

155
SZABO, A.
1969

C 3

A. SZABÓ

WIE KAMEN DIE PYTHAGOREER ZU DEM SATZ EUCL., ELEM. II 5?*

I

Man hält den Satz «Elem.» II 5 – nach den Ergebnissen jener historischen Forschung, die heute gewissermaßen als *consensus doctorum* gilt – für einen Bestandteil der *altpythagoreischen Mathematik*, genauer: für einen Satz der sog. *geometrischen Algebra der Pythagoreer*. Gewöhnlich wird nämlich dieser Satz zusammen mit dem unmittelbar nach ihm folgenden, dem Satz II 6 behandelt. Diese beiden besagen:

II 5: «Teilt man eine Strecke sowohl in gleiche als auch in ungleiche Abschnitte, so ist das Rechteck aus den ungleichen Abschnitten der ganzen Strecke zusammen mit dem Quadrat über der Strecke zwischen den Teilpunkten dem Quadrat über der Hälfte gleich.»

II 6: «Halbiert man eine Strecke und setzt man ihr irgendeine Strecke gerade an, so ist das Rechteck aus der ganzen Strecke mit Verlängerung und der Verlängerung, zusammen mit dem Quadrat über der Hälfte, dem Quadrat über der aus der Hälfte und der Verlängerung zusammengesetzten Strecke gleich.»

Man liest in der heute maßgeblichen historischen Darstellung der griechischen Mathematik über den Satz II 5 die Feststellung, daß dieser sich als ein geometrisches Äquivalent für unsere algebraische Formel

$$a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$$

bzw. für

$$a^2 = (a - b) \cdot (a + b) + b^2$$

auffassen läßt.¹ Aber eigentlich besagt dasselbe auch der Satz II 6. Wozu diese *«seltsame doppelte Form»*? – Es wurde versucht, dieses Rätsel folgendermaßen zu erklären:² im Grunde wären II 5 und II 6 nicht Sätze, sondern *Lösungen von Aufgaben*: es handelte sich in II 5 um die Konstruktion von zwei Strecken x und y , deren *Summe und Produkt* gegeben sind, während

* Text eines Kurzvortrags für die Griechische Akademie in Athen; vorgetragen am 16. 5. 1968.

¹ B. L. v. d. WAERDEN, *Erwachende Wissenschaft*, Basel-Stuttgart 1956 196.

² Ebd. 198. – Natürlich geht diese Erklärung auf H. G. ZEUTHEN, bzw. noch auf P. TANNERY zurück; siehe unten meine Anm. 6.

in II 6 die Differenz und das Produkt gegeben sind. Unter «Aufgaben» – um deren Lösung es sich hier handeln soll – verstand man eigentlich «algebraische Aufgaben», die man erst nachträglich in geometrisches Gewand gekleidet hätte.³ Ursprünglich hätten nämlich noch die Babylonier sich diese algebraischen Aufgaben gestellt und gelöst,⁴ und die Pythagoreer hätten – wie es uns versichert wird – offensichtlich die babylonischen Regeln zur Lösung der algebraischen Systeme geometrisch formuliert und bewiesen.⁵

Ablehnen muß ich diese historische Interpretation aus den folgenden Gründen:

1. Selbst wenn wir glauben, daß es eine «babylonische Algebra» wirklich gegeben hatte – wie O. Neugebauers Forschungen uns davon überzeugen möchten –, auch dann hat man bisher noch mit gar keiner konkreten Angabe wahrscheinlich machen können, daß die Griechen in voreuklidischer Zeit eine solche Algebra wirklich gekannt hatten, geschweige denn, daß sie dieselbe übernommen und geometrisiert hätten. (Die Griechen haben nicht einmal die positionelle Bezeichnungsart der Zahlen von den Babyloniern übernommen!)

2. Jene Sätze bei Euklid, die man gewohnt ist – seit einer Arbeit von P. Tannery⁶ – als «algebraische Sätze in geometrischem Gewand» anzusehen, haben mit der Algebra in der Wirklichkeit nursoviel zu tun, daß wir in der Tat sehr leicht unsere algebraischen Äquivalente für diese Sätze angeben können. Aber es kann gar keine Rede davon sein, daß diese Theoreme ursprünglich «algebraische Sätze», oder Lösungen für «algebraische Aufgaben» gewesen wären. Nein, diese sind alle – sowohl die Sätze, wie auch die Aufgaben – rein geometrischen Ursprungs. Auch II 5 ist ein rein geometrischer Satz. Wohl kann man diesen Satz in der modernen Interpretation mit einer «algebraischen Aufgabenlösung» vergleichen. Aber man überlege sich, damit ein solcher Vergleich den ursprünglichen und echt geometrischen Sinn des Satzes nicht verdunkelt!

³ In diesem Sinne wird II 5 natürlich auch bei TH. L. HEATH, Euclid's Elements vol. I 382 ff. (Dover Publication) behandelt. Darum redet HEATH über eine «Geometrical solution of a quadratic equation». Der Unterschied gegen B. L. v. d. WAERDEN besteht bloß darin, daß HEATH «Babylon» noch nicht erwähnt. Er hat ja seine Kompilation noch vor O. NEUGEBAUER zusammengestellt. Siehe die nächste Anm.

⁴ Hingewiesen wird dabei gewöhnlich auf den Entdecker der sog. babylonischen Algebra: O. NEUGEBAUER, «Zur geometrischen Algebra. Studien zur Geschichte der antiken Algebra III.», Quellen und Studien zur Gesch. d. Math. etc. B 3 1936 245–259.

⁵ Das letztere nach B. L. v. d. WAERDEN, op. cit. 203.

⁶ P. TANNERY: «De la solution géométrique des problèmes du second degré avant Euclide», 1882 = Mémoires Scientifiques I. Paris 1912. 254–280. – H. G. ZEUTHEN, dessen «Verdienste» um die Entdeckung der sog. «geometrischen Algebra der Griechen» durch O. NEUGEBAUER (siehe oben meine Anm. 4) so übertrieben hervorgehoben wurden, hat in der Wirklichkeit in seinen beiden Werken («Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum, Kopenhagen 1886» und «Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter, Kopenhagen 1896»; ein Auszug aus dem letzteren Werk auch bei O. BECKER, «Zur Gesch. d. griech. Mathematik, Darmstadt, 1965» 18 ff.) – was die «geometrische Algebra» betrifft – nur den irreführenden Vergleich von P. TANNERY weitergebaut. (Man hätte sich nämlich erst einmal fragen müssen: inwiefern überhaupt erlaubt ist, im Zusammenhang mit EUKLID's geometrischen Konstruktionen über Lösungen von algebraischen Gleichungen zu reden!)

II

Nach meiner historischen Interpretation ist II 5 – wie man es im folgenden sehen wird – ein rein geometrischer Hilfssatz zu der Lösung bzw. zu dem Lösungsbeweis jener ebenfalls rein geometrischen Aufgabe, die in dem Satz II 14 folgendermaßen gestellt wird:

«Ein einer gegebenen geradlinigen Figur gleiches Quadrat zu errichten.»

Daß der Satz II 5 in der Tat ein Hilfssatz zu dem eben genannten II 14 ist, das ersieht man zunächst nicht bloß aus den modernen Ausgaben und Übersetzungen, in denen anlässlich des Satzes II 14 auf II 5 meistens zurückverwiesen wird, sondern noch mehr aus dem Wortlaut des Urtextes. Denn in dem Beweisteil des Satzes II 14 wird ja der Wortlaut von II 5 weitgehend wiederholt – zum Zeichen dessen, daß auch der antike Verfasser auf II 5 zurückverweisen wollte.

Ja, denkt man an die komplizierte, schwerfällige sprachliche Form des II 5, so muß man sich unwillkürlich fragen: ist dieser Satz nicht sozusagen ein «Fertigbauteil» zu dem anderen (II 14)? Mußte der antike Verfasser den II 5 nicht eben deswegen so kompliziert und schwerfällig formulieren, weil er im voraus wußte, daß er das betreffende Theorem eben in dieser, scheinbar schwerfälligen sprachlichen Form wird in dem Beweis des II 14 am bequemsten gebrauchen können? – Ich werde in dem folgenden zeigen, daß zwischen den beiden Sätzen – II 5 und II 14 – in der Tat eben dieser Zusammenhang besteht.

