

Essai de reconstitution du théorème, dans sa formulation première, eu égard aux raffinements que lui apportent Hippocrate, Euclide, Archimède et Pappos. Le théorème et le « gnomon ».

HET THEOREMA VAN PYTHAGORAS

door

M. G. BEUMER.

174
BEUMER, M.G.
1946

C3

In onze huidige samenleving zal men nog slechts weinige mensen van enige ontwikkeling aantreffen, die de beroemde stelling, dat in een rechthoekige driehoek de sommen der vierkantsoppervlakken beschreven op de rechthoekszijden gelijk is aan het oppervlak van het op de schuine zijde beschreven vierkant, niet kennen. In ieder leerboek der elementaire meetkunde vindt men dit theorema van Pythagoras op diverse manieren bewezen en er is, naar men verhaalt, een tijd geweest dat een mathematicus geen goede reputatie bezat, indien hij niet een of ander nieuw bewijs voor deze stelling had gevonden. Tot allerlei spitsvondigheden is men op deze wijze gekomen en de samenstelling van bloemlezingen uit die bewijsverzamelingen kon dan ook niet uitblijven¹⁾. Toch kan men zich bij een nadere beschouwing van het probleem de vraag stellen of door dit alles het essentiële van het vraagstuk, dat het spraakgebruik en de traditie aan Pythagoras toeschrijft, niet wordt verduisterd en of men een doodeenvoudige kwestie niet nodeloos moeilijk en ingewikkeld maakt. Indien men aan de hand van de ons bekende bronnen de lotgevallen van het theorema vervolgt, dan kan men een zekere onbevrediging gevoelen over de wijze, waarop dit onderwerp in de leerboeken wordt behandeld en aldus op de scholen wordt onderwezen, zonder twijfel traditiegetrouw maar daarom niet minder onbevredigend. Een historische toelichting moge hier niet misplaatst zijn; men verwachtte geen nieuwe vondsten of hypothesen, maar de huidige opvattingen van meer competente historici dan schrijver dezes mogen wij op deze plaats in dit verband kort vermelden.

Allereerst dan: wat verstaat men onder een theorema? Het Griekse woord „theorein” betekent „doorschouwen”; theorema moet dus in zijn oorspronkelijke betekenis een aanduiding zijn geweest van iets, dat door zuivere beschouwing wordt gekend. De betekenis van dit begrip heeft in de loop der tijden allerlei vervormingen ondergaan. In de laatste vier eeuwen vóór het begin van onze jaartelling hebben zich in Griekenland naast de vele politieke en sociale twisten tegenstellingen ontwikkeld ook op wetenschappelijk gebied en het

¹⁾ Zie b.v. J. Versluys, Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Amsterdam 1914) en E. S. Loomis, The pythagorean proposition (Cleveland 1926). Het laatstgenoemde werk bevat 167 bewijzen.

mag ons niet verwonderen, dat onder de invloed van een karaktertrek die vele antieke denkers beheerst, namelijk dat zij in hoge mate redetwistend en oordeelzuchtig waren, eveneens zich rondom het begrip theorema een strijd ontwikkelde, waarin namen als Geminus, Carpos, Speusippos en Menachmos bekendheid genieten. Nadere gegevens hieromtrent vermeldt o.a. de Franse mathematico-historicus Paul Tannery¹⁾, en deze is van mening dat Euclides (± 300 v. Chr.) in zijn klassieke leerboek der vlakke meetkunde, de Elementen, het woord bij voorkeur niet gebruikt en slechts als titel boven de diverse hoofdstukken plaatst. Eerst latere bewerkers zouden de term theorema in de manuscripten hebben ingelast. De oorzaak van de twist wordt wellicht iets duidelijker, indien men de woorden van Carpos (4e eeuw v. Chr.) in ogenschouw neemt als deze naar voren brengt, hoe bijzonder moeilijk het is een theorema te vinden en het vervolgens in een vorm te brengen, zodat het niet te veel en niet te weinig zegt²⁾. Hiermede drukt hij uit, dat er problemen zijn, zoveel men wil, maar dat theoremata een unicum uitmaken.

