesehen, daß Plato und Aristo-

¹⁷) So BECKER, O., I. c.⁸).

teles mehrfach auf einen damals offenbar allgemein bekannten Beweis für die Irrationalität der Quadratdiagonale ω_2 anspielen und daß das methodische Hilfsmittel zu diesem Beweis: die Lehre vom Geraden und Ungeraden, schon um die Mitte des 5. Jahrhunderts vorhanden war.

Mit welcher Methode hat nun Theodoros $\omega_3, \omega_5, \dots, \omega_{17}$ untersucht?

Eine Möglichkeit müssen wir ausscheiden, nämlich daß Theodoros die Nichtmeßbarkeit von ω_n auf die Unmöglichkeit der Gleichung $p^2 = nq^2$ zurückgeführt und diese Gleichung dann weiter zahlentheoretisch behandelt hat. Denn erstens ist zu dieser Zurückführung, wie wir gesehen haben, ein Satz wie X 9 erforderlich, der die Beziehung zwischen der geometrischen Figur und der Zahlengleichung $p^2 = nq^2$ vermittelt, und diesen Satz hat erst Theaitetos bewiesen; zweitens war Theodoros nach allen Zeugnissen Geometer und kein Zahlentheoretiker, und drittens wäre bei dieser Methode kein einziger Grund vorhanden, bei 17 aufzuhören: gestatten doch die Teilbarkeitssätze des Buches VII, die zur Zeit des Theodoros sicherlich schon vorhanden waren, ohne weiteres eine allgemeine Entscheidung der Möglichkeit der Gleichung $p^2 = nq^2$.

Aus ähnlichen Gründen kommt auch eine Anwendung der Theorie A ρ für Theodoros nicht in Frage.

Zwei Hypothesen sind aufgestellt worden, die beide das Abbrechen bei ω_{17} befriedigend erklären, nämlich von ZEUTHEN¹⁸⁾ und ANDERHUB¹⁹⁾. Beide gehen von der Annahme aus, daß Theodoros das Irrationalitätskriterium X 2 verwendet hat, das ZEUTHEN deswegen auch als „le critère de Théodore“ bezeichnet.

ZEUTHEN nimmt an, daß Theodoros die Inkommensurabilität der Strecken ω_1 und ω_n *wirklich* bewiesen hat, indem er zeigte, daß bei der gegenseitigen Wegnahme das Streckenverhältnis sich nach einigen Schritten wiederholt, ähnlich wie wir das in § 3 bei der Quadratdiagonale gesehen haben. ANDERHUB weist demgegenüber auf das von Platon gebrauchte Verbum ἀποφαίνω hin, das nicht notwendig „beweisen“, sondern nur „aufzeigen“, „klar machen“ heißt. Nach seiner Annahme hat Theodoros die Wechselwegnahme nur soweit durchgeführt, als es bei der beschränkten Genauigkeit einer Sandrechnung möglich war, und konnte dann jedesmal noch einen kleinen übrig bleibenden Rest „aufzeigen“. Bei ZEUTHEN ist also, modern ausgedrückt, die Periodizität der Kettenbruchentwicklungen für $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, usw. bis $\sqrt{17}$ maßgebend, und das Aufhören bei $\sqrt{17}$ erklärt sich einfach daraus, daß der Kettenbruch für $\sqrt{19}$ eine sechsgliedrige Periode hat, das Verfahren also bei ω_{19} sehr langwierig wird, während $\omega_{18} = 3 \cdot \omega_2$ uninteressant ist. ANDERHUB dagegen erklärt das Aufhören bei $\sqrt{17}$ so, daß Theodoros die Strecken $\omega_2, \omega_3, \dots, \omega_{17}$ sukzessiv

¹⁸⁾ ZEUTHEN, H. G.: Oversigt Danske Vidensk. Selsk. Forhandl. 1915, S. 348 ff.

