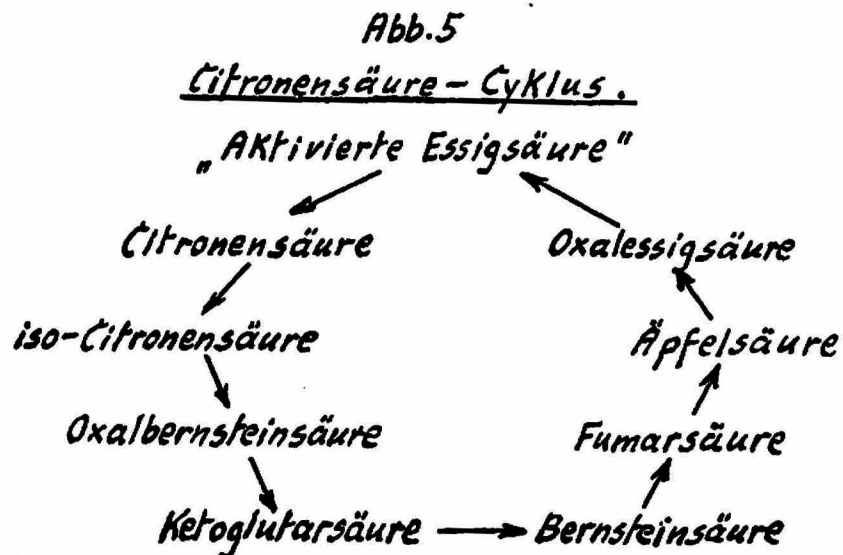


91
BINDEL, E.
1967

stehung einer übergeordneten einheitlichen Schöpferkraft, die auf der einen Seite im Stofflichen in musikalischen Rhythmen gestaltet, auf der anderen Seite aber ein Bild dieses Geschehens im Materiellen des Ohres aufbaut, das nun durch seine Verwandtschaft hiermit in Resonanz kommen kann mit allem Musikalischen, das von der Materie losgelöst ist.

Zum Abschluß noch etwas über die Art und Weise, wie der Abbau der Stoffe vor sich geht. Er erfolgt bei Kohlenhydraten, Fetten und Eiweißstoffen gleichartig, nachdem sie in die „aktivierte Essigsäure“ überführt worden sind, so daß der Organismus nur für den Abbau der letzteren zu sorgen hat. Auch hier handelt es sich um ein Kreislauf-Geschehen, das nach seinem Entdecker Krebs-Zyklus (Zitronensäure-Zyklus) genannt wird (Abb. 5). Wiederum treten neun Stufen auf, die in der Pflanzenwelt als Säuren weit verbreitet sind, dort allerdings als Zwischenstufen für den Aufbau. Wir sehen, daß der Mensch Wesentliches seiner Umwelt in sich trägt, ohne sich dessen bewußt zu werden. – Die Leber bringt es fertig, Kohlendioxyd und Wasser bei diesem Zyklus frei zu setzen, ohne daß weitere Stoffe übrig werden; denn das Endprodukt, die Oxallessigsäure, verbindet sich wieder mit der „aktivierten Essigsäure“ und es entsteht wieder Zitronensäure, der Neuanfang des Zyklus.

Wir sind am Ende dieser Betrachtungen angekommen, die im Rahmen der Vorbereitungen des Verfassers für den Chemie-Unterricht der 11.



und 12. Klasse entstanden sind. Selbstverständlich besteht nicht die Meinung, daß dieser Inhalt in ähnlicher Form an den Schüler herangebracht werden könnte. Aber es ist förderlich für eine Unterrichtsepoke, wenn der Lehrer über Gesichtspunkte verfügt, aus denen heraus er mit einer gewissen Souveränität seinen Unterricht gestalten kann. Er ist dann in der Lage, je nach der gegebenen Situation, auf dieses oder jenes Teilgebiet zurückzugreifen, das ihm aus einer solchen Zusammenschau leichter zugänglich ist. Denn der Schüler der Oberstufe erwartet, daß ihm der Lehrer auf Fragen so zu antworten vermag, daß für ihn tiefere Hintergründe sichtbar werden, selbst wenn er in diese noch nicht ganz einzudringen vermag.