Aber ich möchte hier nebenbei auch darauf hinweisen, daß offenbar eine ebensolche Erklärung auch noch für andere Sätze bei Euklid gültig sein muß, die man bisher ähnlicherweise als Bestandteile einer «geometrischen Algebra» erklären wollte. Der oben zitierte Satz II 6 ist z. B. ein ebenso rein geometrischer Hilfssatz (ebenfalls ein «Fertigbauteil») zu dem Beweis des Satzes II 11, wie II 5 zu dem Beweis des Satzes II 14. Der Satz II 6 sieht nur darum als ein «Spezialfall» des II 5 aus, weil auch sein Hauptsatz, der hochinteressante II 11 (zu dessen Beweis II 6 benutzt wird) im Grunde nur ein Spezialfall des II 14 ist. Kein Wunder, daß eben deswegen auch die Hilfssätze – II 5 und 6 – zu den beiden wichtigsten Sätzen II 14 und II 11 als Spezialfälle voneinander aussehen.

Ja, genau auf dieselbe Weise ein rein geometrischer Hilfssatz, ein «Fertigbauteil» ist auch der Satz II 10, den man ebenfalls zu der «geometrischen Algebra» hinzurechnen wollte.⁷ Daß in der Wirklichkeit derselbe Satz (II 10) ein Hilfssatz ist, wird durch Proklos bezeugt.⁸ Wohl wurde in diesem Fall das betreffende alpythagoreische Theorem, zu dessen Beweis man II 10 benutzt hatte, in Euklids «Elemente» nicht aufgenommen, aber die moderne

⁷ Vgl. B. L. v. d. WAERDEN, op. cit. 202.

⁸ Kommentar zu PLATONS Staat II. Kapitel 23 und 27.

Forschung vermochte dasselbe Theorem — eben aufgrund der erwähnten Proklos-Stelle — über jeden Zweifel zu rekonstruieren.⁹

Ich möchte jedoch in diesem Zusammenhang einstweilen nur die Genesis des Satzes II 5 näher beleuchten. Darum muß ich in dem nächsten Kapitel vor allem an einige Elemente einer interessanten pythagoreischen Theorie über die Flächenbestandteile der Parallelogramme erinnern.

III

Wir wollen zunächst von jener Szene in Platons Dialog 'Menon' (82 B — 85 E) ausgehen, wonach dem ungelerten Sklaven durch Sokrates die Frage gestellt wird: wie verdoppelt man die Fläche jenes Quadrats (in Quadratform), dessen Seite 2 Fuß lang ist. Mit anderen Worten: wie lang wird die Seite jenes anderen Quadrats — als eine Zahl ausgedrückt —, dessen Fläche das Doppelte der Fläche des gegebenen mit 2 Fuß langer Seite darstellt? — Der Sklave glaubt zunächst, daß man, um die Fläche des Quadrats zu verdoppeln, seine Seite verdoppeln müßte. Er möchte also das gesuchte Längenmaß als die Zahl 4 angeben. Aber Sokrates zeigt ihm, sogleich nach dieser ersten Antwort, daß durch die Verdoppelung der Seite die Fläche des Quadrats nicht verdoppelt sondern vervierfacht wird. (Die Fläche des Quadrats mit 4 Fuß langer Seite besteht aus 16 kleinen Quadraten, wobei das Ausgangsquadrat aus 4 solchen bestand; siehe Abb. 1.) Der nächste Versuch des Sklaven — das Längenmaß der gesuchten Quadratseite als eine Zahl zu bestimmen — geht darauf hinaus, daß vielleicht das Quadrat mit 3 Fuß langer Seite die doppelte Fläche des Quadrats mit 2 Fuß langer Seite haben könnte. Aber Sokrates zeigt — wieder vermittelt einer Zeichnung (siehe Abb. 2) —, daß die Fläche des Quadrats mit 3 Fuß langer Seite aus 9 kleinen Quadraten besteht, also keineswegs das Doppelte der ursprünglichen Quadratfläche ist. — Es wird also in diesen beiden ersten Versuchen wohl angedeutet, daß die Seite des Quadrats, dessen Fläche das Doppelte eines anderen (kleineren) Quadrats mit zahlenmäßig bestimmter Seite darstellt, sich nicht als eine Zahl angeben läßt. In der Tat ist die gesuchte Quadratseite — zu der Seite des gegebenen Quadrats — eine der Länge nach inkommensurable Größe. Merkwürdigerweise wird jedoch das Problem der Inkommensurabilität in unserer Platon-Szene ausdrücklich nicht erwähnt. Anstatt dessen zeigt Sokrates — vermittelt einer neuen Zeichnung (Abb. 3) —, daß die Diagonale die Fläche des Quadrats in zwei untereinander gleiche gleichschenklige Dreiecke auflöst, und daß man eben deswegen mit der Diagonale als Seite ein solches größeres Quadrat konstruieren kann, dessen Fläche — wie die Zeichnung zeigt — gerade das Doppelte der ursprünglichen Quadratfläche ausmacht.

Ich glaube, wir dürfen aufgrund dieser 'Menon'-Szene zu rekonstruieren versuchen, wie einst die griechischen Mathematiker die lineare Inkommensurabilität entdeckt haben mögen.

⁹ B. L. v. d. WAERDEN, op. cit. 206 ff.

Es tauchte zunächst in der *Geometrie* ein arithmetisches Problem auf. Man ging von einem Quadrat aus, dessen Seite als eine Zahl gegeben war, und man wollte die Seite des dazugehörigen anderen Quadrats mit gerade doppeltem Flächeninhalt ebenfalls als eine Zahl angeben. Aber diese Aufgabe erwies sich innerhalb der *Arithmetik* — unter Beachtung

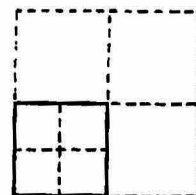


Abb. 1

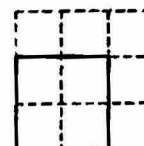


Abb. 2

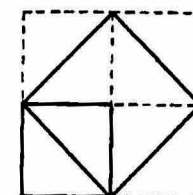


Abb. 3

der grundlegenden Euklidischen Definition für die «Zahl» (VII def. 2) — als unlösbar. Interessant war jedoch dasselbe Problem auch von der *Geometrie* her betrachtet. Nachdem man nämlich eingesehen hatte, daß die Fläche eines beliebigen Quadrats mit der Diagonale desselben, als mit Seite eines größeren Quadrats, sich verdoppeln läßt, und nachdem die Länge dieser Diagonale — im Verhältnis zu der Seite — sich zahlenmäßig nicht bestimmen ließ, mußte man wohl bald dahinterkommen, daß die Diagonale des Quadrats zu der Seite linear inkommensurabel ist. Die Entdeckung der linearen Inkommensurabilität ging jedoch Hand in Hand mit der Erkenntnis der quadratischen Kommensurabilität. Die Diagonale des Quadrats ist im Verhältnis zu der Seite nur der Länge nach unmeßbar; nachdem sie jedoch als Seite eines neuen Quadrats gerade die doppelte Fläche des ursprünglichen ergibt, ist sie quadratisch meßbar. — Die Schwierigkeit der linearen Inkommensurabilität kann also auf dem Wege der quadratischen Kommensurabilität umgangen werden.

Noch interessanter wird dieselbe 'Menon'-Szene von historischem Gesichtspunkt aus, wenn man bedenkt, daß das arithmetische Problem der Quadratverdoppelung mit dem Problem der Mittleren Proportionale zwischen einer Zahl und ihrem Doppelten äquivalent ist.¹⁰ Es muß in der Tat den pythagoreischen Arithmetikern der folgende Satz bekannt gewesen sein:

¹⁰ Wie bekannt, hat HIPPOKRATES von Chios vorgeschlagen: man soll zwischen einer Zahl und ihrem Doppelten zwei Mittlere Proportionale einfügen, und damit wird das Problem der Würfelverdoppelung gelöst; vgl. O. BECKER, Das mathematische Denken der Antike, Göttingen 1957, 76. — Aber wie kam HIPPOKRATES auf diesen glücklichen Einfall? — Offenbar auf dem Wege, daß er wußte: die planimetrische Aufgabe der Quadratverdoppelung wird dadurch gelöst, daß man zwischen einer Zahl und ihrem Doppelten eine Mittlere Proportionale einfügt; das verwandte stereometrische Problem der Würfelverdoppelung läßt sich also wohl dadurch — so mag HIPPOKRATES richtig geschlossen haben —, daß man anstatt einer einzigen zwei Mittlere Proportionale zwischen den fraglichen Größen (d. h. genauer: zwischen einer Größe und ihrem Doppelten) einfügt.