¹⁹⁾ ANDERHUB, J. H. in: Joco-Seria aus den Papieren eines reisenden Kaufmanns, Gewidmet den Freunden des Hauses Kalle & Co. A.G., S. 161 ff. Wiesbaden 1941.

nach Pythagoras konstruiert habe (siehe Fig. 2), wobei durch die schneckenartige Drehung der Figur die Strecke w_{17} ganz in die Nähe der Ausgangsstrecke w_1 kam, wodurch Theodoros, wie Platon es so treffend ausdrückt, „aufgehalten wurde“.

Gegen die ZEUTHENSche Erklärung hat K. v. FRITZ geltend gemacht²⁰⁾, das Kettenbruchverfahren sei so langwierig, daß Theodoros es kaum für $\sqrt{3}$ bis $\sqrt{17}$ in einer Schulstunde durchgeführt haben könnte, wie Platon dies voraussetzt. ANDERHUB fügt noch hinzu, daß Theodoros die mathematischen Voraussetzungen dazu nicht hatte, die erst Eudoxos in die Mathematik einführte. Um beiden Einwänden zu begegnen, werde ich jetzt ein Beweisverfahren angeben, das ganz im Rahmen der geometrischen Algebra verläuft und das Theodoros sehr wohl in einer Unterrichtsstunde vor einem so hervorragend begabten und interessierten Hörerkreis hätte vorführen können.

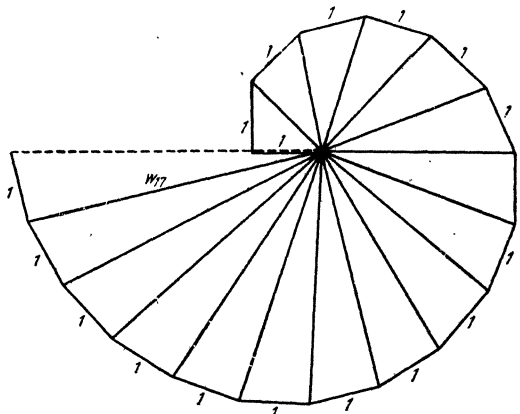


Fig. 2.

Es sei e die Einheitsstrecke und w eine von den Strecken $w_3, w_5, \dots, w_{17}$. Wir ziehen e so oft es geht von w ab und ersetzen dann e und den Rest durch zwei Strecken im gleichen Verhältnis, weil es für die Fortsetzung des Verfahrens nur auf das Verhältnis ankommt. Dann ziehen wir wieder die kleinere der beiden Strecken so oft als möglich von der größeren ab, usw. bis das Verhältnis sich wiederholt. Aus der Wiederholung folgt dann, daß das Verfahren kein Ende nimmt, mithin die Ausgangsstrecken e und w inkommensurabel sind.

1. Fall: w_3 . Die Strecke e läßt sich einmal von w abziehen: Rest $w - e$. Die Strecken e und $w - e$ ersetzen wir durch die zu ihnen proportionalen $w + e$ und $2e$. Es gilt nämlich, wie wir nachher geometrisch beweisen werden, die Proportion

$$(1) \quad e : (w - e) = (w + e) : 2e.$$

Die Strecke $2e$ läßt sich einmal von $w + e$ abziehen: Rest $w - e$. Nun werden $2e$ und $w - e$ wieder durch proportionale Strecken ersetzt:

$$(2) \quad 2e : (w - e) = (w + e) : e.$$

²⁰⁾ PAULY WISSOWA, Realenzyklopädie 1821 unter Theodoros.

Die Strecke e läßt sich zweimal von $w + e$ abziehen: Rest $w - e$. Das Verhältnis $e : (w - e)$ kam in (1) schon einmal vor, womit der Kreis geschlossen ist.

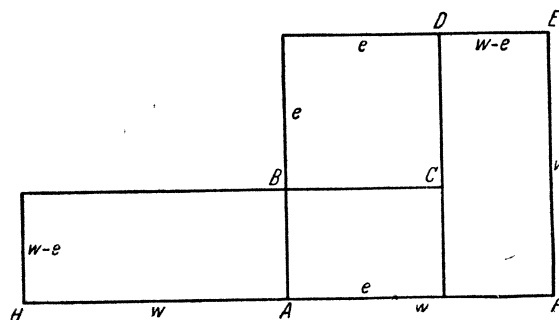


Fig. 3.

