

160

WAERDEN, B.L.v.d.

1969

PLATON ET LES SCIENCES EXACTES DES PYTHAGORICIENS (*)

par B. L. VAN DER WAERDEN

Les Pythagoriciens avaient quatre sciences mathématiques, l'Arithmétique, la Géométrie, l'Harmonique, l'Astronomie.

Dans les livres 6 et 7 de la *République*, Platon traite exactement de ces quatre sciences. Parlant de l'harmonique, il dit que les Pythagoriciens se sont sérieusement occupés de la science de l'harmonie et de l'astronomie et qu'ils ont considéré ces deux sciences comme deux sœurs. Platon prend les sciences mathématiques des Pythagoriciens très au sérieux, mais il garde cependant une attitude critique: parfois il loue les mathématiciens et dit que leur science est « utile pour l'éducation de l'âme », parfois il n'est pas d'accord et veut réformer la science.

Quelle est donc la nature des sciences des Pythagoriciens?
Quels sont les points d'accord entre Platon et les Pythagoriciens?
Et en quels points la science idéale, dont rêve Platon, diffère-t-elle de la science des Pythagoriciens au temps de Platon?

Pour Platon, dans cette partie de la *République*, la chose la plus importante c'est l'éducation des « gardiens de la cité ». Ces gardiens sont à la fois des guerriers et des politiciens. Ils ont tout le pouvoir dans la cité et ils ont le devoir de la défendre contre les ennemis de dehors. Envers ces ennemis ils doivent être durs et forts, mais bons et justes envers les habitants: ils doivent être lions et brebis en même temps. Pour atteindre ce but, on doit leur donner une éducation très soignée. Il leur faut apprendre la philosophie et ils doivent être initiés à la théorie des idées, afin qu'ils reconnaissent l'idée de la justice. Il faut que les gardiens règlent toutes leurs actions sur l'idée de la justice.

Quelle est, d'après Platon, la méthode qui conduit à la connaissance des idées? C'est la dialectique. Qu'est la dialectique? C'est la méthode du dialogue. Dans un dialogue philosophique, on parvient à clarifier les notions, à réfuter des opinions fausses, à examiner des hypothèses.

(*) Conférence faite le 15 mars 1969 pour la Société belge de Logique et de Philosophie des Sciences.

B.L. Waerden, B.L.

Platon et les sciences exactes des
pythagoriciensBulletin de la Société mathématique
de Belgique

21 1969 115-123

Au commencement d'un dialogue socratique, l'interlocuteur croit qu'on sait quelque chose. Mais au cours du dialogue il est forcé d'admettre que c'est une illusion et qu'on ne sait rien. Par cette méthode de réfutation on déchire les illusions et les erreurs qui troublent la vision sur la *vérité* et la *vraie connaissance*. La vraie connaissance, selon Platon c'est la connaissance des *idées*. La fonction de la dialectique est de *préparer l'âme à la vision des idées*. Or, comme préparation à la dialectique les mathématiques sont indispensables. Pourquoi?

A la fin du livre 6 de la *République*, Socrate parle de ceux qui s'occupent de la *géométrie*, du *calcul* et des *autres sciences*. Il dit: (510 D)

Tu sais qu'ils se servent de figures visibles et qu'ils raisonnent sur ces figures, quoique ce ne soit point à elles qu'ils pensent, mais à d'autres auxquelles celles-ci ressemblent. Par exemple c'est du carré même et de la diagonale même qu'ils raisonnent, et non de la diagonale telle qu'ils la tracent, et il faut en dire autant de toutes les autres figures.

Donc: Les sciences mathématiques nous montrent qu'il y a des choses sur lesquelles on peut *raisonner* mais qu'on ne peut ni *voir* ni *toucher* (comme le *carré* et la *diagonale*). Pour cette raison, l'étude des sciences mathématiques prépare l'âme à la connaissance des idées. Pour Platon, le seul but de l'étude des mathématiques est justement cela: *préparer l'âme à la vision des idées*. Pour chacune des quatre sciences, Platon pose toujours la même question: Est-ce que cette science force l'âme à regarder les idées? La réponse est favorable pour l'*arithmétique* et la *géométrie*, moins favorable pour l'*astronomie* et l'*harmonique*. De l'*Arithmétique*, Socrate dit: (525 D)

Elle force l'âme à raisonner sur les nombres mêmes, sans jamais souffrir qu'on introduise dans les raisonnements des nombres d'objets visibles ou palpables. Que crois-tu, Glaucon, qu'ils répondraient si on leur posait cette question: O merveilleux savants, de quels nombres disputez-vous, et où se trouvent ces unités telles que vous prétendez qu'elles sont, chacune parfaitement égale à l'autre, sans la moindre différence, et qui ne contiennent point en elles des parties?

