

1442. HEUCHAMPS E., *Sur les origines lointaines du théorème de Pythagore*: LEC 5 1936 61-72.

La découverte, en 1900, de deux tablettes de la 1^{re} dynastie babylonienne démontre que les Chaldéens connaissaient déjà « deux recettes opératoires pour le calcul de l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont on connaît les cathètes ». L'étude recherche les caractéristiques de ces recettes et le degré d'approximation atteint par chacune d'elles.

115
HEUCHAMPS
1936

SUR LES ORIGINES LOINTAINES DU THÉOREME DE PYTHAGORE

Résumé. — Deux mille ans avant notre ère, soit environ quinze siècles avant Pythagore, les Chaldéens proposèrent, pour le calcul de l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont on connaît les cathètes, deux recettes opératoires.

La présente étude a pour objet de rechercher les caractéristiques de ces recettes ainsi que l'approximation atteinte par chacune d'elles. Elle débute par un exposé sommaire de ce que nous connaissons au sujet de la double tentative chaldéenne (nos 1, 2, 3). Suivent quelques considérations générales sur ces dernières (no 4), dont on pourra trouver plus ample développement dans un excellent ouvrage de M. Abel Rey fréquemment cité et qui s'intitule *La science orientale avant les Grecs* (La Renaissance du livre, 78, Boulevard Saint-Michel, Paris, 35 frs).

La seconde partie de cette étude est technique. Les mathématiques auxquelles il est fait appel sont strictement élémentaires, les notations utilisées étant, évidemment, nos notations actuelles. La seconde recette chaldéenne, la meilleure, fournit toujours une valeur de l'hypoténuse par excès, mais une valeur assez satisfaisante (nos 5 à 7); plus exactement, et ceci est très curieux, elle fournit la valeur vraie en première approximation (nos 8 et 9). La première recette, sans doute plus ancienne, est plus souple mais nettement moins bonne que la seconde. Elle peut donner la valeur exacte de l'hypoténuse, mais, dans la presque totalité des cas, la seconde recette fournit une valeur beaucoup plus approchée que la première (nos 10 à 15).

I

1. L'examen, même très superficiel, d'un triangle rectangle montre que l'hypoténuse a est une fonction croissante des deux autres côtés b et c . Laissez b fixe et faites croître c ; a augmente. Fixez d'autre part c ; a croît avec b .

Environ cinq siècles avant notre ère, Pythagore fixa la relation exacte qui unit ces trois variables, la fonction, très simple, qui exprime cette dépendance étant, comme chacun sait,

$$a^2 = b^2 + c^2. \quad (1)$$

¹ Ce théorème fondamental et justement célèbre l'est, chez beaucoup, pour une mauvaise raison. Pour les élèves d'humanité, c'est « le pont aux ânes ». Pour les mathématiciens qui en apprécient toute l'importance, c'est moins un épouvantail que l'un des

Comme de coutume, la vérité n'a pas jailli sans que, préalablement, quelques tentatives partielles ou malhabiles n'eussent été faites.

Il sera question, dans ce qui va suivre, de deux essais tentés par les Chaldéens deux mille ans avant notre ère, soit quinze cents ans avant la réussite pythagoricienne. Les renseignements qui nous en sont parvenus sont très brefs, mais l'intérêt présenté par les documents chaldéens est considérable.

« En 1916, écrit M. Abel Rey, à qui nous empruntons ces lignes ¹, M. Weidener a attiré l'attention sur deux tablettes découvertes par Pinches, en 1900, qui remontent à la 1^{re} dynastie babylonienne (vers 2000 av. J.-C.). Elles sont relatives à un calcul d'arpentage ou d'architecture. Elles nous présentent un rectangle divisé par une diagonale en deux triangles rectangles. Un des côtés est coté 10 et l'autre 40. Le calcul nous donne la longueur de la diagonale. Il y a là, comme on voit, une mesure de l'ordre de celle que permettra le théorème de Pythagore. Cette diagonale est l'hypoténuse d'un triangle rectangle, dont on connaît les deux côtés de l'angle droit : 10 et 40 [...] ».