Hoe nu brengt men het theorema in verband met Pythagoras? Pythagoras van Samos was een Grieks wijsgeer uit de zesde eeuw vóór onze jaartelling; zijn sterfdatum ligt waarschijnlijk omstreeks 496 v. Chr. In Zuid-Italië (Croton) stichtte hij een gemeenschap op religieuze grondslag, die een legendarische vermaardheid bezat en waarover de biografen der oudheid met ophef schreven³⁾. De wetenschappen werden door Pythagoras en zijn leerlingen ijverig beoefend; naast de filosofie, d.w.z. de physica werd in deze door mystieke sluiers omhulde bond aan de wiskunde veel aandacht besteed. Deze religieuze gemeenschap is op vrij tragische wijze tot opheffing gekomen; zij viel ten prooi aan wraakzucht en fanatisme van tegenstanders en slechts weinige leden van de school des beroemden meesters wisten aan de vermoordding te ontkomen; deze werden verspreid over geheel Italië. Of deze gebeurtenissen hebben plaatsgevonden, toen Pythagoras nog leefde en of hij dus ook een slachtoffer van zijn opvattingen is geworden of dat hij op het betreffende tijdstip reeds overleden was, daaromtrent kan men op het huidige ogenblik slechts weinig met zekerheid vaststellen. Historici en biografen uit die dagen spreken steeds over

¹⁾ In zijn beroemde werk: *La géométrie grecque, comment son histoire nous est parvenue et ce que nous en savons*. I (Paris 1887), p. 145.

²⁾ Tannery I, p. 146.

³⁾ Zie b.v. Diogenes Laertios, *Lives of eminent philosophers* (ed. R. D. Hicks, Loeb's Classical Library) II (London—New York 1925), Liber VIII, Caput I, p. 321—367.

de „Pythagoreërs” en zodoende is het absoluut onmogelijk ook maar bij benadering te onderscheiden tussen de werkelijke verdiensten van den leider van de bond en die van zijn gezellen.

Dit geldt ook voor het geval van het theorema. Doch zonder bovenstaande feiten te kennen zal het eveneens reeds duidelijk zijn, dat de stelling die het verband tussen de rechthoekszijden en de hypotenusa in de rechthoekige driehoek aangeeft de naam van Pythagoras hoogstens nog draagt als een gemakkelijk distinctief, waarover wij hieronder nog zullen vermelden in hoeverre dit gerechtvaardigd is, en niet als een uitdrukking van het feit, dat dit theorema van origineel Pythagorees origine is. Want reeds in de empirische Egyptische meetkunde van 2000 jaren vóór onze jaartelling gebruikte men voor de constructie van rechte hoeken een draaddriehoek met zijden in de verhouding 3 : 4 : 5 en in de pyramiden vindt men deze afmetingen voortdurend terug¹⁾, terwijl ook uit Babylonië en de andere oosterse landen overblijfselen daarvan bekend zijn. Over de kwestie aan welken onderzoeker de formulering van deze eigenschap, zoals wij die op het huidige ogenblik kennen, moet worden toegeschreven, is een interessant probleem, dat zich steeds in een grote belangstelling der historici mocht verheugen. Velen hunner hebben getracht een enigszins aannemelijke verklaring te creëren doch slechts weinigen slaagden er in hypothesen naar voren te brengen die werkelijk pasten in een geleidelijke

harmonische ontwikkeling der meetkundige begrippen van de oudste tijden tot op Euclides; in de Elementen vindt men een vrij gecompliceerd bewijs voor het theorema²⁾, en dit duidt op een langdurige ontwikkelingsgang eer men tot een dergelijke hoogte der bewijsvoering was gekomen.