Ils répondraient, je crois, qu'ils parlent de nombres qu'on ne peut saisir que par la pensée et qu'on ne peut manier d'aucune autre façon.

Pour la *Géométrie*, Socrate pose de nouveau la question centrale: (526 E)

Il faut examiner si la partie majeure et plus élevée de cette science tend à notre objet, qui est de faire voir plus facilement l'idée du bien.

Puis il répète le principe:

Si la géométrie oblige à contempler l'essence, elle nous convient, mais si elle considère ce qui naît, elle ne nous convient pas.

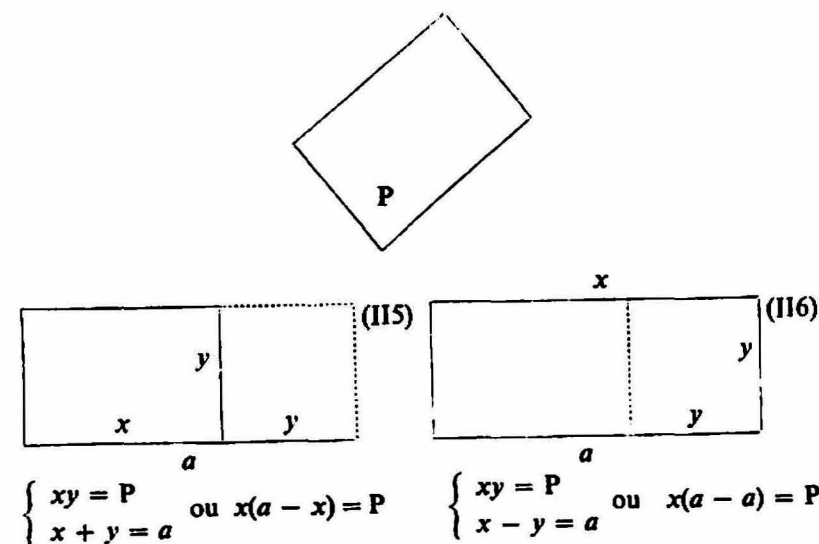
Platon est fanatique sur ce point: c'est le seul point qui l'intéresse. Socrate continue: (527 A)

Or il est une chose que tous ceux qui sont tant soit peu versés dans la géométrie ne nous contesteront pas, c'est que cette science est tout à fait contraire au langage employé par les géomètres.

Comment? demande Glaucon, et Socrate explique:

Les expressions qu'ils emploient sont ridicules, quoique nécessaires, car ils s'expriment toujours en praticiens qui ont pour but quelque chose de pratique. Ils parlent de quadrature (*tetragonizein*, littéralement faire carré), d'appliquer, d'ajouter et autres termes semblables qu'ils font sonner. Or toute cette science a pour objet la connaissance pure: on la cultive pour connaître ce qui est toujours et non ce qui à un moment naît et périt.

Que veut dire Platon quand il parle de « quadrature » (*tetragonizein*), « application » (*parateinein*), etc? On trouve les mêmes expressions chez Euclide dans le livre 2 des *Éléments*. *Quarrer* un rectangle,



c.à.d. construire un carré égal à un rectangle donné (II 4). Appliquer un rectangle à une ligne a , c.à.d. construire un rectangle égal à un rectangle donné et qui a pour base la ligne a . Un problème très important pour les géomètres grecs c'est l'application d'un rectangle P à une ligne a avec un défaut carré ou bien un excès carré.

La solution de ces problèmes d'application équivaut à la solution géométrique des équations du second degré.

Or, Eudème nous informe que cette solution est « une invention de la muse des Pythagoriciens ». Donc la géométrie à laquelle Platon fait allusion est justement la géométrie des Pythagoriciens. On peut démontrer que les livres géométriques 2,3,4 des « *Éléments* » d'Euclide sont dus, dans leur totalité, aux Pythagoriciens. Le livre 2 contient l'« *algèbre géométrique* » et la solution géométrique des équations du second degré, le livre 3, les théorèmes sur le cercle, le livre 4, les polygones réguliers inscrits dans le cercle à 3,4,5..... 15 côtés.

