

is th  
to ac  
can  
the  
sari  
of ou  
thou  
whet  
seem  
delit  
have  
play

— *Ein Lob auf die altpythagoreische Geometrie*; cf. Plato Philosophus.  
SZABO A., *Ein Lob auf die altpythagoreische Geometrie* (Epinomis 990D1-6):  
Hermes XCVIII 1970 405-421. | L'interprétation détaillée de ce passage  
montre que la définition de la géométrie comme un  $\theta\alpha\upsilon\mu\alpha$  divin, consistant en  
l'homoiosis des nombres naturellement non semblables grâce aux particula-  
rités des superficies, est un éloge de la mathématique pythagoricienne. C'est  
en effet le pythagorisme qui a rendu possible la théorie de la proportion des  
superficies d'Eudoxe de Cnide.

Hermes

98 1970 405-421

VVS 63

2 1/4 Li  
UNIVERSITY OF MICHIGAN

<sup>1</sup> p. 395 note 2.

238 pdf  
SZABO, A.  
1970

## EIN LOB AUF DIE ALTPYTHAGOREISCHE GEOMETRIE

(Epinomis 990 D 1—6)

C4

Die 'Epinomis' ist ein Werk, das uns zwar unter Platons Schriften über-  
liefert worden ist, dessen Echtheit jedoch hie und da schon im Altertum be-  
zweifelt wurde. Diogenes Laertios und eine Stelle im Suda-Lexikon berichten  
von einem Gerücht<sup>1</sup>, wonach Platons Schüler Philippos von Opus die 'Epi-  
nomis' bzw. das '13. Buch der Nomoi' verfaßt habe. »Es ist aber fraglich, ob  
dieses Gerücht nicht lediglich auf einem Schlusse beruht, den Proklos nach  
den anonymen Prolegomena zu Platons Philosophie (25. S 218, 19 ff. Herm.) aus-  
drücklich gezogen hat, daß nämlich Platon, wenn er schon an der abschlie-  
ßenden Redaktion der 'Nomoi' durch den Tod verhindert wurde, erst recht  
nicht ein weiteres Werk habe schreiben können<sup>2</sup>. — Wie man aus diesem  
Zitat ersieht, haben die antiken 'Zeugnisse' gegen die Echtheit die moderne  
Forschung zu keiner eindeutigen Athese zu veranlassen vermocht. Es gibt  
zahlreiche Philologen und Historiker, die an dem echt Platonischen Ursprung

<sup>1</sup> Diog. Laert. 3, 37 und Suda s. v. (Φίλιππος ὁ Ὀπούντιος) φιλόσοφος.

<sup>2</sup> K. PRÄCHTER, Die Philosophie des Altertums (12. Aufl. in F. ÜBERWEGS Grundriß  
der Geschichte der Philosophie), Berlin 1926, 326.

need something to keep them 'straight' in the complexities of the universe; but if Euripides cries out for some means by which life can be guided, he entertains little hope of finding it in the traditional gods of Greece, even if he can offer no alternative.

One of the few things that emerges with certainty from this difficult play is the call, in the earlier part, for a sense of the common humanity of us all and to active measures in accordance with this. It is no contradiction that Euripides can commend such an action while admitting the general ignorance of men and the uncertainty of their actions: ignorance as we have seen<sup>1</sup>, does not necessarily entail inactivity. On the contrary, it might be said that his very sense of our ignorance led him to feel that sympathy and mutual help was essential; though whether we should go so far as this is difficult to say. But at any rate, whether or not the above interpretation of the phenomenon is correct, it does seem that we have to recognize in the 'Suppliant Women' a sustained and deliberate ambivalence, and that any interpretation which ignores this will have missed something of crucial importance for the understanding of the play.

University of Reading

R. B. GAMBLE

<sup>1</sup> p. 395 note 2.

## EIN LOB AUF DIE ALTPYTHAGOREISCHE GEOMETRIE

(Epinomis 990 D 1—6)

Die 'Epinomis' ist ein Werk, das uns zwar unter Platons Schriften überliefert worden ist, dessen Echtheit jedoch hie und da schon im Altertum bezweifelt wurde. Diogenes Laertios und eine Stelle im Suda-Lexikon berichten von einem Gerücht<sup>1</sup>, wonach Platons Schüler Philippos von Opus die 'Epinomis' bzw. das '13. Buch der Nomoi' verfaßt habe. »Es ist aber fraglich, ob dieses Gerücht nicht lediglich auf einem Schlusse beruht, den Proklos nach den anonymen Prolegomena zu Platons Philosophie (25. S 218, 19ff. Herm.) ausdrücklich gezogen hat, daß nämlich Platon, wenn er schon an der abschließenden Redaktion der 'Nomoi' durch den Tod verhindert wurde, erst recht nicht ein weiteres Werk habe schreiben können«<sup>2</sup>. — Wie man aus diesem Zitat ersieht, haben die antiken 'Zeugnisse' gegen die Echtheit die moderne Forschung zu *keiner eindeutigen Athetese* zu veranlassen vermocht. Es gibt zahlreiche Philologen und Historiker, die an dem echt Platonischen Ursprung

<sup>1</sup> Diog. Laert. 3, 37 und Suda s. v. <Φίλιππος ὁ Ὀπούντιος> φιλόσοφος.

<sup>2</sup> K. PRÄCHTER, Die Philosophie des Altertums (12. Aufl. in F. ÜBERWEGS Grundriß der Geschichte der Philosophie), Berlin 1926, 326.

der 'Epinomis' festhalten. — Vom Gesichtspunkt der folgenden Interpretation aus spielt die Frage der Echtheit so gut wie gar keine Rolle. Es handelt sich im ganzen Werk durchwegs und zweifellos um echt 'Platonische Gedanken', auch wenn der Verfasser in der Tat nicht Platon selber gewesen sein sollte.

Ich glaube, viel wichtiger als die bloße Frage der Authentizität ist eine Beobachtung, die anlässlich der Diskussion der Echtheit — soweit ich sehe — bisher *einstimmig* hervorgehoben wurde. Diese heißt nämlich<sup>1</sup>:

»Ist die 'Epinomis' echt, so liegt ihre besondere Bedeutung darin, daß sie *den äußersten Punkt der Annäherung Platons an den Pythagoreismus* vergegenwärtigt. Das Ganze ist ein Loblied auf Zahl, mathematische Wissenschaften, Astronomie und fromme Verehrung der Sterngottheiten . . .«

Ich halte diese Beobachtung für vollkommen zutreffend, und ich hoffe, daß auch die folgende Interpretation denselben Gedanken erhärten wird. Auch die Stelle nämlich, die ich hier näher erklären möchte, ist *ein Lob auf die altpythagoreische Wissenschaft*.