Rainer Dilloo

LITERATUR:

Rudolf Steiner: ¹ „Entsprechungen zwischen Mikrokosmos und Makrokosmos“, 8. Vortrag. – ² „Landwirtschaftlicher Kurs“, 3. Vortrag.

PYTHAGOREISCHE ZAHLENTRIADEN

Pädagogische Gestaltung einer mathematischen Unterrichtsepoke im neunten Schuljahr einer Waldorfschule, 1. Teil

Schon gegen Ende des Mathematikunterrichtes eines 7. Schuljahres soll eine Epoche dazu verwendet werden, den Schülern den pythagoreischen Lehrsatz nahezubringen. Am besten wird man sich dabei eines oder mehrerer der zahlreichen Zerlegungsbeweise bedienen, also noch im Geometrischen verbleiben. Das 13. Kapitel meines Pythagorasbuches liefert dafür neben dem, was von Rudolf Steiner stammt, genügend Anregung und Stoff für den Hauptunterrichtslehrer, auch wenn er kein Fachlehrer ist. Der Unterrichtsstoff des 8. Schuljahres kann dazu verwendet werden, das sogenannte ägyptische Dreieck, wie es auf den ersten Seiten meines 9. Kapitels dargestellt ist, zu behandeln. Im 9. Schuljahr, wenn der Hauptunterricht in der Mathematik den Händen eines Fachlehrers anvertraut wird, besitzen die Schüler die nötige Reife, den eventuellen Nutzen aus den beiden vorhergehenden Schuljahren zu ziehen.

Zwei Erntewagen sind erforderlich: der erste fährt die pythagoreischen Zahlentriaden in die Scheuer, der zweite hat sich mit neu entdeckten Zahlen, die man irrationale Zahlen nennt, beladen und

ERZIEHUNGSKUNST 31 (1967) P. 10-11 525-552

schwankt unter ihrer Last bedenklich hin und her. Hier, wo der junge Mensch im Alter zwischen 14 und 15 Jahren steht und die Geschlechtsreife hinter sich gebracht hat, ist die Angabe des Lehrplans der Freien Waldorfschulen streng zu beachten: „Die voll erwachte Denkkraft und Urteilsfähigkeit des jungen Menschen fordert Nahrung und Betätigungsmöglichkeit in Aufgaben, die durch die Anwendung von Vernunft und Logik zu lösen sind.“ Wehe dem Lehrer, der dieses Gebot nicht beachtet, indem er vor der Klasse als Dozierender steht, alles oder fast alles selbst vorträgt und die Schüler nicht zum Denken, sondern bloß zum Nachdenken erzieht! Diese Gefahr besteht besonders für denjenigen Unterrichtsleiter, der in sein Fachgebiet besonders tief eingedrungen ist. Er wird bald dahin geraten, nur für den begabteren Teil der Klasse verständlich zu werden und über die Köpfe des Restes hinweg zu dozieren, der daraufhin einfach abschaltet. Es kann sich also nur darum handeln, daß der Unterrichtende soweit wie möglich zurücktritt und das meiste die Schüler selber finden läßt, wobei er darauf achten muß, daß nicht immer dieselben Schüler sich zum Wort melden.

Ein hervorragendes Beispiel eines schlechten Lehrers war – Johannes Keppler. Als er, erst 22jährig, seinen Dienst an der evangelischen Stiftsschule im österreichischen Graz antrat, liefen ihm schon nach einem Jahr Unterricht die Schüler davon, so daß er an Stelle des Mathematikunterrichts auf andere Fächer ausweichen mußte. Er setzte bei seinen Schülern zuviel voraus und glaubte, bei ihnen die gleiche geistige Beweglichkeit und Aufnahmefähigkeit, die gleiche Begeisterung für seinen Lehrgegenstand annehmen zu können. Er war sich dessen auch bewußt und redete von seiner übermächtigen „cupiditas speculandi“. Es falle ihm immer etwas zu sagen ein, ehe es möglich ist zu überlegen, ob das auch passe. Ein Lehrer dieser Art eignete sich nur für hervorragende Schüler. An einer Waldorfschule wäre er wahrscheinlich gescheitert. Wenn im folgenden Unterrichts Anregungen gegeben werden, seien sie von dem Lehrer nur im Geiste einer recht verstandenen Pädagogik entgegengenommen.