Scholion sur le livre 4: « Les seize théorèmes de ce livre sont dus aux Pythagoriciens. »

Parmi les Pythagoriciens, qui ont composé livres 2-4 il y a eu au moins un géomètre et logicien excellent. Les théorèmes et constructions sont merveilleux et la logique de tout le système est admirable. La plupart des renseignements sur la géométrie des Pythagoriciens sont dus à Eudème, élève d'Aristote, qui a écrit une histoire de la géométrie. Plusieurs fois, Eudème dit que telle invention est due aux Pythagoriciens. Mais on voit clairement qu'il ne connaît pas le nom du grand géomètre à qui ces inventions sont dues. Les Pythagoriciens ont publié leurs inventions sous la forme d'une œuvre collective comme la « *Logique de Port-Royal* » ou les « *Éléments de Mathématique* » de Nicolas Bourbaki.

Y a-t-il dans l'arithmétique un traité comparable aux livres 2,3,4? Oui, c'est le livre 7, le premier des trois livres arithmétiques, qui contient les premiers principes de l'arithmétique. C'est un exposé systématique d'une logique admirable. Il contient une théorie des proportions et de la divisibilité des nombres entiers et quelques théorèmes sur les nombres premiers.

On peut démontrer que, très probablement, le livre 7 est dû (comme les livres 2,3,4) aux Pythagoriciens (milieu du 5^e siècle). Dans l'arithmétique du livre 7 il n'y a pas de fractions: l'unité est regardée comme indivisible. Au lieu de fractions, on considère des rapports de nombres entiers. Sur ce point, Platon est d'accord avec les mathématiciens. Il dit:

Si tu veux diviser l'unité, les experts de la mathématique se moquent de toi.

... Ils prennent garde que l'unité reste toujours unité et ne devienne jamais multiplicité.

Quand Platon parle de l'*Astronomie* il n'est plus d'accord avec les spécialistes. Dans le livre 7 de la *République* Glaucon commence à louer l'astronomie: (529 A)

Il est, ce me semble, évident pour tout le monde que l'astronomie oblige l'âme à regarder en haut et à passer des choses d'ici-bas aux choses supérieures.

Mais Socrate n'est pas d'accord: (529 A-C)

C'est peut-être évident pour tout le monde, mais pas pour moi; car je n'en juge pas comme toi.

Glaucon s'étonne: Mais comment? Et Socrate s'explique:

A la manière dont la traitent aujourd'hui ceux qui veulent nous mener à la philosophie, l'astronomie abaisse tout à fait les regards vers le bas. Tu as l'air de croire qu'un homme qui lèverait la tête pour regarder les ornements d'un plafond userait pour cela les yeux de l'âme et non ceux du corps?

Peut-être en juges-tu bien et ne suis-je qu'un sot, mais, pour ma part, je ne puis reconnaître d'autre science qui fasse regarder l'âme en haut que celle qui a pour objet l'être et l'invisible.

Glaucon admet cela et demande à Socrate:

Comment doit-on enseigner l'astronomie, à ton avis, pour que l'étude soit favorable à notre but?

La réponse est énigmatique: (529 D)

Voici, répondis-je. Ces constellations variées du firmament, étant brodées dans le visible, sont, il faut le reconnaître, ce qu'il y a de plus beau et de plus exact dans ce domaine, mais elles sont bien inférieures à la vérité, c'est-à-dire à ces mouvements suivant lesquels la vraie vitesse et la vraie lenteur se meuvent selon le vrai nombre et dans toutes les vraies figures en relation l'une avec l'autre, et meuvent en même temps ce qui est en elles. Ce sont là des choses perceptibles par la raison et l'intelligence, mais non pas par la vue.

Ταῦτα τὰ ἐν τῷ οὐρανῷ... κάλλιστα μὲν ἡγεῖσθαι... τῶν δὲ ἀληθινῶν πολὺ ἐνδεῖν, ὥς τὸ ὄν τάχος καὶ ἡ οὐσα βραδυνότης ἐν τῷ ἀληθινῷ ἀριθμῷ καὶ πᾶσι τοῖς ἀληθεῖσι σχήμασι φορὰς τε πρὸς ἄλληλα φέρεται καὶ τὰ ἐνόντα φέρει

But we must recognize that they fall far short of the truth, the movements, namely, of real speed and real slowness in true number and in all true figures both in relation to one another and as vehicles of the things they carry and contain.

Un peu plus loin, Socrate définit le programme d'une astronomie idéale en ces termes: (350 B-C)

C'est donc en nous posant des problèmes que nous étudierons l'astronomie, comme la géométrie; mais nous laisserons à côté ce qui est visible dans le ciel...