Bevor ich nun den fraglichen Text im Original und in deutscher Paraphrase hier abdrucken lasse, möchte ich nur noch an das zentrale Thema der 'Epinomis' erinnern. *Was muß der sterbliche Mensch lernen, um weise zu sein* (973 B)? Auf diese Frage sucht der Dialog die Antwort. Denn die meisten gewöhnlich so genannten Wissenschaften und Künste, mögen sie nun den unabweisbaren Bedürfnissen des praktischen Lebens oder (als schöne Künste) dem Spiele dienen, haben mit der Weisheit nichts zu tun, ebensowenig wie eine oft als 'sophia' bezeichnete gute Veranlagung, die sich in leichter Auffassung, sicherem Gedächtnis und rascher Entschlossenheit kundgibt (974 D—976 C). Dagegen wird — unter denjenigen Disziplinen, die wirklich zu Weisheit führen — die *Geometrie* in den folgenden interessanten Worten erwähnt:

... ὁ καλοῦσι μὲν σφόδρα γελοῖον ὄνομα γεωμετρίαν, τῶν οὐκ ὄντων δὲ ὁμοίων ἀλλήλοις φύσει ἀριθμῶν ὁμοίωσις πρὸς τὴν τῶν ἐπιπέδων μοῖραν γεγονυῖά ἐστιν διαφανής· ὁ δὲ θάυμα οὐκ ἀνθρώπινον ἀλλὰ γεγονὸς θεῖον φανερόν ἄν γίγνοιτο τῷ δυναμένῳ συννοεῖν.  
(990 D 1—6).

»... das, was mit dem sehr lächerlichen Namen als *Geometrie* bezeichnet wird, wobei es offenbar doch in dem *Ähnlich-Machen* (ὁμοίωσις) *der der Natur nach nicht-ähnlichen Zahlen* besteht, dank den Eigentümlichkeiten der Flächen (πρὸς τὴν τῶν ἐπιπέδων μοῖραν); dies ist in der Tat kein menschliches, sondern ein göttliches Wunder in den Augen derjenigen, die des Verständnisses fähig sind«.

<sup>1</sup> Ebd. 327.

Es fällt an diesem Zitat zunächst auf, daß in ihm die 'Geometrie' als ein 'sehr lächerlicher Name' für die betreffende Wissenschaft bezeichnet wird. — Der kundige Leser wird dadurch sogleich daran erinnert, daß Platon auch sonst manches an der Geometrie auszusetzen hatte. Einmal warf er z. B. den Geometern vor, daß diese sich einer irreführenden und lächerlichen Sprache bedienten, indem sie von 'Quadrieren' (= tetragonizein) und 'Konstruieren' sprachen, als ob in ihrer Tätigkeit das praktische Ausführen dieser Handlungen und nicht die Erkenntnis selber das Wichtige wäre<sup>1</sup>. Ein anderes Mal bezeichnete er die Geometrie (d. h. diesmal genauer: die Wissenschaft über den *Raum*) als ein 'Bastard-Wissen' (λογισμὸς νόθος)<sup>2</sup>. Und so ließen sich noch manche Platon-Stellen namhaft machen, die mit dem zitierten 'Epinomis'-Text mehr oder weniger im Einklang stehen. — Es wäre an und für sich auch gar nicht schwer zu erklären, wieso die 'Geometrie' in der 'Epinomis' als eine 'sehr lächerliche Bezeichnung' (σφόδρα γελοῖον ὄνομα) hingestellt wird. 'Geometrie' heißt ja griechisch: 'die Kunst des *Feldmessens*', also eine sehr praktische und nützliche Tätigkeit, etwas *Banausisches*, was nach platonisch-pythagoreischer Denkweise doch nicht das Wesen dieser Wissenschaft ausmachen kann.

Aber was heißt es doch, daß das Wesen der Geometrie *»in dem Ähnlich-Machen der der Natur nach nicht-ähnlichen Zahlen«* bestünde und daß dies *»dank den Eigentümlichkeiten der Flächen«* erreicht werde? Was bedeuten diese rätselhaften Worte? — Ich glaube, man würde den Sinn dieser sonst sehr aufschlußreichen Behauptung *ohne eine wohlbegründete Kenntnis* der altpythagoreischen Wissenschaft überhaupt nie erraten können. Darum muß ich hier zunächst an einige pythagoreischen Begriffe und Gedankengänge erinnern.

## I.

Es sei hier vor allem die Definition 16 aus dem 7. Buch der Euklidischen 'Elemente' angeführt<sup>3</sup>:

»Wenn zwei Zahlen bei gegenseitiger Vervielfältigung eine Zahl bilden, wird die entstehende eine *ebene Zahl* genannt, und die einander vervielfältigenden Zahlen ihre *Seiten*.«

Anstatt des Namens 'ebene Zahl' wird in der Fachliteratur heutzutage häufig auch die Bezeichnung '*Flächenzahl*' benutzt. Die Definition besagt also,

<sup>1</sup> Resp. 527. Vgl. Á. SZABÓ, Anfänge der griechischen Mathematik, München-Wien 1969, 419 ff.

<sup>2</sup> Timaios 52 A—B.

<sup>3</sup> Ich zitiere im folgenden Euklids Text immer nach der Übersetzung von C. THAER, Die Elemente von Euklid I—V (in: Ostwalds Klassiker der Exakten Wissenschaften), Leipzig 1933—1937.

daß das Produkt zweier Zahlen eine 'ebene Zahl' bildet, offenbar deswegen, weil das betreffende Produkt 'geometrisch' sich als ein *Rechteck* veranschaulichen läßt. Darum heißen auch die beiden *Faktoren* des Produkts 'Seiten', wie auch die beiden verschiedenen Segmente eines Rechtecks denselben Namen ('Seiten' = πλευράι) führen. — Natürlich kann im Sinne derselben Definition *jede beliebige Zahl* als eine 'ebene Zahl' aufgefaßt werden, wenn sie nämlich in zwei Faktoren zerlegt wird. Die Zahl 17 wird z. B. folgendermaßen als 'ebene Zahl' gedacht:

$$17 = 1 \times 17.$$

Die beiden Faktoren 1 und 17 sind die beiden 'Seiten' des Zahlrechtecks 17.