Im 10. Schuljahr, wenn die Logarithmenrechnung fällig ist, geht man mit Vorteil von der Reihe aus:

$$2^0 \quad 2^1 \quad 2^2 \quad 2^3 \quad 2^4 \quad 2^5 \quad \dots\dots$$

Im 9. Schuljahr kehre man gleichsam den Spieß um und betrachte die Reihe

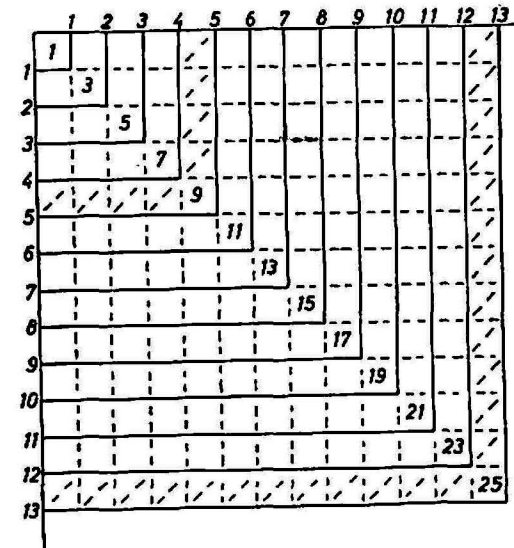
$$0^2 \quad 1^2 \quad 2^2 \quad 3^2 \quad 4^2 \quad 5^2 \quad \dots\dots,$$

d. h. die Aufeinanderfolge der Quadratzahlen. Solche Zahlen können als Flächenzahlen über den Längenzahlen $0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\dots$ verwendet werden. Von Interesse ist, wie diese Flächenzahlen wachsen. Das sieht man sofort, indem man die Unterschieds- oder Differenzenreihe bildet:

Quadratzahlen	0	1	4	9	16	25	
Unterschiedsreihe		1	3	5	7	9	

Bei den Schülern erzeugt es große Überraschung, daß die Unterschiedsreihe in Gestalt der Reihe ungerader Zahlen vor ihnen steht. Schon dem Pythagoreer war bekannt, daß die Reihe der Quadratzahlen einfach durch Addition der aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen gebildet wird. Als Augenmensch wollte er es auch sichtbar vor sich haben und brachte die Reihe der Quadratzahlen und ihre Unterschiedsreihe in eine bedeutsame geometrische Figur (siehe unten).

Am oberen und linken seitlichen Rande gewahrt man als Wiedergabe der Längenzahlen die natürliche Zahlenreihe $0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\dots$ deren Quadrate nicht nebeneinander, sondern ineinander gezeichnet sind und zu den Flächenzahlen $0, 1, 4, 9, 16, 25, \dots\dots$ führen; letztere sind nicht sichtbar gemacht, wohl aber die Zahlen $1, 3, 5, 7, 9, \dots\dots$ als Flächenzahlen von saumartig umeinander gelegten flächig breiten rechten Winkeln gleicher Schenkellänge. Das kleinste Eckquadrat von der Länge 1 hat auch die Flächenzahl 1. Das nächste Eckquadrat von der Länge 2 hat die Flächenzahl 4. Es entsteht, indem sich um das kleinste Eckquadrat ein flächenhafter Saum von der Flächenzahl 3 herumlegt: $4 - 1 = 3$. Um dieses legt sich wieder ein flächenhafter Saum von der Flächenzahl 5 herum und erzeugt das



dritte Eckquadrat von der Fläche 9, usw. Das obige Reihenpaar ist damit geometrisch verbildlicht und zugleich erklärt. Die gleich breiten Säume nannte man Gnomone und die zu ihnen gehörenden ungeraden Zahlen Gnomonzahlen oder Gnomotes; Gnomon heißt in wörtlicher Übersetzung Erkenner, Beurteiler.