Een tweetal concepties mogen hier bespreking ondervinden, die van Tannery en van Naber. Tannery neemt aan, dat het inzicht in het theorema zou zijn ontstaan uit de beschouwing van de gelijkvormigheid der beide driehoeken, waarin een rechthoekige driehoek wordt verdeeld door de lood-

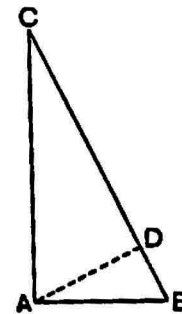


Fig. 1.

lijn op de hypotenusa, met de gehele driehoek. (Fig. 1). Uit de gelijkvormigheid volgt, dat de vierkanten opgericht op de zijden AB

¹⁾ Vgl. b.v. de resultaten der opmetingen van den „Astronomer Royal for Scotland” Charles Piazzi Smyth (1819—'90), vermeld bij H. A. Naber, *Van theorema naar sectio divina* (Den Haag 1939), blz. 81 e.v.

²⁾ Boek I, prop. 47; zie: E. J. Dijksterhuis, *De elementen van Euclides I* (Groningen 1929), blz. 203.

en AC opv. gelijk zijn aan de rechthoeken gevormd door BC, BD en BC, CD. Dit bewijs nu levert Euclides op geheel andere en meer exacte wijze, in overeenstemming met het stadium, dat de wiskunde in zijn tijd had bereikt¹⁾. Deze hypothese van Tannery vult de kloof tussen de oudere geometrie en die der elementen op aannemelijke wijze op, en dit is reden dat zij op het ogenblik wel wordt aanvaard als zijnde het meest in overeenstemming met de bekende feiten. Toch mogen wij niet verzuimen op deze plaats ook

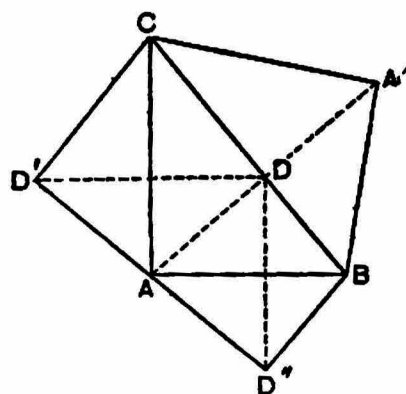


Fig. 2.

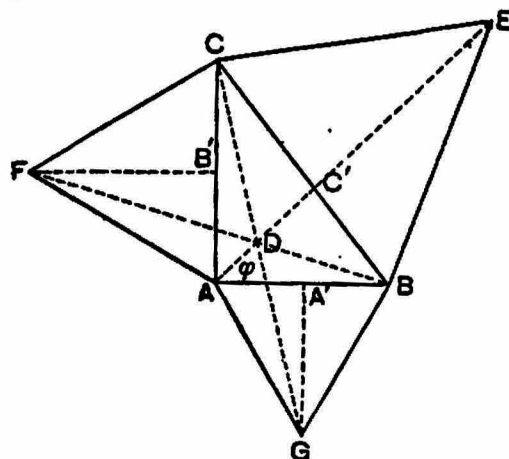


Fig. 3.

de andere hypothese, die van H. A. Naber²⁾ te vermelden. Naber wijst er eerst op, dat bij Euclides³⁾ de gelijkvormigheid, waarvan Tannery spreekt, wordt vermeld. Dit zou eigenlijk het theorema van Pythagoras in de kern bevatten: immers slaat men de beide driehoekjes naar buiten om, en ook de gehele driehoek, (Fig. 2), dan heeft men het theorema vóór zich, en wel in veel algemener vorm dan in het geval met de vierkanten. De stelling toch geldt voor alle gelijkvormige figuren, zoals een figuurtje

¹⁾ Vgl. Tannery, I, p. 105.

²⁾ Henri Adrien Naber (overleden in 1945) promoveerde in 1901 tot doctor in de wis- en natuurkunde op een dissertatie over de stereometrie; hij bestudeerde verschillende historische kwesties, o.a. het theorema van Pythagoras, het perpetuum mobile en de duikboot van Drebbel. In 'Hoorn stichtte hij een Drebbelmuseum en polemiseerde jarenlang o.a. met Prof. F. M. Jaeger (overl. in 1945) en de Kon. Acad. der Wetensch. Hij schreef vele studies in een merkwaardige trant en zijn werk steunt op een schier onbepaalde belesenheid en een grote verbeeldingskracht. Een lijst van zijn verhandelingen vindt men in zijn „Van theorema naar sectio divina” van 1939 (blz. 205—216); dit boek mag wel de bekroning van de geestelijke arbeid van dezen veel miskenden geleerde genoemd worden.