Un peu auparavant, Platon avait défini:

« L'astronomie, c'est la science des corps stéréométriques en mouvement ». Je crois que l'astronomie idéale au sens de Platon c'est une pure cinématique: *science de points, cercles et sphères en mouvement*. La vraie astronomie selon Platon ne s'occupe pas des mouvements des corps célestes visibles: elle s'occupe seulement de corps géométriques idéaux qui ont un mouvement strictement régulier. Les corps célestes visibles ont, d'après Platon, des mouvements qui ne correspondent qu'approximativement à ces mouvements idéaux. Pour le dire avec les mots de Platon lui-même: (530 A-B)

Le vrai astronome admettra que le démiurge, l'ouvrier du ciel et des astres les a disposés avec toute la beauté qu'on peut mettre en de tels ouvrages; mais quant aux rapports du jour à la nuit, de ces deux au mois, du mois à l'année et des périodes des autres astres à celle du soleil, ne trouvera-t-il pas absurde de croire qu'ils ne subissent aucune variation, bien qu'ils soient matériels et visibles?

Pour l'*Harmonique*, la science des harmonies musicales, le principe de la critique de Platon est le même que pour l'astronomie. Il dit: (530 D)

Comme les yeux sont faits pour l'astronomie, les oreilles sont faites pour les mouvements de l'harmonie, car ces deux sciences sont pour ainsi dire des sœurs, comme disent les Pythagoriciens et nous aussi, n'est-ce pas, Glaucon?

Ensuite, Socrate propose d'étudier chez les Pythagoriciens la science de l'harmonie, d'écouter leur avis, mais de veiller soigneusement à empêcher nos élèves d'apprendre des choses qui sont inutiles pour notre but final. Car, dit Socrate, ces gens-là (les Pythagoriciens) font la même chose en harmonique que dans l'astronomie: (531 A)

Ceux qui se bornent à mesurer et à comparer entre eux les

accords et les sons perçus par l'oreille, font un travail aussi inutile que celui des astronomes.

Après une digression, Platon revient à ces gens-là qu'il voulait interroger sur l'harmonie, c'est-à-dire aux Pythagoriciens: (531 C)

Leur méthode correspond exactement à celle des astronomes: ils cherchent les nombres dans les accords qui frappent l'oreille; mais ils ne s'élèvent pas jusqu'aux problèmes: quels nombres sont symphoniques et quels nombres ne le sont pas, et pourquoi?

Platon veut donc une science idéale qui ne s'occupe pas des sons qu'on entend mais seulement des *nombres*. Juste comme, en astronomie. Platon voulait trouver les « vrais mouvements » dans les *nombres* et dans les *corps géométriques* en mouvement, de même, il veut trouver l'« harmonie vraie » et les vrais accords dans les *nombres* et leurs *rapports*. Il demande aux mathématiciens d'examiner: *quels nombres sont symphoniques et pourquoi*. Cet idéal est radicalement opposé à l'harmonique des Pythagoriciens. Dans le livre de Claude Ptolémée qui s'appelle *Harmonika*, on trouve un résumé de la théorie des accords symphoniques des Pythagoriciens. C'est une théorie *axiomatique déductive*. On part de certaines hypothèses et de là on déduit toute la théorie. Or, dans cette théorie, il y a une distinction très nette entre *sons* et *intervalles musicaux* d'une part et *nombres* et leurs *rapports*, d'autre part. A l'intervalle de l'octave correspond le rapport de 2 à 1 mais le prédicat « symphonique » est seulement appliqué à l'octave et non pas au rapport des nombres 2:1, tandis que Platon veut examiner quels *nombres* sont symphoniques et pourquoi?

Le point principal de la critique de Platon concernant l'harmonique et l'astronomie qui existaient de son temps est: qu'ils s'occupent des *sons qu'on entend* et des *astres qu'on voit*. Les sciences idéales de Platon s'occupent uniquement des nombres et des figures géométriques. C'est pourquoi il loue l'arithmétique et la géométrie des Pythagoriciens, qui s'occupent d'objets idéaux: de l'unité indivisible et des figures géométriques parfaites. Mais il veut réformer l'astronomie et l'harmonique qui s'occupent des objets visibles et audibles.

Cet idéalisme radical fut le point de vue de Platon quand il écrivit la *République*. Plus tard, il a adapté une attitude un peu plus conciliante. Eudème nous informe que Platon a posé aux astronomes le problème:

Par quelles hypothèses sur le mouvement circulaire et uniforme des planètes peut-on sauver les apparences?