«Zwischen einer Zahl und ihrem Doppelten gibt es keine mittlere Proportionalzahl.»

Ich erschließe die Kenntnis dieses Satzes aus dem noch stärkeren Satz *Sectio canonis 3.* der besagt:

«Zwischen zwei Zahlen in überteiltem Verhältnis — also: $(n + 1) : n$ — gibt es keine mittlere Proportionalzahl.»

Nun glaube ich — unter Berücksichtigung des oben angeführten arithmetischen Satzes, sowie der vorhin erwähnten 'Menon'-Szene — drei interessante Schritte in der Entwicklung der voreuklidischen Mathematik folgendermaßen rekonstruieren zu dürfen:

a) Es tauchten zunächst in der Arithmetik Probleme auf, die man nicht lösen konnte. Man ist dann, auf dem Wege der genaueren Untersuchung, bald dahintergekommen, daß diese Probleme in der Arithmetik entweder *völlig unlösbar*, oder *nur unter gewissen Bedingungen lösbar* sind. Ein solches unlösbares Problem der Arithmetik war z. B. die mittlere Proportionalzahl (x) zwischen einer Zahl und ihrem Doppelten (also zwischen a und $2a$). Es war natürlich eine große Errungenschaft, wenn man schon aussagen, und auch begründen konnte: warum es eine solche Zahl nicht geben kann.

b) Man hat wohl erst verhältnismäßig *später* entdeckt, daß man dieselben unlösbaren (oder auch nur unter gewissen Bedingungen lösbaren) arithmetischen Probleme auf geometrischem Wege leicht lösen kann. Ist z. B. a nicht eine Zahl sondern eine beliebige gerade Strecke, so findet man die Mittlere Proportionale (x) zwischen a und $2a$ auf dem Wege, daß man mit a als Seite ein Quadrat konstruiert; die Diagonale (d) dieses Quadrats wird die gesuchte Mittlere Proportionale ($d = x$), nachdem $a : d = d : 2a$ ist. Man beweist die letztere Proportionalität mit Hilfe von ähnlichen rechtwinkligen Dreiecken (siehe z. B. meine Abb. 3) — *gesetzt, daß die Verhältnissgleichheit (= Proportionalität) auch für inkommensurable Größen definiert ist, wie z. B. in der sog. eudoxischen Definition bei Euklid, «Elem.» V. def. 5.* — Man sieht also, daß auf dieser Entwicklungsstufe die geometrische Lösung derselben Aufgabe, die auf Stufe a) arithmetisch unlösbar erschien, auf das engste verbunden ist — nicht nur mit der Kenntnis der Inkommensurabilität, sondern auch mit derjenigen der eudoxischen Definition der Proportionalität.

c) Es gibt jedoch auch eine «mittlere Entwicklungsstufe»¹¹ zwischen a) und b). Man kann nämlich die arithmetisch unlösbaren Probleme der Stufe a) geometrisch auch so lösen, daß dabei weder das Problem der Kommensurabi-

¹¹ Ich will natürlich keineswegs behaupten, daß die Stufe c) auch zeitlich der Stufe b) unbedingt vorangehen muß. Die Stufen b) und c) könnten sehr wohl auch gleichzeitig sein. Wichtiger als die Frage der Chronologie — die sich hier nicht entscheiden läßt (denn schließlich ist ja auch das nicht unbedingt sicher, daß die sog. «eudoxische Definition der Proportionalität» wirklich erst von Eudoxos stammt!) — scheint mir die Tatsache selbst, daß die Stufe c) den Versuch zeigt, das betreffende Problem ohne Rücksicht auf Proportionen und auf Inkommensurabilität zu lösen.

lität (bzw. Inkommensurabilität) noch die Frage der Proportionen berücksichtigt werden. Allerdings muß man dazu die ursprüngliche Aufgabe transformieren. Man fragt z. B. in dem vorhin behandelten Fall nicht nach der Mittleren Proportionale zwischen einer Zahl (oder Größe) und ihrem Doppelten, sondern man fragt nach jener Strecke, mit deren Hilfe ein Quadrat mit gegebener Seite (a) sich verdoppeln läßt. Diese letztere Frage ist der vorigen (nach der Mittleren Proportionale) völlig gleichwertig; doch braucht man nach der Transformation sich gar nicht mehr um die Proportionen und um die Frage der Inkommensurabilität zu kümmern. Die große Bedeutung dieser mittleren Entwicklungsstufe besteht eben darin, daß die Transformation der Aufgabe die Probleme der Proportionen und der Inkommensurabilität sozusagen ausschaltet. Vermutlich eben die Entdeckung dessen, daß die angedeutete Transformation möglich ist, hat den Ausbau jener interessanten pythagoreischen 'Flächengeometrie' veranlaßt, die ich in dem folgenden behandeln werde, und die man früher als «geometrische Algebra» interpretieren wollte.

*

Nun möchte ich hier vor allem darauf hinweisen, daß jene historische Entwicklung in drei Stufen, die ich (in den Punkten a, b und c) zu rekonstruieren versuchte, sich in der Tat mit zahlreichen Beispielen aus Euklids «Elementen» illustrieren läßt. Es seien hier darum zunächst drei Beispiele dafür eingefügt.

Erstes Beispiel

Stufe a) Man denke an die folgenden arithmetischen Sätze in den «Elementen»:

IX. 16: «Sind zwei Zahlen gegeneinander prim, so ist nicht möglich, daß, wie die erste zur zweiten, sich die zweite zu einer weiteren verhielte.» (Sind also a und b relativ prim, so gibt es keine x , worauf $a : b = b : x$ wäre.)

IX. 18: «Bei zwei gegebenen Zahlen zu prüfen, ob es möglich ist, zu ihnen eine Dritte Proportionale zu finden.» (Also wie sollen die Zahlen a und b beschaffen sein, damit man eine x finden könne, worauf $a : b = b : x$ ist?)

IX. 19: «Bei drei gegebenen Zahlen zu prüfen, ob es möglich ist, zu ihnen eine Vierte Proportionale zu finden.» (Wie sollen die Zahlen a , b und c beschaffen sein, damit man eine x finden könne, worauf $a : b = c : x$ ist?)

Man ersieht aus diesen Sätzen, daß es zu jener Zeit, als diese abgefaßt wurden, den Arithmetikern schon bekannt war: die Aufgabe, eine Dritte Proportionale zu zwei gegebenen Zahlen, a und b — oder eine Vierte Proportionale zu drei gegebenen Zahlen, a , b und c — zu finden, ist nur unter gewissen Bedingungen lösbar.

Stufe b) Natürlich kann man dieselben Aufgaben in der Geometrie – wenn a , b und c keine Zahlen, sondern beliebige gerade Strecken sind – immer lösen. Eben dies wird bei Euklid in den Sätzen VI 11 und 12 gezeigt. Doch werden die Konstruktionen der letzteren Sätze nur aufgrund der eudoxischen Definition der Proportionalität gültig. Denn die gefundene Dritte bzw. Vierte Proportionale wird ja häufig eine inkommensurable Größe.

Stufe c) Man kann jedoch dieselben Aufgaben – auf einer vermutlich mittleren Entwicklungsstufe – auch ohne Rücksicht auf Proportionen und Inkommensurabilität allgemeingültig lösen, wenn man die folgende Transformation vollzieht. Die Frage nach der Dritten Proportionale zu zwei gegebenen Zahlen oder Größen ($a : b = b : x$) läßt sich auch so auffassen: gegeben ist das Quadrat b^2 , und man sucht das flächengleiche Rechteck ax , dessen eine Seite (a) ebenfalls gegeben ist. Ähnlicherweise transformiert man die Frage nach der Vierten Proportionale ($a : b = c : x$): gegeben ist das Rechteck bc , und man sucht das andere flächengleiche Rechteck mit der einen gegebenen Seite a . – Für beide Aufgaben gilt der Euklidische Satz:

I 44: «An eine gegebene Strecke ein einem gegebenen Dreieck gleiches Parallelogramm in einem gegebenen geradlinigen Winkel anzulegen.» (Nur zuliebe einer größeren Allgemeingültigkeit ist in dem Wortlaut dieses Satzes die gegebene Fläche, anstatt eines Rechtecks, ein «Dreieck»; und eben darum redet auch Euklid anstatt des anderen Rechtecks von einem «Parallelogramm in einem gegebenen geradlinigen Winkel».) Das ist die bekannte parabolische Flächenanlegung der Pythagoreer, bei der die Inkommensurabilität und die Proportionen nicht berücksichtigt werden.