Noch interessanter als die vorhin angeführte ist die folgende Definition 21 desselben Euklidischen Buches:

»Ähnliche ebene und körperliche Zahlen sind solche, deren Seiten in Proportion stehen.«

Ich brauche hier wohl nicht zu betonen, daß der Begriff der »ähnlichen ebenen und körperlichen Zahlen« ebenso altpythagoreisch ist wie der Begriff der »ebenen und körperlichen Zahlen« überhaupt<sup>1</sup>. Das Überraschende und Ärgerrliche ist nur, wie diese hochwichtigen Begriffe der ältesten griechischen Mathematik von der historischen Forschung bisher so gut wie völlig vernachlässigt wurden.

Da uns in diesem Zusammenhang nur die »ähnlichen ebenen Zahlen« interessieren, wollen wir diese an zwei numerischen Beispielen illustrieren.

Nehmen wir als erstes Beispiel die Zahlen 2 und 8. Diese sind »ähnliche ebene Zahlen«, da für sie die folgenden Faktorenzerlegungen möglich sind:

$$2 = 1 \times 2 \text{ und } 8 = 2 \times 4.$$

Man macht also aus den beiden Zahlen die folgenden ähnlichen Rechtecke:

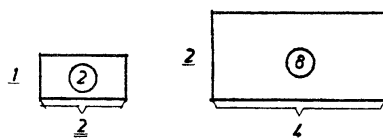


Abb. 1

'Ähnlich' sind diese beiden Zahlen (2 und 8) im Sinne der zitierten Definition, da die betreffenden Seiten 'in Proportion stehen'. D. h. man macht aus den kürzeren und längeren Seiten (einmal bzw. zweimal unterstrichen) der beiden Rechtecke je ein Verhältnis — 1 : 2 und 2 : 4 — und diese Verhältnisse sind in der Tat untereinander gleich:

$$1 : 2 = 2 : 4.$$

<sup>1</sup> Vgl. Á. SZABÓ, a. O. 64.

Dasselbe gilt auch für unser zweites Beispiel, für die Zahlen 3 und 12. Die Faktorenzerlegungen und die ähnlichen Rechtecke sind in diesem Fall:

$$3 = 1 \times 3 \text{ und } 12 = 2 \times 6.$$

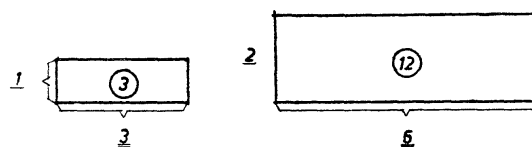


Abb. 2

Auch in diesem Fall sind die Verhältnisse der kürzeren und längeren Seiten untereinander gleich:  $1:2 = 3:6$ . (In einer anderen Faktorenzerlegung als  $2 \times 6$  — also etwa  $3 \times 4$  oder  $1 \times 12$  — wird die 12 natürlich *keine* zu der 3 'ähnliche ebene Zahl'.)

Dagegen nehmen wir jetzt als drittes Beispiel zwei Fälle für die *»nicht-ähnlichen ebenen Zahlen«*. Die Zahlen 3 und 5 oder 3 und 8 sind z. B. je zwei 'nicht-ähnliche ebene Zahlen'. Denn die möglichen Faktorenzerlegungen sind nur:  $3 = 1 \times 3$  und  $5 = 1 \times 5$  für den einen Fall; und für den anderen Fall:  $3 = 1 \times 3$  und  $8 = 1 \times 8$  (bzw. in diesem letzteren Fall wäre auch  $8 = 2 \times 4$  möglich). Aber in diesen Fällen kann man aus den entsprechenden Seiten — wenn man die betreffenden Zahlenpaare als Rechtecke veranschaulicht — nie eine Proportion zusammenstellen ( $1:1 \neq 3:5$ ; oder  $1:1 \neq 3:8$ ; oder auch  $1:2 \neq 3:4$  — alle diese Proportionen wären natürlich falsch). Dies heißt selbstverständlich auch so viel, daß die geometrischen Veranschaulichungen der betreffenden Zahlenpaare (3 und 5 bzw. 3 und 8) nie ähnliche Rechtecke sein können.

## 2.

Es geht nun aus den beiden zitierten Definitionen so viel auf alle Fälle eindeutig hervor, wie man in unserem 'Epinomis'-Zitat die Ausdrücke *»ähnliche Zahlen«* und *»der Natur nach nicht-ähnliche Zahlen«* zu verstehen hat. Die vorhin angeführten Beispiele waren eben teils *»ähnliche Zahlen«* (wie 2—8 und 3—12) und teils *»der Natur nach nicht-ähnliche Zahlen«* (3—5 und 3—8). — Aber es bleibt immer noch rätselhaft die Behauptung, wieso das Wesen der Geometrie *»in dem Ähnlich-Machen der der Natur nach nicht-ähnlichen Zahlen«* bestehen soll. — Um das Verstehen dieser letzteren Behauptung zu erleichtern, müssen wir uns in die altpythagoreischen Gedankengänge mehr vertiefen.

Es dürfte — ich verweise dafür auf meine letzten Untersuchungen<sup>1</sup> — schon bekannt sein, daß ein grundlegendes Problem der altpythagoreischen

<sup>1</sup> Vgl. dazu besonders die Kapitel *»Die mittlere Proportionale«* (S. 60ff.) und *»Die mittlere Proportionale in der Musik, Arithmetik und Geometrie«* (S. 229ff.) in meinem

Wissenschaft *die Frage nach der mittleren Proportionale zwischen zwei Zahlen* gebildet hatte. Es würde allzu weit führen, wenn ich hier die Belege im einzelnen zitieren und auch historisch die Frage beleuchten wollte, wieso die Pythagoreer zu diesem Problem gekommen waren. Es genüge hier anstatt dessen der bloße Hinweis darauf, eine wie große Rolle die 'mittlere Proportionale' auch in Euklids Arithmetik spielt.