Manche der Gnomonzahlen sind jedoch zugleich auch Quadratzahlen, in der Figur $9 = 3^2$ und $25 = 5^2$. Ihre Streifen sind durch Schraffierung besonders hervorgehoben. Bei Fortsetzung der Figur würden solche Gnomon-Quadratzahlen immer wieder auftreten, die ungeraden Quadratzahlen $49 = 7^2$, $81 = 9^2$, $121 = 11^2$, ... veranschaulichend. Die Frage entsteht, von welchen Quadratzahlen sie den jeweiligen Unterschied bilden. Sie beantwortet sich durch ein näheres Eingehen auf die beiden in der Figur hervorgehobenen Gnomonstreifen:

- 1) Der erste von ihnen verdeutlicht die Rechenbeziehung

$$5^2 - 4^2 = 9 = 3^2,$$

also die Gesetzmäßigkeit des ägyptischen Dreiecks. Nun hat $3^2 = 9$ die bei den ungleichen „Hälften“ 4 und 5, und von deren Quadraten ist $3^2 = 9$ der Unterschied.

- 2) Dasselbe Gesetz waltet in dem zweiten hervorgehobenen Streifen, der die Rechenbeziehung $13^2 - 12^2 = 25 = 5^2$ verbildlicht. Denn $5^2 = 25$ hat die beiden ungleichen Hälften 12 und 13, und von deren Quadraten ist $5^2 = 25$ der Unterschied.

- 3) Der nächste, nicht mehr sichtbare Streifen dieser Art wäre $49 = 7^2$. Da die beiden Hälften von 49 die Zahlen 24 und 25 sind, muß gelten:

$$25^2 - 24^2 = 7^2.$$

Will man von irgendeiner ungeraden Quadratzahl, etwa $225 = 15^2$, feststellen, von welchen beiden anderen Quadratzahlen sie den Unterschied bildet, so suche man von 225 die beiden ungleichen Hälften 112 und 113 auf, und man gewinnt die richtige Beziehung:

$$113^2 - 112^2 = 15^2$$

Ist allgemein n^2 eine ungerade Quadratzahl, so lauten ihre beiden ungleichen Hälften

$$\frac{n^2 - 1}{2} \quad \text{und} \quad \frac{n^2 + 1}{2}$$

und man erhält die Beziehung:

$$\left(\frac{n^2 + 1}{2}\right)^2 - \left(\frac{n^2 - 1}{2}\right)^2 = n^2, \text{ wobei } n = 1, 3, 5, 7 \dots \text{ ist.}$$

So quillt aus der Gnomon-Quadratfigur eine Fülle von Zahlentriaden hervor, die von derjenigen des ägyptischen Dreiecks angeführt werden:

$$3^2 = 5^2 - 4^2$$

$$5^2 = 13^2 - 12^2$$

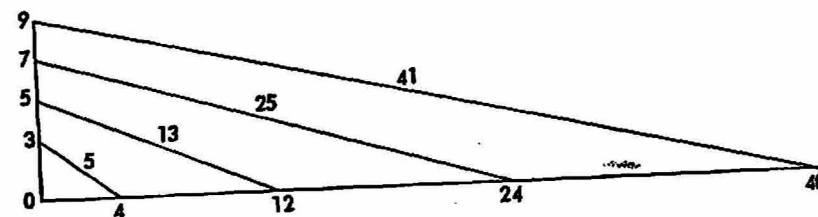
$$7^2 = 25^2 - 24^2$$

$$9^2 = 41^2 - 40^2$$

$$11^2 = 61^2 - 60^2$$

.....

Die Frage muß entstehen, ob nicht bloß die erste Triade, sondern auch alle folgenden mit dem rechten Winkel zu tun haben. Das ist durch entsprechende Zeichnung schnell festgestellt. Nur zeigen alle die Partnerdreiecke im Gegensatz zum ägyptischen Dreieck die Eigentümlichkeit oder, wenn man so sagen darf, den Mangel, immer langgestreckter und damit für eine praktische Erzeugung eines rechten Winkels immer ungeeigneter zu werden, unterscheiden sich doch Hypotenuse und lange Kathete immer um die gleiche Länge 1 voneinander:

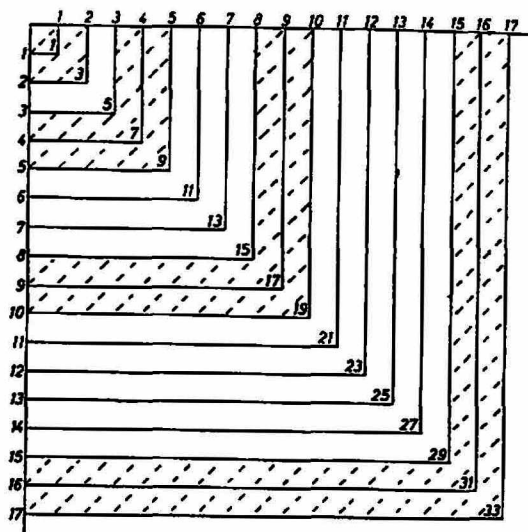


Solche Zahlentriaden wie die obigen nennt man noch heute pythagoreische Zahlen. Sie sind beileibe nicht die einzig möglichen. Wenn beispielsweise 3, 4 und 5 eine solche Triade bilden, gilt dies auch von allen ihren Vielfachen, also von 6, 8, 10 oder 9, 12, 15 ... An der Form der ihnen entsprechenden rechtwinkligen Dreiecke ändert sich dadurch nicht das mindeste; der soeben festgestellte Mangel der Partnerdreiecke wird dadurch nicht behoben. Man kann die Vervielfachungen als abgeleitete Triaden im Gegensatz zur Grundtriade, aus der sie alle hervorgehen, bezeichnen. Die obengenannten Triaden sind nämlich sämtlich Grund-

triaden und daran erkennbar, daß ihre drei Zahlen keinen gemeinsamen Faktor aufweisen.

Die Figur enthielt bisher als durch Schraffierung ausgezeichnete Gnomonquadratzahlen nur die Quadrate 9 und 25 der ungeraden Zahlen, aber nicht die Quadrate gerader Zahlen wie $4 = 2^2$, $16 = 4^2$, $36 = 6^2$, ... Aber das liegt keineswegs an der Figur als solcher, sondern vielmehr an ihrer eingeschränkten

Betrachtungsweise. Man muß, um zu ihrem durch Schraffierung hervorgehobenen Bildausdruck zu gelangen, immer zwei Nachbargnomone zu einem Ganzen vereinigen, wie es die dritte Figur zeigt. Diese enthält mit hin alle Quadratzahlen in Gestalt von Gnomonen, die ungeraden in einfacher Breite, die geraden in doppelter Breite:



Ist mit den doppelt so breiten Gnomonen etwas gewonnen? Die letzte Figur weist vier derselben auf, von denen die drei ersten bei näherer Prüfung nichts Neues liefern, nämlich

$$\begin{aligned} 1 + 3 &= 4 = 2^2 = 2^2 - 0^2 \text{ Selbstverständlichkeit} \\ 7 + 9 &= 16 = 4^2 = 5^2 - 3^2 \text{ erste alte Grundtriade} \\ 17 + 19 &= 36 = 6^2 = 10^2 - 8^2 \text{ erste alte abgeleitete Triade} \end{aligned}$$

Wohl aber ergibt der vierte Doppelstreifen eine neue Grundtriade:

$$31 + 33 = 64 = 8^2 = 17^2 - 15^2$$

Der weiteren Auswertung der fortgesetzt gedachten doppelstreifigen Figur sind nun keine Schranken gesetzt. Wie weit da der Lehrer gehen will, muß ihm je nach der vorliegenden Reife seiner Schülerschaft überlassen bleiben. Auch hier könnte man es für den Fall $n = 2, 4, 6, 8, \dots$ zu einer in Buchstaben ausgedrückten Formel bringen, die dann lauten würde:

$$\left[\frac{n^2}{2} + 2 \right]^2 - \left[\frac{n^2}{2} - 2 \right]^2 = n^2$$

Man könnte so fortfahren und es mit lauter schraffierten nebeneinanderliegenden Gnomonen von dreifacher Breite versuchen. Aber das mag der Fachmathematiker nicht mit der Klasse, sondern für sich probieren.

Zum Abschluß werde die gleiche Untersuchung, welche den Quadratzahlen zuteil wurde, auch mit den Kubikzahlen vorgenommen. Mit ihnen ist ein modernes Problem angeklungen, das die Betrachtungen abschließen kann. Man stelle genauso wie bei den Quadratzahlen die Reihe der Kubikzahlen vor die Schüler:

1 8 27 64 125 216 343 512 729 ...