³⁾ Bk. VI, prop. 8; zie Dijksterhuis II (Groningen 1930), blz. 90.

dat wij aan Naber ontleen (Fig. 3) aantoon¹⁾. Ook de z.g.n. stelling van Pappos (3e eeuw na Chr.), waarbij op de zijden

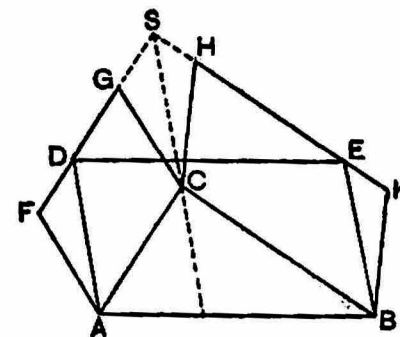


Fig. 4.

parallellograms worden beschreven²⁾ is welbekend (Fig. 4). Algemeen: richt men op de rechthoekszijden en op de schuine zijde van een rechthoekige driehoek gelijkvormige figuren F_a , F_b en F_c op, waarin de rechthoekszijden en de hypotenusa homologe lijnstukken zijn, dan geldt: $F_a + F_b = F_c$.

Een interessante toepassing hiervan vindt men in de kwadraturen van Hippocrates (5e eeuw v. Chr.). Deze Atheense geleerde, die wij hebben te onderscheiden van zijn beroemden medischen naamgenoot, zocht de kwadratuur van de cirkel, en hierbij wordt het theorema gebruikt met cirkelvormige figuren op rechthoekszijden en schuine zijde. Een uitbreiding hiervan gaf later de Arabische mathematicus Ibn Alhaitam (gestorven 1039), en de figuurtjes

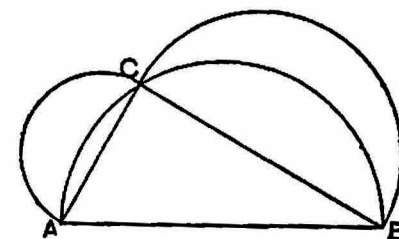


Fig. 5.

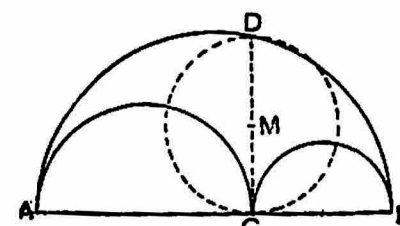


Fig. 6.

op de rechthoekszijden genieten tegenwoordig grote bekendheid als de maantjes of meniscen van Hippocrates (Fig. 5). Ook de sikkels van Archimedes (287—212 v. Chr.) (arbelos, of in een speciaal geval salinon) is een uitbreiding van het theorema van Pythagoras op cirkelvormige figuren³⁾ (Fig. 6). En juist de wijze waarop Hippocrates het theorema onbevange uitbreidt op cirkelvormige figuren, hetgeen

vermeld wordt in een historiografisch controleerbare overlevering,

¹⁾ Naber, blz. 17; een korte samenvatting in gemakkelijk leesbare vorm geeft W. Lietzmann, Der pythagoreische Lehrsatz (Leipzig—Berlin 1926), S. 26—40.

²⁾ Bk. IV, prop. 1; zie: Pappi Alexandrini, Collectionis quae supersunt... editit... Fr. Hultsch I (Berlin 1876), S. 176. Vgl. Euclides Bk. VI, prop. 31; zie Dijksterhuis II, blz. 114.

³⁾ Zie b.v. D. J. E. Schrek, De sikkels van Archimedes. Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde 30 (1942—'43), 2; 9 e.v.

nl. de commentaar van Simplicios op de *Physica* van Aristoteles ¹⁾, geldt als een sterk argument in bevestigende zin voor Naber's opvatting.