Die Proportionen (1) und (2) aber folgen beide aus der Flächengleichheit

$$e \cdot 2e = (w - e)(w + e),$$

die ohne weiteres nach Euklid II 6 bewiesen werden kann, indem man die „Gnomonfläche“ $AB C D E F = 2e^2$, die Differenz des dreifüßigen Quadrates w^2 und des einfüßigen Quadrates e^2 , in ein Rechteck $H C$ mit Seiten $w - e$ und $w + e$ verwandelt.

2. Fall: w_5 . Die Einheitsstrecke e läßt sich zweimal von w abziehen: Rest $w - 2e$. Nun ist, wieder nach II 6,

$$e : (w - 2e) = (w + 2e) : e.$$

Die Strecke e läßt sich viermal von $w + 2e$ abziehen: Rest $w - 2e$. Das Verhältnis $e : (w - 2e)$ wiederholt sich.

3. Fall: w_6 wird genau so behandelt wie w_3 :

$$e : (w - 2e) = (w + 2e) : 2e.$$

$2e$ läßt sich zweimal von $w + 2e$ abziehen; Rest $w - 2e$.

$$2e : (w - 2e) = (w + 2e) : e.$$

e läßt sich viermal von $w + 2e$ abziehen: Rest $w - 2e$. Das Verhältnis $e : (w - 2e)$ wiederholt sich.

4. Fall: ω_7 . Hier braucht man 4 Proportionen, bis das Verhältnis $e : (\omega - 2e)$ sich wiederholt:

$$e : (\omega - 2e) = (\omega + 2e) : 3e$$

$$3e : (\omega - e) = (\omega + e) : 2e$$

$$2e : (\omega - e) = (\omega + e) : 3e$$

$$3e : (\omega - 2e) = (\omega + 2e) : e.$$

So geht es weiter. Bei ω_{13} braucht man sogar 5 Proportionen. ω_{17} ist wiederum ebenso einfach wie ω_5 .

Der nächste interessante Fall ω_{19} würde 6 Proportionen beanspruchen: wollte also Theodoros seinen Vortrag nicht über Gebühr ausdehnen, so tat er gut daran, bei ω_{17} aufzuhören. Vielleicht wurde er auch durch einen äußeren Grund „irgendwie aufgehalten“.

Es wäre leicht, die modernen Bezeichnungen $\omega - e$, $\omega + e$ usw. durch antike zu ersetzen, die bei schriftlicher Fixierung zwar komplizierter ausfallen

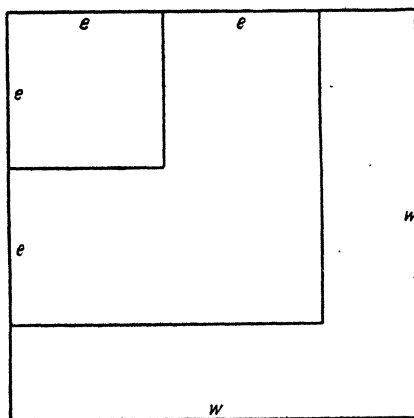


Fig. 4.

würden, nicht aber beim mündlichen Vortrag, wo man auf die Strecken hinzeigen kann und sie nicht mit je zwei Buchstaben zu benennen braucht. Die Umformung von $(\omega - e)$ $(\omega + e)$ mittels der Gnomone war schon den Pythagoreern, den Erfindern der geometrischen Algebra, bekannt²¹⁾.

Ich behaupte nicht im Ernst, daß Theodoros wirklich so verfahren ist wie hier angegeben. Ich habe nur zeigen wollen, daß die ZEUTHENSche Hypothese nichts Unmögliches enthält. Daneben bleibt immer auch noch die Hypothese von ANDERHUB, die durch Platons Worte „er wurde irgendwie aufgehalten“

²¹⁾ Eudemos bei Proklos, Comm. in Eucl. S. 419 (FRIEDLEIN).