Wie bei den Quadratzahlen bilde man deren Unterschiedsreihe:

7 19 37 61 91 127 169 217

Nach Art der ineinander geschobenen Gnomonquadrate müßte man ineinandergeschobene Gnomonwürfel bilden und versuchen, ob es solche Würfelpaare gibt, bei denen der Unterschied zweier Kubikzahlen wieder eine Kubikzahl sein kann. Der im 17. Jahrhundert lebende französische Mathematiker Fermat behauptete, daß es solche ausgezeichneten Gnomonwürfel nicht gebe. Den Beweis für diesen Tatbestand vermochte er nicht zu erbringen. Seit dem nennt man denselben den Fermatschen Unmöglichkeitssatz oder das Fermatsche Problem. Der Darmstädter Mathematiker Wolfskehl suchte der Wissenschaft einen Dienst zu leisten, indem er eine Summe von 100 000 Mark für denjenigen stiftete, welcher das Fermatsche Problem beweise. Der Preis wurde i. J. 1907 ausgesetzt und sollte i. J. 2007 erlöschen. Natürlich ist heute durch doppelte Geldentwertung nichts mehr davon vorhanden. Die Folgen dieser Preisaussetzung waren fürchterlich. Nicht so sehr traten die eigentlichen Mathematiker als Bewerber mit Lösungen hervor, sondern Ingenieure, Pastoren, Lehrer, Gymnasiasten, Studierende, Bankiers, Offiziere usw. Alle diese Beweise mußten gedruckt erscheinen und waren natürlich im Selbstverlag veröffentlicht. Ihre Zahl hatte bald die Tausend überschritten. Manche Bewerber haben sogar mit Klagen auf die Auszahlung „ihrer“ 100 000 Mark gedroht. Belehrungen über die Falschheit des Gedankenganges seitens einer eingesetzten Kommission, der auch der bekannte Professor Lietzmann angehörte, wurden mit Hohn zurückgewiesen oder mit überlegenem Lächeln oder Zeichen des

Weltschmerzes entgegengenommen. Ganz selten zeigte jemand Einsicht in die Unzulänglichkeit seiner Bemühungen. Einer dieser weißen Raben schrieb an Lietzmann:

Nicht zähl' ich zu den geistig Starren,
zu jenen unbedingten Narren –.
Ich hab's gewagt, ich geb's verloren;
zu andrem ist man noch geboren –,
und sie verzeihen einem Toren.

Das Fermatsche Problem in seiner Allgemeinheit ist noch heute unbewiesen.

Ernst Bindel

BIOGRAPHIEN IM 7. UND 8. SCHULJAHR

Rudolf Steiner hatte für das ausgehende siebente und für das achte Schuljahr den Rat gegeben, den Kindern Biographien zu erzählen. In diesem Alter beginnt auf der einen Seite die Pubertät: das kindliche Seelenleben fängt an, in schwere Erschütterungen zu kommen, das Verhältnis zu Vater und Mutter unterliegt starken Schwankungen, immer mehr gerät das Kind in Gegensatz zur Welt der Erwachsenen und empfindet seine persönliche Eigenartigkeit und Einsamkeit. Hin und wieder taucht die Frage nach dem Sinn des Lebens auf. All das ist vielleicht noch gar nicht klar bewußt, aber es rumort im Empfinden und Lebensgefühl der Kinder dieses Alters. – Auf der anderen Seite erleben sie noch immer Zeiten sonniger Unbekümmertheit und gnadenvoller Vertrauensseligkeit und Zukunftshoffnung. Noch empfangen sie von *geliebter* Autorität Gebotenes ohne Skeptizismus. Schon melden sich Ideale und Ziele und ein leises Erahnen der eigenen Individualität und Aufgabe. Es ist die Zeit, in der der junge Johann Gottlieb Fichte in alle Bücher das Motto schrieb: „*Und wenn geborsten die Welt zusammenbricht, werden den Furchtlosen selbst die Trümmer noch tragen!*“ (Das ist schon die Stimme des gleichen Geistes, der durch die „Reden an die Deutsche Nation“ tönt.)

Hier kann es nun kaum eine bessere Hilfe geben, als richtig gewählte Biographien, die, vom Lehrer innerlich warm und in deutlichen Bildern durchlebt, dem Kinde *erzählt* werden. Aber richtig gewählt müssen die Biographien sein. Sie müssen Menschen zeigen, die mit ihrem Schicksal