Der Satz Elem. 8, 11 besagt z. B., daß es zwischen zwei Quadratzahlen *eine* mittlere proportionale Zahl gibt; der nächstfolgende Satz (8, 12) stellt dagegen fest, daß es zwischen zwei Kubikzahlen *zwei* mittlere proportionale Zahlen gibt. — Aber noch interessanter sind für uns jene beiden Sätze, die sich mit der Frage beschäftigen, *wann es überhaupt eine mittlere proportionale Zahl zwischen zwei Zahlen gibt*. Diese beiden Sätze — deren Wortlaut ich sogleich zitieren werde — beleuchten nämlich zu gleicher Zeit auch die Frage: *was überhaupt der Sinn jener »ähnlichen ebenen Zahlen« war, deren Begriff wir im vorigen Abschnitt kennenlernten*. — Nun heißen die beiden Sätze:

Elem. 8, 18: »Zwischen zwei ähnlichen ebenen Zahlen ( $\delta\upsilon\omicron\ \delta\mu\omicron\iota\omega\nu\ \epsilon\pi\iota\pi\acute{\epsilon}\delta\omega\nu\ \alpha\rho\iota\theta\mu\omega\nu$ ) gibt es eine mittlere proportionale Zahl.«

und Elem. 8, 20: »Wenn es zwischen zwei Zahlen eine mittlere proportionale Zahl gibt, dann sind die beiden Zahlen *ähnliche ebene Zahlen*.«

Es gehen aus diesen beiden Sätzen für uns die folgenden wichtigen Tatsachen ohne jeden Zweifel hervor:

1. Es gibt zwischen zwei Zahlen eine mittlere proportionale Zahl *nur dann*, wenn die gegebenen zwei Zahlen »ähnliche ebene Zahlen« sind. Sind dagegen die beiden gegebenen Zahlen »nicht-ähnliche ebene Zahlen«, dann gibt es zu ihnen auch gar keine mittlere proportionale Zahl. (Es ist wohl nicht nötig, hier zu betonen, daß diese grundlegende Erkenntnis der Arithmetik vollkommen richtig ist und daß sie in der Schule eigentlich auch heute noch gelehrt wird. Wir sprechen zwar nicht mehr von 'ebenen Zahlen' und von 'ähnlichen ebenen Zahlen' — ja auch die 'mittlere Proportionale' spielt in unserem Unterricht nicht mehr eine besonders große Rolle —, aber auch wir bringen unseren Kindern die den beiden zitierten Sätzen äquivalente Tatsache in der folgenden Form bei: man kann nur aus Quadratzahlen — 1, 4, 9, 16, . . . — Quadratwurzel ziehen. Versucht man dagegen aus einer Nicht-Quadratzahl — wie etwa 3, 5, 8 oder 17 — Quadratwurzel zu ziehen, so bekommt man *keine ganze Zahl und auch keine Bruchzahl*.)

S. 407 A. 1. zitierten Buch. Ich möchte übrigens bei dieser Gelegenheit auf die folgende zweifellos richtige Beobachtung bei S. WEIL (On Science, Necessity and the Love of God, Essays collected, translated and edited by R. REES, Oxford 1968, p. 4) hinweisen: »Perhaps for the Greeks proportion was the motive of geometrical studies, because most of their discoveries can be grouped around two problems: the search for *a mean proportional between two numbers* and the search for *two proportional means between two numbers*.«

2. Eindeutig beleuchten die zitierten zwei Sätze auch die Frage: was in der pythagoreischen Wissenschaft überhaupt der Sinn der »ähnlichen ebenen Zahlen« und der »nicht-ähnlichen ebenen Zahlen« war. *Es war für die Pythagoreer wichtig, über zwei gegebene Zahlen (oder auch über zwei mögliche Faktoren irgendeiner Zahl) festzustellen, ob diese »ähnliche ebene Zahlen« oder keine solchen sind; denn auf diese Weise konnten sie entscheiden, ob es zu den beiden gegebenen Zahlen (oder zu zwei möglichen Faktoren irgendeiner untersuchten Zahl) eine mittlere proportionale Zahl gibt oder nicht.* (Übrigens würde man das pythagoreische Problem der »ähnlichen ebenen Zahlen« heute etwa folgendermaßen formulieren:  $a$  und  $b$  sind *nur dann* »ähnliche ebene Zahlen«, wenn die folgenden Faktorenzerlegungen möglich sind:  $a = cd$  und  $b = ef$ , wobei noch  $c : e = d : f$  sein muß. Ist eine solche Faktorenzerlegung und eine solche Proportion der Faktoren für  $a$  und  $b$  nicht möglich, dann handelt es sich um keine »ähnlichen ebenen Zahlen«, und dann gibt es zu  $a$  und  $b$  auch keine mittlere proportionale Zahl, bzw. man kann aus dem Produkt  $ab$  keine Quadratwurzel ziehen.)

## 3.

Nun können wir jetzt schon die Frage anpacken: was eigentlich in unserem 'Epinomis'-Zitat die Behauptung heißen mag, daß das Wesen der Geometrie, »in dem Ähnlich-Machen der der Natur nach nicht-ähnlichen Zahlen« besteht. Man kann selbstverständlich von vornherein festlegen, daß diese Ausdrucksweise — von mathematischem Gesichtspunkt aus — keineswegs als völlig präzise gelten kann. Denn Zahlen, die »ihrer Natur nach nicht-ähnlich« sind, lassen sich niemals »ähnlich machen«. Der Sinn dieses Ausdruckes muß doch wohl ein anderer sein. Und es wird auch gar nicht schwer, diesen anderen Sinn zu erraten, wenn man die folgenden Tatsachen nicht vergißt.

Ich habe schon darauf hingewiesen, was überhaupt der Sinn der »ähnlichen ebenen Zahlen« für die Pythagoreer war. Man hat (wohl noch in einer sehr frühen Epoche) diesen interessanten arithmetisch-geometrischen Begriff offenbar deswegen eingeführt, weil man mit seiner Hilfe *das Problem der mittleren proportionalen Zahl zu zwei gegebenen Zahlen* zu lösen vermochte.

Man weiß auf der anderen Seite, daß es den Pythagoreern (wohl in einer verhältnismäßig *späteren* Epoche, aber doch noch *vor* Platon) gelungen war, das Problem der 'mittleren Proportionale' zu zwei gegebenen Zahlen — auch *ohne* Rücksicht darauf, ob diese 'ähnliche ebene Zahlen' sind oder nicht — *geometrisch* zu lösen. Diese geometrische Lösung des Problems wurde sozusagen mit der Hilfe einer interessanten 'Flächengeometrie' herbeigeführt. Darum scheint es mir, daß in unserem 'Epinomis'-Zitat eben auf diese letztere Tatsache hingewiesen wird, indem es hier heißt, daß das »Ähnlich-Machen der der Natur nach nicht-ähnlichen Zahlen« *dank den Eigentümlichkeiten der Flächen* (πρὸς τὴν τῶν ἐπιπέδων μοῖραν) verwirklicht werde.