Les deux « recettes » chaldéennes, ainsi que les appelle M. Rey, procèdent toutes deux du même esprit. L'idée chaldéenne, idée primitive et, au reste, très naturelle, a été d'ajouter à l'un des côtés de l'angle droit, le plus grand, dans le cas présent, une quantité calculée. Cette quantité, les documents découverts en font foi, était, selon les Chaldéens, fonction de la longueur de chacune des deux cathètes. Et ceci, on en conviendra, est remarquable.

En langage moderne, nous exprimerions cette conclusion au moyen de la relation

$$a = c + f(b, c), \quad (2)$$

résultat capital du point de vue qualitatif.

pilliers de la géométrie euclidienne. J'avoue personnellement n'avoir jamais compris la raison du sinistre renom dont il jouit, l'éléphantasque démonstration des aïeux qui sévit dans les traités classiques étant, dans l'immense majorité des cas, parfaitement assimilée par les élèves. On peut, d'ailleurs, sans nuire au souci d'être complet, omettre simplement cette démonstration « énorme », qui a pour elle la seule force de l'habitude, et se borner à enseigner celle qui exige l'addition membre à membre des formules

$$\begin{aligned} b^2 &= a \cdot b', \\ c^2 &= a \cdot c', \end{aligned}$$

b' et c' étant les projections sur a de b et c . A la condition toutefois, condition passée généralement sous silence, de remarquer expressément que la relation ainsi obtenue intéresse les mesures des carrés des côtés du triangle et non les carrés construits sur ces côtés. En est-il autrement des théorèmes qui fixent les relations métriques entre côtés des triangles rectangles ou quelconques?

¹ Abel Rey, *La science orientale avant les Grecs*, p. 135.

Quantitativement, la question est beaucoup plus complexe, la forme de la fonction inconnue $f(b, c)$ étant délicate à déterminer.

Bien mieux. Nous, modernes, voyons immédiatement que la voie dans laquelle s'engageaient les Chaldéens était impraticable. Pour eux, primitifs, il ne pouvait pas être question de pareille évidence. Aussi bien est-ce l'esprit qui anime leur tentative qui nous paraît importer ici et non le résultat brut qu'ils atteignirent.

2. *Les recettes chaldéennes.* — Nous hésitons à les appeler formules, l'indication d'opérations à effectuer sur des grandeurs particulières ne pouvant porter pareil nom. Une formule suppose essentiellement des quantités variables et le cas relevé sur les tablettes chaldéennes a trait à des données particulières. Il s'agit, nous l'avons vu, de calculer la diagonale d'un rectangle dont les côtés mesurent 10 et 40 coudées.

La première des recettes chaldéennes recommande d'ajouter au plus long côté c la quantité $\frac{2b^2c}{3600}$; la diagonale cherchée vaut alors

$$a = c + \frac{2b^2c}{3600}. \quad (3)$$

Si la présence du facteur $\frac{1}{3600}$ surprend le lecteur, voici comment il doit l'entendre. On sait que la numération chaldéenne est sexagésimale. La quantité b^2c ayant les dimensions d'un volume, la présence de 3600 ou 60³ au dénominateur a simplement pour but de réduire la correction aux dimensions d'une longueur (60 ayant, dans ce cas, les dimensions d'une longueur); ou encore, 60 étant alors considéré comme abstrait, d'exprimer la quantité additionnelle en unités simples.

La seconde recette, tout en étant du même type, en diffère sensiblement; la quantité à ajouter est ici $\frac{b^2}{2c}$, de sorte que la diagonale

$$a = c + \frac{b^2}{2c}. \quad (4)$$

¹ Pour prévenir toute ambiguïté, je ferai remarquer que la quantité à ajouter n'est pas exprimée à la manière d'une formule, la tablette contenant simplement l'indication des calculs à effectuer.