Voilà exactement le programme des Pythagoriciens! Les Pythagoriciens aussi voulaient, comme dit Géminos

sauver les apparences par des hypothèses sur le mouvement harmonique, circulaire et uniforme des planètes.

Plus tard, dans les *Lois*, Platon nous dit avec emphase que le soleil et les autres astres qu'on voit au ciel sont des êtres vivants, des dieux, et qu'il est très important pour l'âme d'étudier les mouvements de ces « dieux visibles ».

Retournons à la *République*. Platon reproche aux mathématiciens non seulement de s'occuper d'objets *visibles* et *audibles*, mais aussi de prendre pour point de départ de leur science des *hypothèses* qu'ils ne justifient point. (510 C)

Tu sais, je pense, que ceux qui s'occupent de la géométrie, du calcul et des autres sciences du même genre, supposent le pair et l'impair, les figures, les trois espèces d'angles et d'autres choses analogues dans chaque branche de la science; ils les traitent comme choses connues, et quand ils en ont fait des hypothèses ils estiment qu'ils n'ont plus à en rendre compte ni à eux-mêmes ni aux autres et qu'elles sont évidentes à tous les esprits.

Dans ce passage, Platon semble se référer à un certain système d'hypothèses sur lequel se fonde la géométrie. Ce système axiomatique est probablement le système des Pythagoriciens. Malheureusement le début du traité géométrique des Pythagoriciens est perdu. Euclide a pris les livres 2,3,4 des *Éléments* chez les Pythagoriciens mais il a remplacé leur premier livre, qui contenait (sans doute) les *définitions* et les *hypothèses* de la géométrie par un autre système axiomatique élaboré plus tard au 4^e siècle. Il me semble tout à fait sûr que les Pythagoriciens ont fondé leur *géométrie* sur un système d'hypothèses ou *postulats* qu'ils ont regardés, comme le dit Platon, comme évidents pour chacun et qu'ils ont acceptés sans justification. Ils ont fait la même chose dans leur *harmonique* et dans leur *astronomie*. Platon dit: (510 D)

Enfin, partant de ces hypothèses et passant par tous les échelons de la déduction, ils aboutissent à la démonstration de ce qu'ils s'étaient mis en tête de chercher.

Platon n'est pas satisfait de cette science basée sur des hypothèses. Pour lui, les hypothèses ne sont pas des principes (*Archai*)

mais vraiment des hypothèses, des points d'appui pour s'élever à l'*anhypotheton*, le non-hypothétique, le principe de tout. Ce principe atteint, le raisonnement descend, en s'attachant à toutes les conséquences qui en dépendent, jusqu'à la conclusion der-

nière, sans faire usage d'aucune donnée sensible, mais en passant d'une idée à une idée, pour aboutir à une idée.

Voilà donc le programme d'une science idéale selon Platon: Science sans hypothèses, indépendante de l'empirie, basée sur un seul principe non hypothétique et évident.

Ce programme est tout à fait différent du programme des Pythagoriciens. La géométrie, l'astronomie et la science harmonique des Pythagoriciens sont basées sur des hypothèses, et non pas sur l'*anhypotheton*. A la fin de ses considérations sur les sciences et les hypothèses Platon se montre très mécontent des sciences existantes. Il dit des mathématiciens: (533 C)

Quant aux autres, qui, comme nous l'avons dit, saisissent quelque chose de l'essence, c'est-à-dire la géométrie et les arts qui s'y rattachent, nous voyons que leur connaissance de l'être ressemble à un rêve, qu'ils sont impuissants à voir l'être en pleine lumière, tant qu'ils s'en tiennent à des hypothèses, qu'ils acceptent d'une façon fixe, et dont ils ne peuvent pas rendre raison.

Or, si l'on prend pour principe une chose qu'on ne connaît pas, et si les conclusions et les propositions intermédiaires sont tissées d'inconnu, quelle possibilité y a-t-il que l'accord en ces choses puisse jamais être converti en une vraie science?

Cela est impossible, dit-il.

Ce que Platon critique ici amèrement, c'est exactement le programme des sciences des Pythagoriciens. Ce programme est formulé dans un fragment du commentateur platoniste Derkyllides, un fragment que Théon de Smyrne nous a conservé. Derkyllides dit:

De même qu'en géométrie et en musique il est impossible, sans faire des hypothèses, de déduire les conséquences des principes, de même en astronomie il faut d'abord se mettre d'accord sur les hypothèses, desquelles on déduit la théorie des mouvements des planètes.