Ich glaube nun, daß unter dem sonderbaren Ausdruck »*Ähnlich-Machen der der Natur nach nicht-ähnlichen Zahlen*« in Wirklichkeit jene geometrische Lösung des Problems der »mittleren Proportionale« zu verstehen sei, die in der Tat eine schöne und beachtenswerte Errungenschaft der altpythagoreischen Wissenschaft darstellt. Denn gelingt es, auf geometrischem Wege die »mittlere Proportionale« zwischen zwei »nicht-ähnlichen ebenen Zahlen« zu finden, so werden dadurch diese zu »quasi-ähnlichen Zahlen« gemacht, im folgenden Sinn: Es ist aus der Arithmetik bekannt, daß es eine mittlere proportionale Zahl *nur* zwischen zwei »ähnlichen Zahlen« gibt. Wird die »mittlere Proportionale« auf irgendeinem Wege auch zu zwei »nicht-ähnlichen Zahlen« gefunden, so hat man zunächst den Eindruck, als hätte man die nicht-ähnlichen Zahlen in ähnliche verwandelt.

Wir wollen nun hier vor allem die wichtigsten Etappen jenes Gedankenganges rekonstruieren, der die angedeutete geometrische Lösung des Problems ermöglicht hatte. — Wir nehmen als konkretes Beispiel die »nicht-ähnlichen Zahlen«  $a$  und  $b$ . Die zunächst nicht bekannte »mittlere Proportionale« zu diesen sei  $d$ . Wäre die Unbekannte  $d$  gefunden, dann hieße es also:  $a : d = d : b$ . Man weiß aus den zitierten arithmetischen Sätzen (Elem. 8, 18 und 20), daß  $d$  — als eine Zahl — *nicht existiert*. Aber ob man dieselbe Aufgabe auf einem anderen Wege nicht lösen könnte?

Wir gehen zunächst von der Arithmetik selbst aus. Es ist bekannt, daß in jeder richtigen Proportion das Produkt der äußeren Glieder dem Produkt der inneren Glieder gleich ist. Selbstverständlich war diese Tatsache auch den alten Pythagoreern bekannt. Ein rein arithmetischer Satz besagt ja bei Euklid:

Elem. 7, 19: »Stehen vier Zahlen in Proportion, dann muß das Produkt aus der ersten und vierten dem Produkt aus der zweiten und dritten gleich sein; und wenn das Produkt aus der ersten und vierten Zahl dem aus der zweiten und dritten gleich ist, dann müssen die vier Zahlen in Proportion stehen.«

Der erste Teil dieses Satzes — der uns hier vorläufig am meisten interessiert — besagt also, daß, wenn  $e : f = g : h$  ist, dann auch  $eh = fg$ . — Natürlich können dabei die Produkte  $eh$  und  $fg$  — im Sinne dessen, was oben über die 'ebenen Zahlen' gesagt wurde — auch als zwei *Rechtecke* gedacht werden. Der eben zitierte Satz besagt also, daß das *Rechteck* aus der ersten und vierten Zahl einer Proportion dem *Rechteck* aus der zweiten und dritten Zahl derselben gleich ist<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Man könnte eben deswegen anstatt des Satzes 7, 19 sogleich auch auf die Sätze 6, 16 und 6, 17 hinweisen, in denen gar nicht mehr von 'Produkten' sondern von *Rechtecken* — bzw. im Satz 6, 17 auch von einem *Quadrat* — die Rede ist. — Nachdem jedoch zum exakten Beweis der Sätze 6, 16 und 17 schon die *eudoxische Definition der Proportionalität* (Elem. 5 def. 5) nötig ist, lasse ich diese letzteren hier einstweilen unberücksichtigt.

Dasselbe müßte doch wohl auch für unseren Fall ( $a:d = d:b$ ) — wobei  $a$  und  $b$  »nicht-ähnliche ebene Zahlen« sind — irgendwie gültig sein, wenn nur  $d$  eine Zahl wäre. Aber vergessen wir einstweilen, daß es — wenn  $a$  und  $b$  »nicht-ähnliche ebene Zahlen« sind — eine Zahl  $d$  nicht gibt. Wohl haben wir zwar  $d$  noch gar nicht gefunden, aber wir verfahren jetzt so, als wäre sie schon bekannt. Das heißt also, wir machen aus den Zahlen  $a$  und  $b$  ein Rechteck ( $ab$ ), und dieses Rechteck muß einem zunächst noch nicht bekannten Quadrat ( $d^2$ ) gleich sein. Schreibt man jedoch die Proportion  $a:d = d:b$  — wobei  $d$  noch unbekannt ist — in der ihr völlig äquivalenten Form

$$ab = d^2,$$

so läßt sich diese Aufgabe rein geometrisch folgendermaßen formulieren: Gegeben ist ein Rechteck ( $ab$ ) mit seinen beiden Seiten ( $a$  und  $b$ ), und man sucht jenes Quadrat ( $d^2$ ), dessen Flächenmaß dem Flächenmaß des Rechtecks gleich ist. — Das ist eine wohlbekannte Aufgabe der altpythagoreischen *Flächenverwandlung*, die im Euklidischen Satz Elem. 2, 14 gelöst wird.

Man darf dabei die folgenden wichtigen und sehr charakteristischen Züge des Euklidischen Satzes Elem. 2, 14 nicht aus dem Auge verlieren:

Es wird zwar nach diesem Satz ein Rechteck in ein flächengleiches Quadrat verwandelt<sup>1</sup>, aber von *Proportionen* und von »ähnlichen ebenen Zahlen« wird darin kein Gebrauch gemacht. Ja, es wird auch überhaupt nicht gesagt, daß die Seiten des Rechtecks und die Seite des Quadrats Zahlen wären. — Aber wieso darf man dann in diesem Satz die Lösung eines Problems der Proportionslehre (d. h. die Lösung der »mittleren Proportionale«) erblicken? — Offenbar muß man anfänglich — also zu jener Zeit, in der die Lösung dieser Flächenverwandlung zum ersten Male gelungen war — von jener sozusagen 'natürlichen' Annahme des vorwissenschaftlichen Denkens ausgegangen sein, daß alle Streckensegmente *meßbar* wären. Nach dieser Annahme müßte man die Seiten eines Rechtecks bzw. die Seite eines Quadrats nach irgendwelcher Einheit immer *in Zahlen* ausdrücken können. — Läßt man diese naive Annahme gelten, so kann man im Falle der Flächengleichheit eines Rechtecks und eines Quadrats ( $ab = d^2$ ) sogleich den zweiten Teil des arithmetischen Satzes Elem. 7, 19 anwenden: »wenn das Produkt aus der ersten und vierten Zahl dem aus der zweiten und dritten gleich ist, dann müssen die vier Zahlen in Proportion stehen«, also wenn  $ab = d^2$ , dann auch  $a:d = d:b$ . (Diese eben zitierte Satzhälfte wird ja bei Euklid in Elem. 7, 19 auch tadellos bewiesen, aber wohlgemerkt: nur für *Zahlen*!) — Die Schwierigkeit taucht erst dann auf, wenn  $a$  und  $b$  (die Seiten des Rechtecks) ausdrücklich als »nicht-ähnliche ebene Zahlen« gewählt werden