3. *Application au cas particulier des tablettes.* — D'après le théorème de Pythagore, la diagonale cherchée vaut $\sqrt{1700} = 41,23 \dots$

La première recette nous invite — et ici, nous respectons vraiment la façon de procéder chaldéenne, la question de la numération sexagésimale mise à part, — à ajouter à 40 la quantité obtenue en

1° élevant au carré $b : 10^2 = 100$;

2° multipliant b^2 par $c : 100 \times 40 = 4000$;

3° réduisant le résultat obtenu à exprimer des unités simples : $\frac{4000}{3600} = 1,11 \dots^1$;

4° multipliant le résultat précédent par 2 : $1,11 \dots \times 2 = 2,22 \dots$

D'où l'hypoténuse = 42,22 ..., résultat fort peut exact, pour ne pas dire sans valeur.

La deuxième recette nous fournit une approximation beaucoup plus satisfaisante. La quantité à ajouter s'obtient ici en

1° élevant au carré $b : 10^2 = 100$;

2° divisant b^2 par le double de $c : \frac{100}{80} = 1,25$.

L'hypoténuse vaut alors 41,25, résultat excellent, la valeur exacte étant 41,23 ...

4. L'existence des recettes chaldéennes et surtout le fait de leur dualité appellent immédiatement quelques remarques.

Cela suppose d'abord, de la part des calculateurs babyloniens, un effort désintéressé. Ils auraient pu mesurer directement la diagonale dont ils cherchaient la longueur sans se préoccuper d'en fournir l'expression en fonction de ce que nous appellerons les données du problème. A moins, comme le fait remarquer M. Rey², que la recherche chaldéenne ne portât sur des grandeurs inaccessibles. Dans lequel cas, ajouterons-nous, la mesure effectuée sur des données accessibles eût supposé implicitement la connaissance autrement délicate de la notion de rapport de similitude.

¹ Comment les Chaldéens n'ont-ils pas vu que la correction $\frac{1}{3} \frac{bc}{60}$ ou $\frac{2bc}{360}$, l'une des plus simples auxquelles on puisse penser, plus simple certes que $\frac{2b^2c}{3600}$, donne le même résultat? Comment aussi expliquer la présence au numérateur du facteur 2 qui rend la correction si mauvaise?

² L. c., p. 145.

D'un autre côté, le fait qu'il existe deux recettes distinctes montre que les Chaldéens ont dû, — ceci toujours exprimé en langage moderne, — s'efforcer de trouver une relation entre a , b et c . Si cette relation ne peut, à proprement parler, s'appeler formule, elle s'en rapproche cependant singulièrement. A coup sûr, les tablettes ne mentionnent qu'un essai portant sur des données uniques. Mais ne pouvons-nous pas, dans ce cas comme dans tous ceux qui ont trait aux époques très anciennes, supposer légitimement que la plupart des documents relatifs à la question ne sont pas encore et ne seront sans doute jamais connus. Si, contre toute vraisemblance, la tentative chaldéenne n'a porté que sur un cas unique, celui-ci acquiert alors une importance hors pair, que rien, dans l'état actuel de nos connaissances, ne paraît justifier¹.

Le fait encore de la coexistence de deux procédés de calcul montre que ce dernier était approché, non exact. De là, à croire à l'existence d'une relation exacte que les Chaldéens auraient cherchée, il n'y a qu'un pas. Ont-ils cru l'avoir atteinte, étant donné l'excellente approximation de la seconde recette?

La coexistence de deux recettes pour un même cas concret peut cependant paraître étrange, car l'une des approximations est nettement meilleure que sa voisine. Se trouve-t-on, comme le fait remarquer M. Rey, devant deux recettes découvertes à des époques distinctes, la moins bonne étant la plus ancienne, et la seconde venant déjà corriger la précédente? « La seconde recette est nettement supérieure à la première », écrit M. Rey (p. 140). Pour le cas particulier étudié, certes. Mais, comme nous le montrerons plus loin, la recette supposée ancienne, est cependant d'une souplesse bien plus grande. Et ceci, qui marque une certaine incohérence dans l'effort supposé, mérite d'être souligné.