Zweites Beispiel

Stufe a) Man beachte die beiden Sätze bei Euklid:¹²

VIII 18: «Zwischen zwei ähnlichen ebenen Zahlen gibt es eine Mittlere Proportionalzahl.»

VIII 20: «Läßt sich zwischen zwei Zahlen eine Mittlere Proportionalzahl einschalten, so müssen die Zahlen ähnliche ebene Zahlen sein.»

(Zugrundeliegen beiden Sätzen die Definitionen: VII def. 16 und def. 21.) Im Sinne dieser beiden Sätze gibt es also zwischen zwei Zahlen, a und b , nur dann eine Mittlere Proportionalzahl, wenn eine solche Faktorenerlegung möglich ist: $a = cd$ und $b = ef$, wobei $c : e = d : f$ ist. Wird diese Bedingung nicht erfüllt, so findet man keine Mittlere Proportionalzahl zwischen den beiden gegebenen Zahlen, d. h. die betreffende Aufgabe ist arithmetisch unlösbar.

Stufe b) Sind jedoch a und b keine Zahlen sondern beliebige gerade Strecken, so findet man zu ihnen immer die Mittlere Proportionale nach dem

¹² Ich zitiere den Satz VIII 18 – Einfachkeithalber – in verkürzter Form.

Euklidischen Satz VI 13. Doch ist die Konstruktion des letzteren Satzes wieder nur aufgrund der eudoxischen Definition der Proportionalität gültig. Denn die gefundene Mittlere Proportionale wird ja häufig eine inkommensurable Größe.

Stufe c) Man kann dasselbe Problem auf einer «mittleren Entwicklungsstufe» mit der folgenden Transformation lösen. Die Frage nach der Mittleren Proportionale zwischen zwei gegebenen Zahlen oder Größen ($a : x = x : b$) ist gleichwertig mit dem Problem: gegeben ist das Rechteck ab , und man sucht dazu das flächengleiche Quadrat (x^2). – Gerade diese Aufgabe wird bei Euklid – ohne Proportionen und ohne Rücksicht auf die Inkommensurabilität – in dem Satz II 14 gelöst.

Drittes Beispiel

Stufe a) Als drittes Beispiel möchte ich den sog. 'pythagoreischen Lehrsatz' selbst anführen. Wie bekannt, läßt sich dieser Satz arithmetisch nur dann verifizieren, wenn die Seiten des rechtwinkligen Dreiecks sog. 'pythagoreische Zahltripel' (also etwa 3, 4, 5; oder 7, 24, 25 etc.) sind. Es scheint, daß die Bahnbrecher der griechischen Mathematik in der Tat an dieser arithmetischen Verifikation interessiert waren. (Wohl darum hat man auch Regeln dafür ausgearbeitet, wie man solche Tripel in unbeschränkter Anzahl herstellen kann.¹³) Nun ist also die Verifikation des 'pythagoreischen Lehrsatzes' wohl auch eine solche Aufgabe, die in der Arithmetik nur unter sehr beschränkten Bedingungen lösbar ist.

Stufe b) Allgemeingültig beweist man den 'pythagoreischen Lehrsatz' meistens mit Hilfe von Proportionen, indem man von dem rechten Winkel auf die Hypotenuse das Lot fällt, und dadurch das gegebene rechtwinklige Dreieck in zwei kleinere, sowohl untereinander wie auch zu dem ursprünglichen Dreieck ähnliche rechtwinklige Dreiecke auflöst. Nachdem die Seiten der ähnlichen Dreiecke untereinander proportionell sind, kann man aus den entsprechenden Proportionen die bekannte Formel $a^2 + b^2 = c^2$ leicht ableiten. – Wohl ist ein solcher Beweis bei Euklid nicht überliefert worden. Da jedoch eine allgemeinere Form des 'pythagoreischen Lehrsatzes' auch bei Euklid (VI 31) mit Proportionen bewiesen wird, kann man mit Recht vermuten, daß der Beweis mit Proportionen für die gewöhnliche Form desselben Satzes auch schon in voreuklidischer Zeit wohl benutzt wurde. – Doch wird ein solcher Beweis mit Proportionen nur dann zwingend, wenn die Proportionalität auch für inkommensurable Größen irgendwie schon definiert ist. (Diese Aufgabe erfüllt bei Euklid die eudoxische Definition: V def. 5.)

Stufe c) Bei Euklid wird der 'pythagoreische Lehrsatz' (I 47) nicht mit Proportionen, sondern mit einer Art 'Flächengeometrie' bewiesen, für welche

¹³ Vgl. O. BECKER, Das mathematische Denken der Antike, 52 ff.

dasselbe charakteristisch ist, was auch in den beiden anderen Beispielen die Stufe c) kennzeichnet, daß sie nämlich die Proportionen und das Problem der Inkommensurabilität gar nicht berücksichtigt. (Zu dem folgenden siehe Abb. 4.) Verlängert man nämlich das Lot (CD) von dem rechten Winkel eines allgemeinen rechtwinkligen Dreiecks auf die Hypotenuse, so wird dadurch — also durch DE — das Quadrat auf der Hypotenuse in die beiden Rechtecke $\langle R_1 \rangle$ und $\langle R_2 \rangle$ geteilt. Daß nun $\langle R_1 \rangle = \langle Q_1 \rangle$ und $\langle R_2 \rangle = \langle Q_2 \rangle$ ist, wird folgendermaßen gezeigt. Die beiden schraffierten Dreiecke CAF und HAB (Abb. 5)

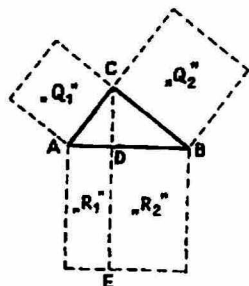


Abb. 4

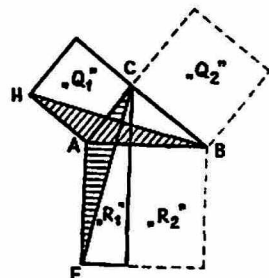


Abb. 5

sind offenbar kongruent; je zwei Seiten und ihr Winkel sind nämlich auf alle Fälle gleich. Das eine Dreieck (HAB) macht dabei die halbe Fläche von $\langle Q_1 \rangle$, während das andere (CAF) die halbe Fläche von $\langle R_1 \rangle$ aus (vgl. den Satz I 41 bei Euklid). Darum müssen also auch die ganzen Flächen $\langle Q_1 \rangle$ und $\langle R_1 \rangle$ untereinander gleich sein. — Mit ebensolchen «Hilfsdreiecken» beweist man auch die Gleichheit von $\langle Q_2 \rangle$ und $\langle R_2 \rangle$; und addiert man dann die beiden Teilergebnisse für $\langle R_1 \rangle$ und $\langle R_2 \rangle$, so hat man damit den pythagoreischen Lehrsatz 'flächengeometrisch' bewiesen.

Nun hoffe ich, sowohl mit dem 'Menon'-Beispiel wie auch mit den danach angeführten anderen drei Beispielen im voraus wahrscheinlich gemacht zu haben, daß jene 'Flächengeometrie', deren elementare Bestandteile in dem folgenden zusammengestellt werden — also die Stufen c) — die Anwendung von Proportionen und das Problem der Inkommensurabilität zu beseitigen bestrebt war.

*

Wir werden die elementarsten Bestandteile jener 'Flächengeometrie', die bisher, nach einem Vergleich von P. Tannery,¹⁴ als «geometrische Algebra» ausgelegt wurde, in drei Punkten überblicken.

¹⁴ Siehe oben Anm. 6.