<sup>1</sup> Der Satz Elem. 2, 14 heißt eigentlich: »Ein einer gegebenen geradlinigen Figur gleiches Quadrat zu errichten«. Aber diese Fassung der Aufgabe wurde offenbar nur zuliebe der größeren Allgemeingültigkeit gewählt. Das Wesentliche in der Lösung ist doch das Verwandeln eines Rechtecks in ein flächengleiches Quadrat.

und wenn man aus der Arithmetik schon weiß, daß eine mittlere proportionale Zahl *nur* zu zwei »ähnlichen ebenen Zahlen« zu finden ist. — Es gibt zwei verschiedene Möglichkeiten, um diese Schwierigkeit zu überwinden: *Entweder* führt man nämlich — für die 'mittlere Proportionale' zwischen zwei »nicht-ähnlichen Zahlen« — anstatt 'Zahl' einen neuen Begriff ein; *oder* man redet einstweilen überhaupt nicht von *Zahlen*, sondern man behandelt die Seiten des Rechtecks und Quadrats einfach als *Streckensegmente*. Von dieser letzteren Möglichkeit wird bei Euklid im Satz Elem. 2, 14 Gebrauch gemacht, wo außerdem — mit mustergültiger Vorsicht — auch von der *Proportion* der Streckensegmente gar nicht geredet wird! — Aber man darf in beiden Fällen sozusagen 'mit Recht' behaupten: die Geometrie hat Wunder gewirkt, denn die »mittlere Proportionale« — auch zu den »nicht-ähnlichen ebenen Zahlen« — ist da; auch die »nicht-ähnlichen Zahlen« sind also 'quasiähnlich' geworden.

## 4.

Nun glaube ich mit den vorangestellten Erörterungen und besonders mit dem Hinweis auf den Euklidischen Satz Elem. 2, 14 das Rätsel unseres 'Epinomis'-Zitates eigentlich schon gelöst zu haben. Es wird sich jedoch lohnen — nachdem das angedeutete »Wunder der Geometrie« an unserer Stelle in den höchsten Tönen gewürdigt wird —, hier auch jene Gedankengänge zu rekonstruieren, die es für die Pythagoreer ermöglicht hatten, jedes beliebige Rechteck — *ohne* Rücksicht darauf, ob die Seiten »ähnliche ebene Zahlen« sind oder nicht — in ein flächengleiches Quadrat zu verwandeln. — Ich muß für diese Rekonstruktion nur noch die Tatsache im voraus betonen: nach meiner Überzeugung könnte man den alpythagoreischen Ursprung für jeden einzelnen Schritt des im folgenden rekonstruierten Gedankenganges *zweifelloos* nachweisen. Nur der Kürze halber lasse ich hier die ausführlicheren Belege fort.

Alle pythagoreischen Flächenverwandlungen gehen von *Parallelogrammen*, und die meisten von dem speziellen Parallelogramm, dem *Quadrat*, aus.

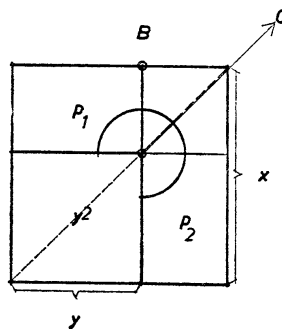


Abb. 3

Man nehme z. B. ein beliebiges Quadrat  $x^2$  (s. Abb. 3), und man wähle einen beliebigen Punkt seiner Diagonale (Punkt o) aus. Legt man durch diesen Punkt der Diagonale zwei Parallelen zu den beiden nebeneinanderliegenden Seiten des Quadrats  $x^2$ , so wird dadurch die Fläche des ursprünglichen Quadrats insgesamt *vier* Bestandteile zerlegt<sup>1</sup>. Fassen wir zunächst jene beiden kleineren Quadrate ins Auge, die auf diese Weise entstehen. Das eine ist  $y^2$  und das andere jenes kleine Quadrat rechts oben, das ich in unserer Abb. 3 unbezeichnet ließ. Diese kleineren Quadrate heißen nach der pythagoreischen Terminologie: »die um die Diagonale liegenden Quadrate«. Auch bei Euklid begegnet man diesem alten Namen — allerdings in einer allgemeineren Form. Denn wir lesen in den 'Elementen' — z. B. in Definition 2 des Buches 2, oder im Satz 6, 24 — über die »um die Diagonale liegenden Parallelogramme«. (Euklid redet immer im allgemeinen über *Parallelogramme*. Wir dagegen — um einfacher zu sein — beschränken unsere Betrachtungen auf das *Quadrat*.) — Noch interessanter sind (von den Bestandteilen des ursprünglichen Quadrats  $x^2$ ) jene beiden Rechtecke, die ich in unserer Abb. 3 als  $p_1$  und  $p_2$  bezeichnet habe. Auch diese hatten nämlich in der pythagoreischen Terminologie einen besonderen Namen; sie hießen 'Ergänzungen' (= *parapleromata*), nämlich »Ergänzungen der um die Diagonale liegenden Parallelogramme«<sup>1</sup>. — Und zum Schluß muß ich noch daran erinnern, daß die Pythagoreer jene Fläche, die aus den beiden 'parapleromata' ( $p_1 + p_2$ ) sowie aus dem kleinsten Quadrat rechts oben auf Abb. 3 besteht, als Einheit zusammenfaßten. Der Name dieser Einheit — die ich auf Abb. 3 mit

<sup>1</sup> Diese Zerlegung eines Quadrats in vier Bestandteile wird bei Euklid (im Satz Elem. 2, 4) in einer sozusagen *umgekehrten Form* behandelt. Das heißt: ich ging oben im Text — um meine folgenden Erörterungen zu erleichtern — von jenen beiden Parallelen aus, die man durch einen beliebigen Punkt der Diagonale eines Quadrats ziehen kann. Dagegen geht der Euklidische Satz (Elem. 2, 4) von einer beliebig geteilten Strecke aus. Man blicke also in unserer Abb. 3 auf die Strecke  $x$ , die im beliebigen Punkt  $B$  zweigeteilt wird, und man lese dazu den Satz