¹ M. Rey signale (p. 145) que le calcul chaldéen a pu servir, « non en surface, mais en plan vertical, pour une construction projetée ». Il s'arrête à deux hypothèses. Selon la première, le calcul serait d'origine astrologique; selon la seconde, qu'il croit la plus probable, mais que nous avouons modestement comprendre fort mal, l'hypoténuse serait « la pente des faces des gros murs dans les palais, les tours et les temples ». « En Égypte », ajoute M. Rey, cette pente varie, pour l'angle à la base de 87° à 81° (c'est nous qui soulignons) dans les monuments d'époques voisines. Elle est, pour la face externe du mur d'enceinte du temple du Nilot à Abu Gurab, de 85°54'8". « Bien sûr, mais les angles du triangle rectangle de côtés 10 et 40 ne sont pas, comme l'indique M. Rey, 85°57'41" et 14°2'10", mais 75°57'56" et 14°2'10". L'erreur est si grossière que l'on pense d'abord à une simple faute typographique. Mais que vaut alors la seconde hypothèse, étant données les pentes relevées plus haut?

Enfin, et cette dernière remarque nous paraît fondamentale — nous aurons plus loin l'occasion d'en montrer l'intérêt, — M. Rey signale, sans y insister beaucoup, l'analogie entre notre manière actuelle d'atteindre les lois empiriques et la manière chaldéenne (p. 140).

« Aujourd'hui encore, écrit-il (pp. 139 et 140), prenons garde que la physique nous présente en grand nombre des formules du même genre : une équation établie à l'aide de nombres trouvés expérimentalement, mais que rien ne justifie rationnellement, sinon sa réussite en un certain intervalle de mesures expérimentales. Seulement, la théorie physique cherche à la justifier, à l'expliquer hypothétiquement. Chez les Sumériens, aucune trace d'un effort pareil. Nous sommes bien en présence de la recette pure et simple. »

Il y a plus. Lorsqu'une loi physique est complexe, nous sérions la difficulté, nous en simplifions l'étude grâce au procédé du développement en série, autrement dit, nous en faisons le siège par approximations successives obtenues par voie d'addition. Bref, nous utilisons là un procédé général, le plus général peut-être qui commande le développement des sciences physiques.

Comme nous le verrons plus loin, les origines lointaines du théorème de Pythagore marquent la présence du même procédé. Sans doute est-ce inconsciemment que les Chaldéens en ont usé. Mais ceci n'illustre-t-il pas alors parfaitement combien il se présente naturellement à l'esprit humain ?

Il y a cependant deux différences profondes entre le procédé chaldéen et le nôtre.

D'abord, nous, modernes, nous soucions de l'erreur commise, en ce sens que nous recherchons avant tout son ordre de grandeur. Nulle trace de pareil souci chez les Chaldéens, du moins pour autant que nous puissions en juger par les documents que nous possédons. Alors que l'existence de deux formules semble indiquer nettement la recherche d'une meilleure approximation.

¹ Les anciens élèves de M. Alliaume qui liront ces lignes se souviennent certainement encore de l'importance qu'accordait le maître au principe fondamental qui, selon lui, avait dirigé suivant une voie simple et naturelle l'évolution de l'astronomie. L'homme rapporte d'abord à lui les phénomènes (coordonnées locales); puis, une meilleure appréciation des résultats fournis par l'observation lui montre la nécessité de rapporter les phénomènes au centre de la Terre (coordonnées géocentriques). Une connaissance meilleure et surtout mieux raisonnée des mouvements planétaires déplace à nouveau le centre de référence au centre de gravité du système solaire, pratiquement, celui du Soleil lui-même; d'où les coordonnées héliocentriques. De là, passage aux coordonnées galactiques ...

D'autre part, la manière chaldéenne de trouver leurs recettes et la nôtre diffèrent profondément. Nous faisons des observations dans un domaine étendu et nous nous efforçons de représenter l'ensemble des observations au moyen d'une loi. Les Chaldéens font, eux, des essais sur un cas particulier. Ce qui, à nous, modernes, nous paraîtra à tout le moins étrange, sauf le cas où le problème à résoudre est de haute importance.