1. Es wird sich lohnen, wieder von der Sklavenszene in Platons Dialog 'Menon' auszugehen. — Sokrates zeigt dem Sklaven zunächst ein Quadrat mit 2 Fuß langer Seite. Das gezeichnete Quadrat besteht also aus vier kleineren, nachdem die Seite zweigeteilt ist. Später wird durch Sokrates auch darauf hingewiesen, daß die Diagonale die Quadratfläche halbiert. (Siehe Abb. 6 sowohl für die Auflösung der Quadratfläche in vier kleinere Quadrate, wie auch für die Halbierung mittels der Diagonale. Schon hier muß ich auch die triviale Tatsache hervorheben, daß die Strecken, die die Seiten halbieren, und die Diagonale sich in einem Punkt schneiden. Dieser Schnittpunkt der Diagonale wird in dem folgenden eine wichtige Rolle spielen.) Nun sind die beiden Arten, die Quadratfläche in kleinere Bestandteile aufzulösen — also das Teilen mittels der Diagonale einerseits, und das Halbieren der Seiten andererseits —, in je einer allgemeineren Form, auch als Euklidische Sätze überliefert worden. Denn bei Euklid wird ja in dem Satz I 34 gerade dasselbe, was Sokrates über die Quadratdiagonale ausspricht, auf Parallelogramme verallgemeinert: «das Parallelogramm wird durch seine Diagonale halbiert». — Noch interessanter ist die Euklidische Verallgemeinerung dessen, wie man das Quadrat durch Teilen der Seite in kleinere Flächenbestandteile auflöst. Sokrates ging von jenem einfachsten Fall aus, daß die Seite des Quadrats halbiert wird; dies führt zu vier kleineren kongruenten Quadraten. Aber wie wird die Quadratfläche aufgelöst, wenn man die Seite in zwei beliebige Segmente teilt? Gerade dies wird bei Euklid in dem Satz II 4 behandelt:

«Teilt man eine Strecke, wie es gerade trifft, so ist das Quadrat über der ganzen Strecke den Quadraten über den Abschnitten und zweimal dem Rechteck aus den Abschnitten zusammen gleich.»

Durch das Teilen der Quadratsseite in zwei beliebige Segmente wird also die Quadratfläche selbst in die Summe von zwei verschiedenen Quadraten und von zwei kongruenten Rechtecken aufgelöst (siehe Abb. 7). — Wohl ist dieser Euklidische Satz das geometrische Äquivalent für unsere algebraische Formel $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, aber ich glaube nicht, daß man diese Tatsache in dem Sinne auslegen dürfte, als ob hier die «nachträgliche Geometrisierung eines ursprünglich algebraischen Gedankenganges» vorläge. Denn erstens kann man aus der griechischen Überlieferung der voreuklidischen und Euklidischen Zeit die Spuren von irgendwelchen echt algebraischen Gedankengängen gar nicht nachweisen. Und zweitens würde man durch die eben angedeutete historische Auslegung auch den grundlegenden Unterschied zwischen der angeführten algebraischen Formel und dem vorhin zitierten Euklidischen Satz unerlaubterweise verwischen. Schließlich ist ja der Ausdruck $(a + b)^2$ in der Algebra viel allgemeingültiger als der entsprechende bloß-geometrische Satz bei Euklid. (Der geometrische Satz ist nur eine mögliche Auslegung für die algebraische Formel, die jedoch keineswegs nur «Quadrate» und «Rechtecke» bedeuten kann!)

2. Es läßt sich zeigen, daß die Pythagoreer den eben zitierten Satz II 4 – über die Auflösung der Quadratfläche durch das Teilen der Seite in zwei beliebige Segmente – auch auf *Parallelelogramme* verallgemeinert hatten. Ihr alter Satz hieß etwa folgendermaßen (siehe Abb. 8):

«Zieht man durch einen beliebigen Punkt der Diagonale zwei Parallelen zu den beiden Seiten eines Parallelogramms, so wird dadurch die Fläche des Parallelogramms in insgesamt vier Flächenstücke zerlegt. Von diesen vier Flächenstücken sind zwei – die beiden 'um die Diagonale liegenden Parallelo-

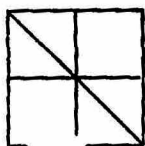


Abb. 6

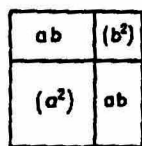


Abb. 7

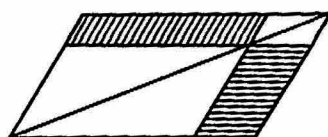


Abb. 8

gramme' (die leergelassene Flächenstücke in Abb. 8) – sowohl untereinander wie auch zu dem ursprünglichen Parallelogramm ähnlich, während die beiden anderen Flächenstücke – die sog. *παρὰπληρώματα* (schraffiert in Abb. 8) – untereinander gleich sind.»

Wohl ist dieser Satz zunächst nur meine eigene Rekonstruktion. Man findet ihn bei Euklid nirgends in dieser wiederhergestellten Form. Denn Euklid mußte ihn – offenbar aus kompositorischen Gründen – in zwei Sätze zerlegen, von denen der eine erst im Buch VI. der «Elemente» untergebracht werden konnte. In der Tat behandelt der Satz VI 24 die *Ähnlichkeit der 'um die Diagonale liegenden Parallelogramme'*; zu dem vollständigen Beweis dieses Satzes ist ja die *eudoxische Definition der Proportionalität* im V. Buch (V def. 5) unerlässlich nötig. – Dagegen konnte die andere Hälfte des rekonstruierten Satzes – über die *Gleichheit der 'Ergänzungen' (parapleromata)* – auch schon im I. Buch behandelt werden (I 43), nachdem in diesem Fall die Proportionalität und die Inkommensurabilität gar nicht berücksichtigt werden mußten. Der Beweis für diesen letzteren Satz wird einfach auf dem Wege von Subtraktion der überflüssigen Flächenstücke geführt.

Nun muß ich hier nachdrücklich betonen, daß der von mir eben rekonstruierte Satz eine sehr wichtige Rolle in jener 'pythagoreischen Flächengeometrie' gespielt hatte, die nach P. Tannery den unglücklichen und irreführenden Namen 'geometrische Algebra' erhielt. Der Satz über die Gleichheit der 'parapleromata' hat z. B. jene *parabolische Flächenanlegung* der Pythagoreer¹⁵ ermöglicht, auf die ich hier nochmals hinweisen möchte. – Es wurde

¹⁵ Proclus in Eucl. (F) 419, 16–420, 23; aus der modernen Literatur siehe dazu TH. L. HEATH, Euclid's Elements vol. 1, 343 f.

oben, anlässlich meines «ersten Beispiels», schon erwähnt, daß man die Suche nach der Vierten Proportionale zu drei gegebenen Zahlen oder Größen ($a : b = c : x$) auch so auffassen kann: gegeben ist das Rechteck bc , und man sucht dazu das andere flächengleiche Rechteck, dessen eine Seite (a) ebenfalls gegeben ist. Nun wird diese Aufgabe bei Euklid in dem Satz I 44 aufgrund der folgenden Überlegung gelöst (siehe Abb. 9 und 10): man faßt das gegebene Rechteck bc als ein 'parapleroma' auf. Eine beliebige Seite des gegebenen Rechtecks (c oder b) und die Strecke a ergeben im ersten Schritt das eine 'um die Diago-

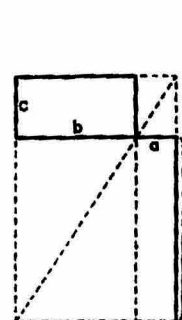


Abb. 9

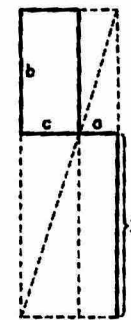


Abb. 10

nale liegende Parallelogramm' (ac oder ab). Die Verlängerung der Diagonale selbst und die Verlängerung der Rechteckseite (c oder b) ergeben im zweiten Schritt auch das andere 'um die Diagonale liegende Parallelogramm' (bx oder cx). Nachdem man nun das eine 'parapleroma' und die beiden 'um die Diagonale liegenden Parallelogramme' gewonnen hat, muß man nur noch das andere 'parapleroma' bzw. seine gesuchte Seite x hinzufügen. (*Parabolisch* heißt diese Art Flächenanlegung deswegen, weil die gegebene Fläche bc an die gegebene Strecke a angelegt wird; vgl. das Wort *παράβλλειν*.)