Du verbe *homologeisthai*: se mettre d'accord, utilisé par Derkyllides se dérive le substantif *homologia*, accord, qui se trouve chez Platon. Derkyllides et Platon parlent donc de la même chose: d'une science basée sur des hypothèses sur lesquelles on se met d'accord au commencement. Mais Derkyllides ou sa source approuve cette méthode tandis que Platon dit que cet « accord » ne peut jamais aboutir à une vraie science.

La théorie de la connaissance de Platon est donc une réaction contre la théorie de la connaissance des Pythagoriciens.

Geschichte

• Waerden, B. L. van der:

Erwachende Wissenschaft. Band 2: Die Anfänge der Astronomie. (Wissenschaft und Kultur. Band 23.) 2. Aufl.

Basel - Stuttgart; Birkhäuser Verlag 1968. XII, 315 S. DM 38.00.

[Vgl. auch Band 1, 1. Aufl. dies. Zbl. 70, 241, 2. Aufl. dies. Zbl. 158, 3.]

Als "Anfänge der Astronomie" definiert der Verf. denjenigen Ausschnitt aus der Geschichte der Himmelskunde, der mit der Aufstellung geordneter Listen begann und der die abendländische Wissenschaft nachweisbar beeinflusst hat. Grundsätzlich außer Betracht bleiben daher alte Mitteilungen über alltägliche Himmelserscheinungen und die Astronomie der Megalithkulturen, der vorkolumbianischen Amerikaner und der Chinesen. Die tatsächlich recht unbedeutende altägyptische Astronomie nimmt in dem Buch nur sehr geringen Raum ein. Indische Quellen werden ganz beiläufig behandelt. Bedauerlich ist der ausdrückliche Verzicht auf Einbeziehung der Astrologie; besonders nachdem Willy Hartner gezeigt hat, wie weit sich der Einfluß sumerisch-babylonischer Sternbildkonzeptionen in das Abendland erstreckt. Auch spielt die mit der frühen Astronomie fast untrennbar verbundene Kosmographie eine völlig untergeordnete Rolle. Wohl aber ist ein eigenes Kapitel der Thematik "Sternreligion, Astrologie und Astronomie" gewidmet. In knapper Form werden darin dem religionsgeschichtlich interessierten Laien einige Komponenten des hellenistischen Synkretismus vorgestellt, die dem Verf. für die Entwicklung seiner Gedanken wesentlich erschienen. Die alttestamentlichen Vorstellungen sind (offenbar als für die Astronomie zu "alltätlich") nicht darunter. In der Geschichte der

• Astrologie führt der Verf. zwischen der alten Omen-Astrologie und der neueren Horoskopie eine eigene Zwischenstufe der primitiven Tierkreisastrologie ein, die er in die Zeit der chaldäischen Könige (um 600 v.Z.) ansetzt. Das, worauf es dem Verf. in erster Linie ankam, und was den wesentlichen, reichen Inhalt seines Buches ausmacht, ist die ausführliche, auch Nichtspezialisten verständliche Darstellung der Astronomie der Keilschrifttexte. Hierbei stützt er sich für die alte Zeit besonders auf Arbeiten von Peter Huber und für die neuere Zeit auf das monumentale Werk von O. Neugebauer [Astronomical Cuneiform Texts (London 1955)]. Er beschränkt sich aber keineswegs auf das Referieren fremder Untersuchungen, sondern trägt viel Eigenes bei [zur Erklärung der Thalesfinsternis siehe jetzt aber W. Hartner, Centaurus 14, 60-71 (1969)] und hält mit seinem wissenschaftlichen Urteil nie zurück. Das Ergebnis ist eine brillant lesbare und bestens fundierte Arbeit, die praktisch den neuesten Forschungsstand bietet. Besonders die Einführung in die babylonische Mond- und Planetenrechnung ist meisterhaft. Gegenüber Neugebauer benutzt der Verf. noch die älteren Kuglerschen Bezeichnungen, was beim Vergleich zu beachten ist (s. S. 139). Abschließend zu erwähnen ist noch ein Verzeichnis der keilschriftlichen Sternnamen (von P. Huber) und die vorzügliche Bebilderung, besonders im religionsgeschichtlichen Teil.

W. Petri.

band 195 (1970) Zentralblatt fuer
math. und ihre
Grenzgebiete