Uit dit bericht trekt Naber overigens nog een conclusie, die in dit verband zeker de vermelding waard is. Allereerst dan, dat de Grieken vóór of in ieder geval ten tijde van Hippocrates er blijkbaar geen bezwaar in zagen met kromlijnige figuren te werken, hoewel in de *Elementen* daarvan niets tot uiting komt ²⁾; Hippocrates bezigt het theorema in de modificatie, die gewoonlijk „de uitbreiding van Euclides” wordt genoemd. Hieruit meent hij te kunnen concluderen, dat men voor de uitbreiding van de stelling in het geheel niet behoefde te wachten op Euclides, maar dat de Pythagoreërs (of liever: de wiskundigen uit het tijdperk vóór 350 v. Chr.) en misschien Pythagoras zelf de meest typische toepassingen van het theorema reeds bekend geweest moeten zijn. Uit de omstandigheid, dat zij met kromlijnige figuren werkten meent hij te kunnen besluiten, dat deze wiskundigen het theorema als iets zeer eenvoudig beschouwden en dat zij geen bewijs nodig achtten; dat dit dus aanvaard zou zijn als iets vanzelfsprekends.

Een ander argument ziet Naber in de ontwikkeling van het begrip gnomon ³⁾. De gnomon, later ook Jacobsstaf is een apparaat bestaande uit twee of meer loodrechte staafjes met kijkgleufjes en het werd ten tijde van Newton nog voor hoekmetingen op zee gebruikt. De betekenis echter heeft zich gewijzigd; bij Aristoteles is het de rand om een vierkant en bij

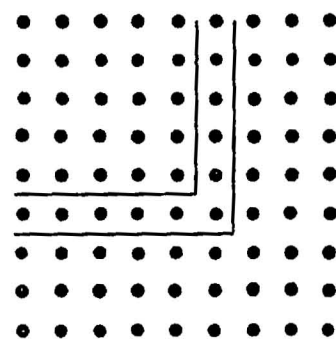


Fig. 7.

Euclides een figuur in de vorm van een scheve winkelhaak. Bij Heroon van Alexandrië (± 100 v. Chr.) is het alles wat een figuur of ook een getal maakt, dat gelijkvormig is aan het oorspronkelijke; de oneven getallen zijn gnomon-getallen, omdat $1^2 + 3 = 2^2$; $3^2 + 7 = 4^2$; $5^2 + 11 = 6^2$, enz. (Fig. 7).

Nu bezit alleen de rechthoekige driehoek (afgezien van de rechthoek met als zijden 1 en $\sqrt{2}$) de eigenschap dat de gnomon dezelfde

¹⁾ Zie F. Rudio, *Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und des Hippocrates*. Bibliotheca Mathematica [3] 3 (1902), 7—62 en Dijksterhuis I, blz. 25 e.v.

²⁾ Bk. VI, prop. 31; zie Dijksterhuis II, blz. 114; vgl. Naber, blz. 28—29.

³⁾ Naber, blz. 19—21.

vorm heeft als begin- en eindfiguur, en dit, aldus oordeelt Naber zal veel hebben bijgedragen tot een spontaan begrip van het theorema. Door dit inzicht wordt het theorema van Pythagoras weer een echt theorema, dat is: iets, wat door zuivere beschouwing wordt gekend; de latere wiskundigen echter hebben door hun arithmetisering der meetkunde het begrip verduisterd en deze simpele oplossing over het hoofd gezien.