Aber es gibt auch einen anderen, wie mir scheint, noch wesentlicheren Beleg dafür, daß der vorhin rekonstruierte Satz eine sehr bedeutende Rolle in der Geometrie der Pythagoreer gespielt haben muß. Fasse man nur noch einmal denselben Satz ins Auge. Man zieht durch einen beliebigen Punkt der Diagonale zwei Parallelen zu den beiden Seiten eines Parallelogramms; es wird dadurch die gegebene Fläche in zwei solche Flächenstücke zerlegt, die untereinander gleich, und in zwei andere, die untereinander (und zu dem ursprünglichen Parallelogramm) ähnlich sind. – Hat nicht eben diese, an und für sich einfache und doch schöne Entdeckung auch zu jener berühmten *altpythagoreischen Aufgabe* geführt, über die Plutarch bei einer Gelegenheit (Symp. VIII 2, 4) folgendermaßen berichtet:

Es gibt unter den schönsten geometrischen Theoremen, oder eher Problemen, die folgende: gegeben sind zwei Figuren, und man soll eine dritte konstruieren, die der einen von den gegebenen gleich und der anderen von den gegebenen ähnlich ist. Man sagt auch, daß Pythagoras in seiner Freude über diese Entdeckung sein berühmtes Opfer dargebracht hätte. Kein Zweifel, dieses Theorem ist in der Tat viel raffinierter und der Wissenschaft viel würdiger, als jenes andere, wonach das Quadrat auf der Hypotenuse der Summe der Quadrate auf den beiden Katheten gleich ist.¹⁶

3. Zum Schluß muß ich unter den elementaren Bestandteilen der behandelten pythagoreischen 'Flächengeometrie' noch die Euklidische Definition für den geometrischen Begriff 'Gnomon' anführen:

II def. 2: *In jedem Parallelogramm soll ein beliebiges der um seine Diagonale liegenden Parallelogramme zusammen mit den beiden Ergänzungen (parapleromata) ein Gnomon heißen.*

Wie man sieht, hat auch zu diesem Begriff die vorhin behandelte *Vierteilung* des Parallelogramms geführt. Man zieht nämlich durch einen beliebigen Punkt der Diagonale zwei Parallelen zu den beiden Seiten des Parallelogramms. Aber diesmal werden von den insgesamt vier Flächenstücken, die auf diese Weise entstehen, drei — ein beliebiges der 'um die Diagonale liegenden Parallelogramme' und die beiden 'parapleromata' — als 'Gnomon' zusammengefaßt. Zur Illustrierung zeige ich als Abb. 11 den Gnomon eines Quadrats. Die drei Bestandteile des Gnomons wurden durch verschiedene Schraffierungen kenntlich gemacht. Außerdem zeigt diese Abbildung auch noch, daß das ursprüngliche Quadrat (x^2) diesmal in die Summe des kleineren Quadrats (y^2) und des Gnomons aufgelöst wurde. (Mit anderen Worten: subtrahiert man das kleinere Quadrat y^2 von dem größeren x^2 , so bleibt ein Gnomon übrig.)

Wichtig ist nun die eben angedeutete Auflösung des Quadrats (x^2) in die Summe eines kleineren Quadrats (y^2) und des Gnomons deswegen, weil man dabei den Gnomon selbst sehr leicht in ein Rechteck verwandeln kann. Ja, es gibt sogar zwei verschiedene Möglichkeiten für diese Verwandlung des Gnomons in flächengleiches Rechteck. Man kann nämlich entweder so verfahren, wie es unsere Abb. 12, oder so wie es die Abb. 13 zeigt. In dem einen Fall (Abb. 12) bleibt bloß das eine 'parapleroma' an seiner ursprünglichen Stelle; dagegen wird die Fläche, die aus dem 'Parallelogramm um die Diagonale' (dem kleinsten Quadrat, auf unserer Abbildung) und dem anderen 'parapleroma' besteht, dem an seiner Stelle belassenen 'parapleroma' als eine Art 'Fortsetzung nach links zu' hinzugefügt. — In dem anderen Fall (Abb. 13) bleiben dagegen das eine 'parapleroma' und das 'kleinste Quadrat' an ihren ursprünglichen Stellen,

¹⁶ Ich kann mich mit dieser Aufgabe in dem vorliegenden Zusammenhang nicht eingehender beschäftigen. Man vergleiche jedoch dazu, wie diese in der historischen Forschung bisher behandelt wurde, einstweilen TH. L. HEATH, Euclid's Elements vol. I, 343 ff.

und bloß das andere 'parapleroma' wird ihnen als 'Fortsetzung nach links zu' hinzugefügt. — In beiden Fällen wird die eine Seite des konstruierten Rechtecks, das dem Gnomon flächengleich ist (schraffiert in den Abb. 12 und 13): $x + y$, und die andere Seite: $x - y$. (Zu den Buchstaben x und y siehe auch Abb. 11.) Ein Unterschied besteht zwischen den beiden Fällen bloß insofern: was mit dem 'kleinsten Quadrat', dem Bestandteil des ursprünglichen Gnomons wird? — In dem ersten Fall (Abb. 12) scheint dieses kleinste Quadrat dem konstruierten Rechteck zu fehlen (ἐλλείπειν). Darum ist dies ein sog. *elliptischer Fall der Flächenanlegung*.

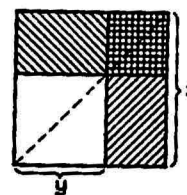


Abb. 11

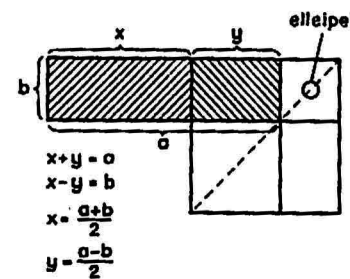


Abb. 12

Der andere Fall (Abb. 13) schießt dasselbe kleinste Quadrat über das Quadrat y^2 hinaus (Überschuß — ὑπερβολή). Darum ist dies ein *hyperbolischer Fall der Flächenanlegung*. — Nun kann ich mich in diesem Zusammenhang mit der 'Ellipse' und mit der 'Hyperbole' nicht eingehender beschäftigen.¹⁷ Es sei hier nur darauf hingewiesen, daß bei Euklid in der Konstruktion des Satzes II 5 eben die angedeutete *elliptische Flächenanlegung*, während in der Konstruktion des Satzes II 6 der *hyperbolische Fall* zur Anwendung kommt.

IV

Nun können wir zu dem Satz II 5, dessen Genesis hier erklärt werden soll, zurückkommen.

Es wurde oben im Kapitel II. schon angedeutet, daß dieser ein *Hilfssatz* zu dem Beweis des anderen wichtigen Satzes, II 14 ist; er wird auch in dem Beweisteil des letzteren wörtlich zitiert. Darum fassen wir vor allem den Satz II 14 näher ins Auge. Die in ihm behandelte Aufgabe heißt:

Ein einer gegebenen geradlinigen Figur gleiches Quadrat zu errichten.

Euklid erstrebt immer die größtmögliche Allgemeingültigkeit. Darum geht er nicht sogleich von einem Rechteck, sondern im allgemeinen von einer

¹⁷ Siehe wieder die vorige Anmerkung!

geradlinigen Figur» aus. Zuerst wird — unter Hinweis auf den früheren Satz I 45 — die gegebene »geradlinige Figur« in ein Rechteck verwandelt, und erst dann kommt der wesentliche Inhalt des Satzes II 14, der sog. 'tetragonismos' = »das Verwandeln des Rechtecks in flächengleiches Quadrat«.

Ich habe oben, in meinem »zweiten Beispiel« schon darauf hingewiesen, daß das Verwandeln eines Rechtecks in flächengleiches Quadrat der Aufgabe die Mittlere Proportionale zwischen zwei Zahlen oder Größen zu finden, gleichwertig ist. Die Konstruktion der Mittleren Proportionale zu zwei geraden

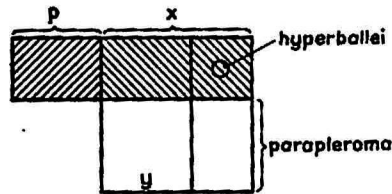


Abb. 13

Strecken wird bei Euklid in dem Satz VI 13 behandelt. Die beiden Sätze, VI 13 und II 14 führen also zu demselben Ergebnis.¹⁰ Uns interessiert jedoch diesmal eben der Unterschied der beiden Sätze.