II

5. Soit un triangle ABC rectangle en A, $b < c$. La quantité qu'il faut ajouter à c pour former a est

$$\begin{aligned} \gamma &= \sqrt{b^2 + c^2} - c \\ &= c (\sec B - 1) \\ &= c \operatorname{tg} B \operatorname{tg} \frac{1}{2} B. \end{aligned} \quad (5)$$

La seconde correction chaldéenne, que nous examinerons d'abord, est

$$\gamma_1 = \frac{1}{2} \frac{b^2}{c} = \frac{1}{2} c \operatorname{tg}^2 B. \quad (6)$$

On voit immédiatement que l'approximation chaldéenne confond $\frac{1}{2} \operatorname{tg} B$ et $\operatorname{tg} \frac{1}{2} B$.

6. L'approximation chaldéenne est une approximation par excès. Cela résulte de l'inégalité algébrique quasi-évidente

$$c + \frac{1}{2} \frac{b^2}{c} > \sqrt{b^2 + c^2} \quad (7)$$

ou encore, de l'identité trigonométrique

$$\frac{1}{2} \operatorname{tg} B = \operatorname{tg} \frac{1}{2} B \times \frac{1}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} B}. \quad (8)$$

Il est d'ailleurs aisé de prouver géométriquement la même conclusion. Aussi bien est-ce un problème géométrique que nous étudions ici.

Soit encore le triangle ABC rectangle en A, $b < c$. Soit BD = BA; CD = γ .

Si l'on mène de C une perpendiculaire à BC jusqu'en E, intersection avec BA prolongé et si H est le milieu de AE, AH = γ , car b est moyen proportionnel entre c et 2γ (6).

Dans le triangle ACE, AC < CE, AH = HE; l'angle ACH est donc supérieur à HCE, c'est-à-dire que ACH est supérieur à $\frac{1}{2} B$.

Dès lors, dans le triangle BCH, l'angle BCH est supérieur à $C + \frac{1}{2}B$, BHC est inférieur à $C + \frac{1}{2}B$, $BC < BH$; d'où, enfin, $DC < AH$.

7. Le tableau suivant, établi pour des valeurs de B variant de 5° en 5°, montre l'approximation que permet d'atteindre la recette chaldéenne.

L'approximation lue dans la colonne iv est celle que l'on obtient pour $b = 1$; elle est proportionnelle à b. Celle lue dans la colonne v est indépendante de b et c.

B	$\alpha = \frac{1}{2} \text{tg } B$	$\beta = \text{tg } \frac{1}{2} B$	$\alpha - \beta = \frac{1}{b} (\gamma_1 - \gamma)$	$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma_1}{\gamma}$ (avec 3 décimales)
5°	0,04375	0,04366	0,00009	1,002
10°	0,08817	0,08749	0,00068	1,008
15°	0,13398	0,13165	0,00233	1,018
20°	0,18199	0,17633	0,00566	1,032
25°	0,23316	0,22169	0,01147	1,052
30°	0,28868	0,26795	0,02073	1,077
35°	0,35011	0,31530	0,03481	1,110
40°	0,41955	0,36397	0,05558	1,152
45°	0,50000	0,41421	0,08579	1,207

8. Expression de γ en fonction du rapport $\frac{b}{c} = k$.

Supposons donné, non pas la mesure de chacune des cathètes b et c, mais seulement leur rapport $\frac{b}{c} = k$.

$$\gamma = c(\sqrt{1+k^2} - 1). \quad (9)$$

k étant < 1 , $(1+k^2)^{\frac{1}{2}}$ peut être développé en série convergente suivant la formule du binôme de Newton. La série étant alternée, l'erreur commise est, on le sait, inférieure au premier terme négligé. On trouve ainsi

$$\begin{aligned} \gamma &= c(1 - 1 + \frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{8}k^4 + \frac{1}{16}k^6 - \frac{5}{128}k^8 + \dots) \\ &= \frac{1}{2}c \cdot k^2 - \frac{1}{8}c \cdot k^4 + \frac{1}{16}c \cdot k^6 - \frac{5}{128}c \cdot k^8 + \dots \quad (10) \end{aligned}$$

En 1^{re} approximation,

$$\gamma_1 = \frac{1}{2} c k^2 = \frac{1}{2} \frac{b^2}{c}. \quad (11)$$

La correction exacte et la correction chaldéenne sont donc équivalentes en première approximation.