Men moge het ons niet ten kwade duiden, dat wij naar aanleiding van Naber's opvattingen, die ongeveer uit 1894 dateren en voor het eerst uitvoerig in 1908 werden geponeerd ¹⁾ wellicht meer geschreven hebben dan de actualiteit van deze beschouwingen toelaat. Wij willen evenwel niet nalaten te wijzen op de verfrissende werking, die zijn gedachten kunnen uitoefenen bij de behandeling van het theorema. Vooreerst zou men van de huidige behandelingswijze der meetkunde in de leerboeken kunnen opmerken, dat in de geometrische begrippen al te veel de namen van getalgroepen en de bewerkingen op deze gezien wordt. Met het neerschrijven van a^2 , b^2 of c^2 wordt bijna onmiddellijk verbonden de gedachte aan een vierkantsfiguur. Ook van historisch oogpunt zou men bezwaren kunnen inbrengen tegen de wijze, waarop de stelling van Pythagoras in de leerboeken wordt ingevoerd ²⁾. Gewoonlijk vindt, naar aanleiding van de gelijkvormigheid der driehoeken waarin de loodlijn op de schuine zijde een rechthoekige driehoek verdeelt, met de gehele driehoek, de afleiding plaats van de algebraïsche uitdrukking der stelling. De meetkundige lengten der zijden vindt men door middel van algebraïsche getallen uitgedrukt in (overigens willekeurige) lengte-eenheden. Is men gekomen bij de behandeling van de oppervlakken, dan volgt de opmerking dat a^2 beschouwd kan worden als het oppervlak van een vierkant met een zijde van a lengte-eenheden, en dit wordt dan op andere wijze geformuleerd dan de eerste maal. Deze behandelingswijze nu is nog de meest gangbare in de schoolboeken ³⁾, hoewel representatieve leerboeken

¹⁾ Naber schreef over het theorema van Pythagoras in het studententijdschrift *Propria Cures* (1892 en '94), en poneerde het bewijs met behulp van de uitslaande driehoeken en het gnomon in een stelling van zijn dissertatie „De stereometer” (1901); voorts uitvoerig in de boeken *Das Theorem des Pythagoras* (Haarlem 1908), *Meetkunde en mystiek* (A'dam 1915) en *Van theorema naar sectio divina* (Den Haag 1939).

²⁾ Vgl. b.v. Derksen en De Laive, *Leerboek der vlakke meetkunde*, dl. 2 (11e druk, Zutphen 1937), blz. 31; 80.

³⁾ In P. Molenbroek, *Leerboek der vlakke meetkunde* (Groningen 1924), blz. 167; 185 wordt dit standpunt gehuldigd; in latere uitgaven van dit werk is hierin verandering gebracht; zie b.v. de 9e druk, bewerkt door P. Wijdenes (Groningen 1943), blz. 176; 205.

der meetkunde langzamerhand een andere opvatting gaan huldigen, die meer in overeenstemming is met de methode, waarvan de loop der historische ontwikkeling in vele punten is opgehelderd. Eenheid in behandelingswijze is niet te bespeuren en men kan zich de vraag stellen of niet met evenveel recht andere opvattingen, als b.v. die van N a b e r opgeld zouden kunnen doen. Wel is waar is zijn mening over de historische ontwikkeling van de stelling van P y t h a g o r a s niet ver verwijderd van het hypotetische, maar men kan zeggen dat bepaalde argumenten en bewezen feiten een zekere stevigheid van fundering aan deze gedachtengang verlenen, en omstandigheden, die op een totale of ook maar gedeeltelijke absurditeit van deze mening duiden zijn niet aanwezig. Maar welk nut heeft de meer exacte kennis van een historische groei, zoals b.v. van de Elementen van Euclides, indien men deze niet respecteert of dienstbaar maakt aan de didactiek. Het bewijs voor de stelling van Pythagoras volgens Euclides moge interessant zijn uit geometrisch oogpunt (en er zijn nog veel meer mooie bewijzen), maar deze zijn niet de meest geschikte om het inzicht te bevorderen. Een historisch voorbeeld: een der meest vooraanstaande mathematici uit onze eeuw, Albert Einstein bracht in zijn jeugd twee weken door met „angestengtem Nachdenken” voor hij het bewijs begreep. Maar wij kunnen ons de vraag stellen of dat nodig is; steeds worden er bewijzen gevonden maar geen enkele dezer oplossingen draagt het kenmerk dat onze grote landgenoot B o e r h a a v e aan het ware inhaerent achtte, nl. de eenvoud. Als wij de argumenten van N a b e r aanvaarden — en wij kunnen dit met evenveel recht doen als dat wij de huidige kennis van de ontwikkeling van het Euclidisch systeem als acceptabel aannemen — dan heeft de Griekse mathematicus met deze zaak weinig moeite gehad.