Das Überraschende an den Konstruktionen in VI 13 und II 14 ist nämlich, daß die wichtigsten Schritte in beiden Fällen auf den ersten Anblick als völlig identisch aussehen (siehe Abb. 14). In beiden Fällen werden zunächst die Seiten des betreffenden Rechtecks — bzw. die Strecken a und b , zu denen man die Mittlere Proportionale sucht — einer geraden Linie entlang addiert. Dann halbiert man die Summe der beiden Strecken und man schlägt mit der halben Strecke den Halbkreis um den Halbierungspunkt. Und schließlich errichtet man die Senkrechte in dem Berührungspunkt der beiden Strecken a und b bis zur Peripherie des Halbkreises; die so gewonnene Strecke d wird die gesuchte Mittlere Proportionale zwischen a und b , bzw. die Seite des dem ab flächengleiches Quadrats.

¹⁰ Wie bekannt, hat J. L. HEIBERG (»Mathematisches zu Aristoteles«, Abhandlungen zur Gesch. d. math. Wissenschaften, 18. Heft, Leipzig 1904) unter Hinweis auf die beiden wichtigen ARISTOTELES-Stellen, *De anima* II 2,413a 13–20, und *Metaph.* B 2,996b 18–21, den Satz VI 13 für den älteren und ursprünglicheren gehalten; demgegenüber könnte — seiner Ansicht nach — II 14 eine jüngere Variante sein. Derselben Ansicht hat sich auch TH. L. HEATH (»Mathematics in Aristotle«, Oxford 1949 191–193) angeschlossen. — Ich muß in diesem Zusammenhang zwei Tatsachen festlegen: 1. der Satz II 14 ist aller Wahrscheinlichkeit nach altpythagoreisch; 2. die relative Chronologie der beiden Sätze VI 13 und II 14 läßt sich nicht mit Bestimmtheit entscheiden. (Siehe auch oben meine Anmerkung 11.) Auch VI 13 kann altpythagoreisch sein, obwohl zu seinem Beweis bei EUKLID allerdings die eudoxische Definition der Proportionalität nötig ist.

Beachtet man bloß die eben zusammengefaßten Schritte, so wäre man zunächst geneigt, die beiden Konstruktionen (VI 13 und II 14) für identisch zu halten. Und doch unterscheidet sich der Sinn derselben Schritte in den beiden Fällen so vollkommen wie nur möglich! Die Gedankengänge der beiden Sätze, die sich hinter den »identischen Schritten« stecken, sind völlig verschieden. Man überlege sich nämlich zunächst, welchen Sinn die eben ange-deuteten Schritte — von dem Gesichtspunkt des Satzes VI 13 aus — haben müssen.

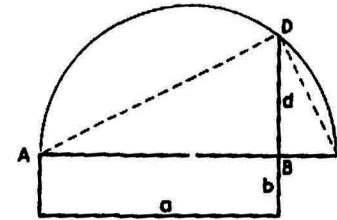


Abb. 14

Man addiert die beiden Segmente a und b — zu denen die Mittlere proportionale gesucht wird —, weil man die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks (AC, Abb. 14) bekommen will. (Man weiß dabei im voraus, daß a und b je für sich längere Kathete bzw. kürzere Kathete von zwei anderen rechtwinkligen Dreiecken werden!) Man halbiert das Segment AC, und man schlägt mit der halben Strecke den Halbkreis, weil man — im Sinne des thaletischen Satzes — zunächst die geometrischen Stellen aller jener rechtwinkligen Dreiecke sucht, deren Hypotenuse AC ist. Und schließlich wird d die gesuchte Mittlere Proportionale zwischen a und b , weil sie kürzere Kathete des rechtwinkligen Dreiecks ABD, und zu gleicher Zeit längere Kathete des rechtwinkligen Dreiecks BCD ist, wobei die Dreiecke ABD und BCD untereinander ähnlich sind. — Zweifellos bildeten eben diese Gedanken die Grundlage zu der Konstruktion in dem Satz VI 13. Aber man findet nichts von denselben Gedanken in der nur scheinbar identischen Konstruktion des Satzes II 14. — Versuchen wir in dem folgenden jene Gedankengänge zu reproduzieren, die zu der Konstruktion in dem Satz II 14 geführt hatten.¹¹

Soll man ein gegebenes Rechteck ab — ohne Anwendung von Proportionen — in flächengleiches Quadrat verwandeln, so denkt man etwa folgender-

¹¹ Ich möchte hier dankbar betonen, daß mein Leitfaden in der folgenden Rekonstruktion — wie auch sonst in der Rekonstruktion antiker mathematischer Gedankengänge sehr oft — das schöne Büchlein von G. PÓLYA, »How to solve it?« war. Ich bin überhaupt der Ansicht, daß nicht nur die mathematische Heuristik in den Dienst der historischen Forschung gestellt werden kann, sondern auch umgekehrt: die historische Forschung die keimende Wissenschaft der Heuristik fördern soll.

maßen. Wir haben sozusagen einen Weg hinter uns zu legen. Gegeben ist unser «Ausgangspunkt», das Rechteck ab . Das «Ziel», zu dem wir gelangen müssen, ist das dem Rechteck ab flächengleiche Quadrat, d^2 . — Man hat das Gefühl, daß «Ausgangspunkt» und «Ziel» ziemlich weit voneinander entfernt sind; es gibt sozusagen einen *Niveau-Unterschied* zwischen den beiden. Könnten «Ausgangspunkt» und «Ziel» nicht irgendwie einander nähergebracht werden? Es wäre z. B. sogleich etwas gemeinsames in dem «Ausgangspunkt» und in dem «Ziel», wenn man sie beide als *Ergebnisse je einer geometrischen Operation* auffassen könnte. Wie wird nun sowohl das gegebene Rechteck ab , wie auch das gesuchte Quadrat d^2 zum «Ergebnis je einer Operation»? — Wir wollen es zunächst mit dem Rechteck versuchen.

Man denke an die Subtraktion in den obigen Abbildungen 11 und 12. Subtrahiert man von einem größeren Quadrat x^2 ein kleineres y^2 , so bleibt ein 'Gnomon' übrig, der jedoch sehr leicht in das Rechteck $(x+y) \cdot (x-y)$ verwandelt werden kann. — Unser Rechteck (ab) unterscheidet sich von dem letzteren bloß darin, daß hier anstatt der Quadrate, die man auseinander subtrahieren soll — x^2 und y^2 —, unmittelbar die Seiten des Rechtecks a und b gegeben sind. Aber selbstverständlich kann man aus den beiden Seiten des Rechtecks auch die Quadrate x^2 und y^2 bekommen:

$$x^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \quad \text{und} \quad y^2 = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

(Siehe die Abb. 12.) Wir fassen also unseren «Ausgangspunkt», das Rechteck ab als die Differenz der beiden Quadrate $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$ auf. So wird der «Ausgangspunkt» zu dem «Ergebnis einer geometrischen Operation». (Eigentlich wird eben diese Transformation des «Ausgangspunktes» durch den Hilfsatz II 5 im voraus zustandegebracht!)

Ähnlich kann man auch das «Ziel», zu dem wir gelangen wollen, d^2 , als «Ergebnis einer anderen geometrischen Operation» auffassen. Ja, auch diese andere Operation kann eine *Subtraktion* sein. Denn für das rechtwinklige Dreieck in unserer Abb. 15 gilt ja der 'pythagoreische Lehrsatz': $x^2 = y^2 + d^2$. Subtrahiert man darum aus dem Quadrat der Hypotenuse das Quadrat der einen Kathete, so bekommt man das Quadrat der anderen Kathete: $x^2 - y^2 = d^2$. — Hat man dies erkannt, so hat man die Lösung unserer Aufgabe — das Verwandeln des Rechtecks ab in flächengleiches Quadrat — sozusagen schon in der Hand.