9. L'erreur tolérée par la deuxième recette chaldéenne est donc

$$f(k) = c \left[\frac{1}{2} k^2 - (1+k^2)^{-\frac{1}{2}} + 1 \right] \quad (12)$$

Or, $f(k) = c k [1 - (1+k^2)^{-\frac{1}{2}}]$, (13)
est toujours positive, $(1+k^2)^{-\frac{1}{2}}$ étant < 1 .

D'où l'erreur tolérée croît avec le rapport $\frac{b}{c}$, comme l'indiquait nettement le tableau du § 7.

10. Examinons à présent la première des recettes chaldéennes et rappelons que la correction, c'est-à-dire la quantité à ajouter à c est ici

$$\gamma_2 = 2c \frac{b^2}{3600}. \quad (14)$$

Lorsqu'on compare γ_1 et γ_2 , on remarque que si

$$\begin{aligned} c &< 30, & \gamma_2 &< \gamma_1; \\ c &= 30, & \gamma_2 &= \gamma_1; \\ c &> 30, & \gamma_2 &> \gamma_1 \end{aligned}$$

et réciproquement.

Trois conclusions s'imposent aussitôt.

Quelle que soit la valeur donnée à b, les deux corrections sont équivalentes lorsque $c = 30$; pour toute valeur de c supérieure à 30, la correction γ_2 fournit une valeur de a approchée par excès, moins approchée que celle fournie par γ_1 ; lorsque c est inférieur à 30, aucune conclusion immédiate n'est possible. En effet, et c'est ici que se manifeste la plus grande souplesse de la première des recettes chaldéennes, la correction γ_2 peut, lorsque c est inférieur à 30, être exacte, approchée par défaut ou par excès.

11. Pour que la correction γ_2 fournisse la valeur exacte de a, c étant < 30 , il faut et il suffit que

$$\sqrt{b^2 + c^2} = c + \frac{b^2 c}{1800}, \quad (15)$$

$$\text{ou} \quad b^2 c^2 + 3600 c^2 - 3240000 = 0. \quad (16)$$

Si l'on fixe une valeur pour c , celle correspondante de b est donnée par la relation

$$b^2 = \frac{3240000 - 3600 c^2}{c^2}; \quad (17)$$

en d'autres termes, la valeur du rapport $\frac{b}{c}$, tel que $\gamma_2 = \gamma$, est

$$\frac{b}{c} = 2 \left(\frac{30}{c} \right) \sqrt{\left(\frac{30}{c} \right)^2 - 1}. \quad (18)$$

Pour des valeurs de $\frac{b}{c}$ inférieures (supérieures) au second membre de (18), la formule (3) fournit a par défaut (par excès).

Si, au contraire, on se fixe b , la valeur correspondante de c est alors

$$c = \frac{1800}{\sqrt{3600 + b^2}} \\ = 30(1 + \beta^2)^{-\frac{1}{2}},$$

où $\beta = \frac{b}{60}$.

Pour des valeurs de c inférieures (supérieures) au second membre de (19), la formule (3) fournit a par défaut (par excès).

12. Si, dans (18), on suppose variables b et c , soit $y = \frac{b}{c}$ et $c = x$,

$$y = \frac{60}{x} \sqrt{\left(\frac{30}{x} \right)^2 - 1}. \quad (20)$$

L'étude de y_x montre que y est une fonction décroissante, c'est-à-dire, que le rapport $\frac{b}{c}$ croît lorsque c décroît.

13. Si l'on exige toujours que b soit inférieur à c , la valeur limite 1 du rapport $\frac{b}{c}$, telle que $\gamma_2 = \gamma$, sera atteinte lorsque

$$c^4 + 3600c^2 - 3240000 = 0, \quad (21)$$

équation obtenue en faisant dans (16) $b = c$.