Elem. 2, 4: »Teilt man eine Strecke, wie es gerade trifft, so ist das Quadrat über der ganzen Strecke ( $x^2$ ) den Quadraten über den Abschnitten (also dem  $y^2$  und dem kleinen Quadrat rechts oben) und zweimal dem Rechteck aus den Abschnitten ( $p_1 + p_2$ ) zusammen gleich.«

Wie man sieht, ist dieser Satz in der Tat bloß die Umkehrung dessen, was ich oben im Text sage. Die ursprüngliche Form war natürlich *nicht* die Formulierung des Satzes 2, 14, sondern meine Formulierung: »ein beliebiger Punkt der Diagonale des Parallelogramms und zwei Parallelen durch ihn«. Denn die echt pythagoreischen Ausdrücke: »die um die Diagonale liegenden Parallelogramme« und »Ergänzungen« (*parapleromata*) sind ja nur dann sinnvoll, wenn man von der Formulierung oben im Text, und *nicht*, wenn man von der Formulierung im Satz Elem. 2, 14 ausgeht.

<sup>2</sup> Ein wichtiger Satz über die 'parapleromata' besagt bei Euklid:

Elem. 1, 43: »In jedem Parallelogramm sind die Ergänzungen (= *parapleromata*) der um die Diagonale liegenden Parallelogramme einander gleich.«

In unserem konkreten Fall (Abb. 3) sind die 'parapleromata' sogar *kongruente* Rechtecke:  $p_1$  und  $p_2$ .

dem Kreisbogen kenntlich gemacht habe — hieß: '*Gnomon*'. Auch dieser Name erscheint bei Euklid — auf Parallelogramme verallgemeinert — in der 2. Definition des Buches 2:

»In jedem Parallelogramm soll ein beliebiges der um die Diagonale liegenden Parallelogramme zusammen mit den beiden Ergänzungen (= *parapleromata*) *Gnomon* heißen«.

Der größeren Übersichtlichkeit zuliebe zeige ich den für uns wichtigen '*Gnomon*' unserer Abb. 3 auch als eine besondere Skizze: Abb. 4.

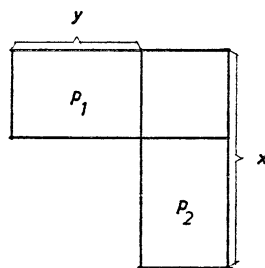


Abb. 4

Faßt man nun unsere Abb. 3 noch einmal genauer ins Auge, so wird wohl einem jeden sogleich der folgende Zusammenhang klar: zieht man zwei Parallelen zu den beiden Seiten des Quadrats durch einen beliebigen Punkt seiner Diagonale, so wird dadurch die ursprüngliche Quadratfläche ( $x^2$ ) in die Summe eines kleineren Quadrats ( $y^2$ ) und eines *Gnomons* aufgelöst. Man dürfte also aufschreiben (Abb. 3):

$$x^2 = y^2 + \text{'Gnomon'}.$$

Wichtig wird für uns dieser, auch in Gleichung ausgedrückte Zusammenhang, wenn man sich folgendes überlegt. Man kann aus dem '*Gnomon*' in Abb. 4 jenes Flächenstück, das aus dem kleinsten Quadrat rechts oben und dem Rechteck  $p_2$  besteht, der Fläche  $p_1$  hinzufügen, als eine Art »Fortsetzung nach

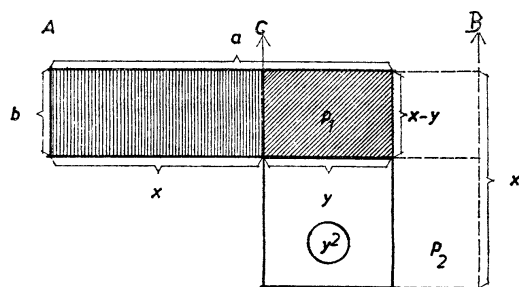


Abb. 5

links zu«. Auf diese Weise wird aus dem 'Gnomon' ein größeres Rechteck, und unsere ganze Figur in Abb. 3 wird wie die Figur in Abb. 5 aussehen. Das dem ursprünglichen 'Gnomon' flächengleiche Rechteck habe ich in Abb. 5 schraffiert. Man kann daraus auch leicht ablesen, daß die Fläche des schraffierten Rechtecks:  $(x+y) \times (x-y)$  ist. Das ursprünglich Quadrat ( $x^2$ ) wurde also in die Summe eines kleineren Quadrats ( $y^2$ ) und eines Rechtecks —  $(x+y) \times (x-y)$  — aufgelöst:

$$x^2 = y^2 + (x+y) \times (x-y).$$

Und nun führe man die folgende Vereinfachung durch. Es seien die beiden Seiten des Rechtecks in Abb. 5:

$$x+y = a \text{ und } x-y = b.$$

Natürlich kann man mit  $a$  und  $b$  auch das ursprüngliche Quadrat —  $x^2$  — und das kleinere Quadrat —  $y^2$  — ausdrücken. Diese werden, wie Abb. 5 zeigt:

$$x^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \text{ und } y^2 = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

Auf diese Weise wird jedoch das Rechteck  $ab$  — nach Abb. 5 — die *Differenz* zweier Quadrate:

$$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \dots\dots\dots (I)$$

Eben dieser wichtige Zusammenhang wird im Euklidischen Satz Elem. 2,5 — einer Erbschaft der altpythagoreischen Geometrie — bewiesen<sup>1</sup>.

Will man nun irgendein Rechteck, *ohne Rücksicht auf Proportionen und Zahlen*, in ein flächengleiches Quadrat verwandeln, so wird entscheidend wichtig jene Tatsache, daß nach unserer letzten Gleichung (I) jedes Rechteck ( $ab$ ) sich als die *Differenz von zwei Quadraten* —  $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$  — ausdrücken läßt.

<sup>1</sup> Allerdings wird der obige Zusammenhang bei Euklid (im Satz Elem. 2, 5) sozusagen *umgekehrt formuliert*. D. h. Euklid geht nicht vom Quadrat ( $x^2$  in Abb. 3), und auch nicht vom Rechteck ( $ab$  in Abb. 5), sondern von der Strecke  $AB = a+b$  (Abb. 5) aus. Diese Strecke wird in Punkt C halbiert und in zwei ungleiche Abschnitte ( $a$  und  $b$ ) geteilt. Darum heißt der Satz (2, 5) selber:

»Teilt man eine Strecke (AB) sowohl in gleiche als auch in ungleiche Abschnitte, so ist das Rechteck aus den ungleichen Abschnitten der ganzen Strecke ( $ab$ ) zusammen mit dem Quadrat über der Strecke zwischen den Teilpunkten  $\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$  dem Quadrat über der Hälfte der ganzen Strecke  $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$  gleich.«

Die Umkehrung des ursprünglichen Gedankenganges hat bei Euklid sozusagen nur '*stilistische Gründe*', auf die ich in dieser Arbeit *nicht* eingehen kann. Es sei hier nur darauf hingewiesen, daß eine ähnliche 'Umkehrung' auch oben schon, S. 415 Anm. 1 erwähnt wurde.