Bij de behandeling van het theorema behoeven dan niet eens de uitgezaagde plankjes gebruikt te worden zoals het vroeger wel gedaan werd¹⁾. De gelijkvormigheid van de driehoek kan toegepast worden op de driehoekjes, waarin de loodlijn op de hypotenususa een rechthoekige driehoek verdeelt. Klapt men de driehoekjes en ook de gehele driehoek naar buiten om (Fig. 2) dan ziet men het theorema aanschouwelijk voor zich en reeds in een meer algemeen geval dan met de vierkanten. Bij de behandeling van de oppervlakken kan het bewijs van Euclides gegeven worden, dat zich schitterend leent in het kader van dat hoofdstuk. Daarop kan men een beschouwing laten aansluiten over het uitdrukken van oppervlakken

in algebraïsche grootheden; als uitbreidingen van het theorema volgen daarna de stelling van P a p p o s, de maantjes van H i p p o c r a t e s e.d.

De invoering van de z.g. Pythagoreïsche drietallen is gemakkelijk mogelijk met behulp van het gnomon. Immers, volgens de hierboven gegeven definitie is een gnomon een oneven getal, indien men een kwadraat b^2 wil vormen uit een kwadraat a^2 , als $b - a = 1$ is (Fig. 7). Indien men nu slechts de gnomons zoekt, die zelf vierkanten zijn, dan kan men deze als volgt in uitdrukking brengen:

$$4a + (a - 1)^2 = (a + 1)^2$$

waarin $a > 1$ een natuurlijk getal is.

Immers, vergelijkt men het vierkant van een getal met de vierkanten van de getallen, die opv. $+1$ en -1 van het oorspronkelijke getal verschillen, dan is het verschil met elk van beide een gnomon, die ontstaat door het tweevoud van het eerste getal opv. te vermeerderen of te verminderen met 1. Het verschil der beide vierkanten, die het eerst beschouwde vierkant omgeven, is dus een veelvoud van 4. Is $4a$ zelf een vierkant, dan is het drietal getallen een Pythagoreïsch drietal. Algemener kan men het nog uitdrukken door $4a$ te vervangen door $(2n)^2$; een viervoud toch kan alleen het kwadraat zijn van een tweevoud. De betrekking tussen de zijden van een Pythagoreïsche driehoek luidt dus:

$$(2n)^2 + (n^2 - 1)^2 = (n^2 + 1)^2,$$

waarin n een natuurlijk getal is.

Een omstandigheid is er nog, die wij hier in het kort willen vermelden. Als men uit de oorspronkelijke verhandelingen van N a b e r de beschouwingen put, die in het bovenstaande zijn weergegeven, dan kan men zich de vraag voorleggen of deze opvattingen niet getuigen van een zekere eenzijdigheid, een sterk, soms ietwat geforceerd drijven van de gedachten in een bepaalde richting. Wij zullen zeker de laatste zijn om dit, hetzij uit piëteit of gevoelsoverwegingen te ontkennen. Want wij willen hier de mening uitspreken dat een dergelijke eenzijdigheid in velerlei opzicht een verfrissende en stimulerende werking kan uitoefenen in de wetenschap, en door de eenzijdigheid van andere opvattingen (een eigenschap, die elke mening aankleeft) zal dit toch nooit al te sterk worden doorgevoerd. Wij behoeven ter illustratie hiervan geen voorbeelden te vermelden uit de geschiedenis der wijsbegeerte of der sociale wetenschappen, maar een aandachtig toeschouwer zal, wat dit betreft, in de gebeurtenissen der laatste jaren wel voldoende stof ter overpeinzing hebben gevonden.

Utrecht, Juli 1946.

¹⁾ Vgl. K. V o s, Multatuli en het theorema van Pythagoras. Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde 8 (1920—'21), 266.