On tire de (21)

$$b = c = 27,3 \dots \quad (22)$$

14. Nous nous proposons, dans ce qui va suivre, d'étudier l'approximation fournie par la correction γ_2 , dans le cas particulier où $b = 10$ correspondant à l'une des données des tablettes chaldéennes.

Soit donc $b = 10$ et c variant dans l'intervalle $(10 + \varepsilon, +\infty)$. Les formules (3) et (4) deviennent, dans ce cas,

$$a = c + \frac{c}{18} \quad (23)$$

$$\text{et} \quad a = c + \frac{50}{c}. \quad (24)$$

La relation (23) fournira pour a une valeur approchée par excès, exacte ou approchée par défaut suivant que

$$\frac{19c}{18} \cong \sqrt{100 + c^2}, \quad (25)$$

c'est-à-dire, toutes transformations effectuées suivant que

$$c \cong 29,591 \dots \quad (26)$$

En particulier, la formule (23) est exacte lorsque $B = 18^\circ 40'$ environ.

15. Existe-t-il des valeurs de c pour lesquelles les valeurs de a approchées par défaut fournies par (23) sont plus approchées que celles approchées par excès fournies par (21)? ($b = 10$, comme précédemment).

Dans ce cas,

$$a - \frac{19c}{18} < c + \frac{50}{c} - a, \quad (27)$$

$$\text{ou} \quad 2a < \frac{37c^2 + 900}{18c},$$

$$36c \sqrt{100 + c^2} < 37c^2 + 900, \\ 1296c^2(100 + c^2) < 1369c^4 + 66600c^2 + 810000, \\ -73c^4 + 63000c^2 - 810000 < 0. \quad (28)$$

Les racines en c^2 sont

$$c^2 = \frac{31500 \pm 30547,1766\dots}{73}$$

$$\text{ou} \quad (c^2)^* = 849,9613\dots \quad \text{et} \quad (c^2)^{**} = 13,0523\dots;$$

c étant > 10 , l'inéquation (28) est satisfaite pour $c > 29,15\dots$

En résumé,

1° Lorsque $c < 29,15\dots$, la formule (24) fournit un résultat plus approché que (23);

2° Lorsque $29,15 \dots < c < 30$, l'inverse a lieu,
a) la correction γ , étant approchée par défaut lorsque
 $29,15 \dots < c < 29,59 \dots$

β) la correction γ , étant approchée par excès lorsque
 $29,59 \dots < c < 30$.

16. *Conclusions.* En résumé,

1° Celle que nous appelons la seconde recette chaldéenne (4) confond $\frac{1}{2} \operatorname{tg} B$ et $\operatorname{tg} \frac{1}{2} B$. Elle fournit toujours une valeur de a approchée par excès, mais l'approximation est très satisfaisante (voir tableau 97). La correction chaldéenne et la correction exacte sont équivalentes en première approximation, la correction exacte étant supposée fonction du rapport $\frac{b}{c}$. L'erreur tolérée croît avec ce dernier rapport.

2° La première recette chaldéenne, nettement inférieure à la précédente dans le cas particulier des tablettes chaldéennes, s'en distingue cependant par ce que l'on pourrait appeler une élasticité beaucoup plus considérable. Elle peut, en effet, être approchée par défaut ou par excès et même être exacte. Ceci, à condition que c soit inférieur à 30. Toutefois, l'intervalle des valeurs de c pour lesquelles l'approximation qu'elle fournit est meilleure que celle donnée par la recette précédente est fort restreint. N'était la présence du facteur 2 au numérateur de la première correction, celle-ci serait beaucoup meilleure. La suppression de ce facteur n'augmente cependant pas sérieusement l'« élasticité » de la recette.

3° Les deux recettes sont équivalentes, quel que soit b , pour $c = 30$.

Edgard HEUCHAMPS,
professeur à l'Athénée royal de Dinant.

Heuchamps, E.

Sur l'origine lointaines du
théorème de P

Etudes classiques Namur

51 61-72

fin