Denn vorhin führte die Subtraktion der beiden Quadrate auseinander zu einem Rechteck, und jetzt führte dieselbe Subtraktion²⁰ zu einem Quadrat. Will man also ein Rechteck ab in flächengleiches Quadrat verwandeln, so

²⁰ Meine Buchstabierung in Abb. 15 wollte im voraus den Gedankengang für den Leser erleichtern.

besteht die Lösung daraus, daß man die beiden Ergebnisse miteinander verbindet. Das größere Quadrat $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ von dem man das kleinere subtrahiert, wird das Quadrat auf der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks. Dagegen wird das kleinere, das subtrahierte Quadrat $\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$ das Quadrat auf der

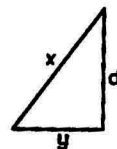


Abb. 15

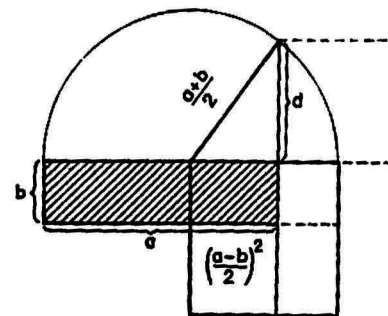


Abb. 16

einen Kathete. Aus den beiden Angaben: $\text{Hypotenuse} = \frac{a+b}{2}$ und eine

$\text{Kathete} = \frac{a-b}{2}$ soll man die andere Kathete des rechtwinkligen Dreiecks bekommen (siehe Abb. 16). Das Quadrat auf dieser anderen Kathete (d) ist flächengleich dem gegebenen Rechteck ab . Das ist der Sinn der Konstruktion im Satz II 14.

Man sieht also, daß das *Addieren* der beiden Seiten des Rechtecks ($a+b$) in dieser Konstruktion (s. Abb. 16) in der Tat einen anderen Sinn hat, als in dem Satz VI 13 (siehe zu dem letzteren die Abb. 14). Dort addierte man die beiden Strecken, weil die Summe $a+b$ Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks wurde. Diese Hypotenuse mußte in VI 13 *halbiert* werden, um den thaletischen Satz anwenden zu können. — Dagegen haben *dieselbe Addition und dieselbe Halbierung* in II 14 den Sinn, daß die halbe Summe der beiden Seiten des Rechtecks: $\frac{a+b}{2}$ selber Hypotenuse eines anderen rechtwinkligen Dreiecks wird (Abb. 16).

Es sei hier als eine interessante Tatsache noch hervorgehoben, daß in der Konstruktion des Satzes II 14 die Seite jenes kleineren Quadrats $\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$, das von dem Quadrat der Hypotenuse $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ subtrahiert wird, gar nicht

besonders konstruiert werden soll. Denn die Strecke zwischen dem Halbierungspunkt von $a + b$ und dem Berührungspunkt von a und b ist eben: $\frac{a-b}{2} = y$.

*

Zum Schluß muß ich noch meine frühere Behauptung — daß nämlich der Satz II 5 nur einen Hilfssatz, sozusagen einen «Fertigbauteil» zu dem Beweis des Satzes II 14 darstellt — etwas näher begründen.

Es sei vor allem darauf hingewiesen, daß Euklid den II 5 (den Wortlaut siehe oben am Anfang des I. Kapitels) an einer Zeichnung erklärt und beweist, die in allem wesentlichen meiner Abb. 12 entspricht. Mit dieser Abbildung habe ich veranschaulicht, wie die Pythagoreer eine beliebige Quadratfläche in die Summe eines kleineren Quadrats und eines Gnomons, bzw. in diejenige eines Quadrats und eines Rechtecks auflösten. Es handelt sich im Grunde eben um dasselbe auch in dem Satz II 5. Allerdings geht Euklid nicht von einem Quadrat, sondern von einer Strecke aus, die halbiert und in ungleiche Abschnitte geteilt wird. — Das Teilen in ungleiche Abschnitte ist offenbar nur die Umkehrung dessen, daß in II 14 die beiden Seiten des Rechtecks addiert werden. In II 14 macht man aus den beiden Seiten des Rechtecks eine Strecke, während in II 5 aus der gegebenen Strecke — durch beliebiges Teilen — ein Rechteck gemacht wird. — Die «Halbierungen» haben in beiden Sätzen — II 5 und 14. — denselben Sinn: auf die halbe Strecke wird jenes größere Quadrat errichtet, von dem ein kleineres subtrahiert werden soll.

Aber noch interessanter ist das folgende. Ich habe schon hervorgehoben, daß zu der Anwendung des 'pythagoreischen Lehrsatzes' in II 14 auch die halbe Differenz der beiden Rechteckseiten $\left(\frac{a-b}{2}\right)$ nötig ist. (Das Quadrat auf

dieser Strecke wird von dem Quadrat der Hypotenuse $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ subtrahiert.)

Man braucht jedoch diese Strecke gar nicht besonders zu konstruieren; sie ist die «Strecke zwischen dem Halbierungspunkt von $a + b$ und dem Berührungspunkt von a und b ». Dasselbe Segment wird bei Euklid in II 5 als die «Strecke zwischen den Teilpunkten» bezeichnet. — Auch diese sprachlich schwerfällige, beinahe unbeholfene Bezeichnungsart ist für mich ein schlagender Beweis dafür, daß der alte Geometer den Satz II 5 im Hinblick auf II 14 im voraus aufgestellt und bewiesen hatte.

V

Man könnte jene Ergebnisse der vorangestellten Untersuchung, die mir auch von dem Gesichtspunkt der weiteren Forschung aus als wichtig vorkommen, etwa in den folgenden Punkten zusammenfassen:

1. Der Satz II 5 ist ein rein geometrischer Hilfssatz zu dem Beweis des Satzes II 14. Es wäre irreführend, diesen Satz als «Lösung einer algebraischen Gleichung» aufzufassen. Die algebraische Auslegung — auch wenn sie dem Satz Euklids äquivalent ist — verdunkelt den wahren geometrischen Sinn dieses Satzes, und historisch erweckt sie den falschen Schein, als hätten die Griechen in voreuklidischer Zeit in der Tat mit «algebraischen Gleichungen» operiert.

2. Es wurde oben im Kapitel II. auch darauf hingewiesen, daß auch die übrigen Sätze der sog. «geometrischen Algebra der Pythagoreer» sich als rein geometrische Sätze erklären lassen. Dagegen hat man Spuren von echt algebraischen Gedankengängen²¹ aus der voreuklidischen und Euklidischen Überlieferung bisher nicht nachweisen können.

3. In einem Punkt werden jedoch die Gedanken von P. Tannery, mit denen er die späteren Spekulationen über die angebliche «geometrische Algebra der Griechen» angeregt hatte,²² beibehalten. P. Tannery war nämlich der Ansicht, daß diese Art Geometrie ihr Entstehen der Entdeckung der Inkommensurabilität zu verdanken hat. Es wurde in der Tat auch in meiner Arbeit darauf hingewiesen, daß die behandelte «Flächengeometrie der Pythagoreer» das Problem der Inkommensurabilität ausschaltet und die Benutzung von Proportionen konsequent vermeidet.

4. Jene Vermutungen, die die «geometrische Algebra der Pythagoreer» als Übernahme bzw. griechische Weiterentwicklung von ursprünglich babylonischen Gedankengängen auffassen wollten, waren voreilig. Der Zusammenhang dieser Art Kenntnisse mit der «babylonischen Wissenschaft» ist in der Wirklichkeit nirgends erwiesen. Im Gegenteil! Man hat eher den Eindruck, daß die hier behandelte «Flächengeometrie der Pythagoreer» eine rein griechische Errungenschaft war.

Budapest.

SZANÓ A., *Wie kamen die Pythagoreer zu dem Satz Eucl., Elem. II,5*: AAnt-Hung XVII 1969 149-169. | Le théorème II,5 est purement géométrique et fait partie de la preuve de II,14; il ne s'agit pas d'une équation algébrique. L'influence babylonienne doit donc être exclue.

²¹ Echt algebraisch ist z. B. die Interpretation von B. L. v. d. WAERDEN für den Beweis des Satzes II 14 (Erwachende Wissenschaft 1956, 193; oder Science awakening 1963, 118). Anstatt von Flächen arbeitet hier der moderne Verfasser mit Produkten aus zwei Faktoren, bzw. mit Größen zweiten Grades, wobei man die Gefahr läuft, daß in dem Leser der grundlegende Unterschied der Geometrie und der Algebra gar nicht bewußt wird. Natürlich ist auch der moderne Beweis von B. L. v. d. WAERDEN tadellos. Aber mit dem antiken Gedankengang hat er in der Wirklichkeit gar nichts zu tun.

²² Vgl. oben meine Anmerkung 6.