Denn man kann es auf der anderen Seite mit einer wohlbekannten Gleichung leicht erreichen, daß die »Differenz von zwei Quadraten« ein Quadrat sei. Man wende nämlich den sog. Pythagoreischen Lehrsatz auf das rechtwinklige Dreieck in unserer Abb. 6 an:

$$c^2 = f^2 + g^2.$$

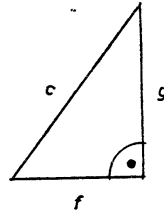


Abb. 6

(Das Quadrat über der Hypotenuse ist der Summe der Quadrate über den beiden Katheten gleich, Elem. I, 47.) Daraus folgt, daß die Differenz des Quadrates über der Hypotenuse und des Quadrates über der einen Kathete dem Quadrat über der anderen Kathete gleich wird:

$$c^2 - f^2 = g^2. \quad \dots\dots\dots (II)$$

Um die beiden Gleichungen — (I) und (II) — miteinander zu verbinden, konstruiert man also ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse  $c = \frac{a+b}{2}$  und mit der einen Kathete  $f = \frac{a-b}{2}$ . Auf diese Weise erreicht man, daß — nach

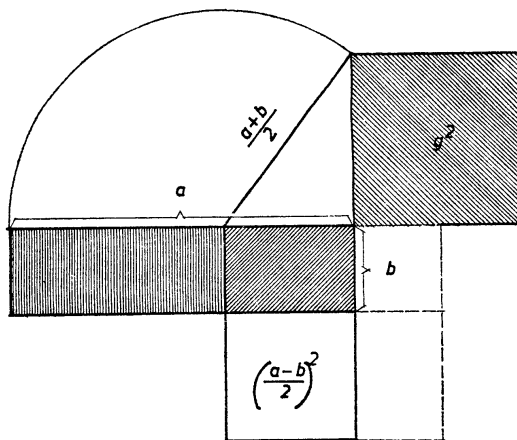


Abb. 7

Abb. 7 — die Differenz der beiden Quadrate  $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$  auf der einen Seite das Rechteck  $ab$ , und auf der anderen Seite das Quadrat  $g^2$  wird:

$$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = g^2.$$

Das ist eben der Sinn des Gedankenganges im Euklidischen Satz Elem. 2, 14.

Ist jedoch  $ab = g^2$ , so muß — nach der Analogie des oben (S. 412) zitierten Satzes Elem. 7, 19 — wohl auch  $a:g = g:b$  sein (die Seite des Quadrats ist die 'mittlere Proportionale' zwischen den beiden Seiten des ihm flächengleichen Rechtecks), was jedoch im Satz Elem. 2, 14 *vorsichtig verschwiegen wird*.

Auf alle Fälle wird ein jeder, der für geniale, schöne und elegante mathematische Ableitungen einen Sinn hat, den altpythagoreischen Gedankengang, den ich eben versucht habe zu rekonstruieren, *nur bewundern können*.

## 5.

Nachdem nun in der vorgelegten Interpretation der Sinn des rätselhaften 'Epinomis'-Zitates erklärt wurde, fassen wir die ganze Stelle noch einmal ins Auge. — Es wird darin die Geometrie nicht als benaisches *Feldmessen*, sondern als die Kunst gefeiert, die das »Ähnlich-Machen der der Natur nach *nicht-ähnlichen Zahlen*« — *dank gewissen Eigentümlichkeiten der Flächen* — fertigzubringen vermag. Diese Leistung wird im letzten Satz unserer Stelle folgendermaßen gewürdigt:

»Dies ist in der Tat kein menschliches, sondern ein göttliches Wunder in den Augen derjenigen, die des Verständnisses fähig sind«.

Aber ist dieses Lob wirklich berechtigt, oder soll man es bloß für die Übertreibung eines Enthusiasten halten? — Um diese Frage entscheiden zu können, überlege man sich folgendes.

Die Arithmetik der Alten Griechen hat die beiden grundlegenden Begriffe, 'Zahl' und 'Proportion' folgendermaßen definiert:

Elem. 7 def. 2: »Zahl ( $\alpha\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma$ ) ist die aus Einheiten zusammengesetzte Menge«.

und Elem. 7 def. 20: »Zahlen *stehen in Proportion*, wenn die erste von der zweiten Gleichvielfaches oder derselbe Teil oder dieselbe Menge von Teilen ist, wie die dritte von der vierten.«

Man hat außerdem schon gesehen, daß im Sinne dieser Arithmetik eine *mittlere proportionale Zahl* nur zu zwei »ähnlichen ebenen Zahlen« zu finden ist. Haben nun die Geometer dennoch *jedes beliebige Rechteck* in ein flächengleiches Quadrat zu verwandeln vermocht, so wurden dadurch die Grenzen der durch die angedeuteten Tatsachen charakterisierbaren Arithmetik *durchbrochen*. Denn die Seite jenes Quadrats, dessen Flächenmaß dasselbe ist wie dasjenige eines Rechtecks, ist zwar immer die »mittlere Proportionale« zu den Recht-

ecksseiten, aber diese Quadratseite läßt sich — falls die Rechteck-Seiten *nicht-ähnliche* ebene Zahlen« sind — dennoch nicht als eine ebensolche Zahl wie die Seiten des Rechtecks ausdrücken. Die betreffende Quadratseite ist eine *der Länge nach unmeßbare* (= *linear inkommensurable*) Strecke. Man kann diese Strecke nur nach dem auf sie errichteten Quadrat messen, da man eben weiß, daß das fragliche Quadrat dem verwandelten Rechteck flächengleich ist. Die betreffende *linear inkommensurable* Strecke ist also *quadratisch kommensurabel*. (Darum heißt in der pythagoreischen Terminologie der Geometrie: *dynamis* = 'Quadratwert eines Rechtecks', bzw. 'Quadrat'<sup>1</sup>.)

Die geometrische Lösung des Problems der 'mittleren Proportionale' hat also zu der Entdeckung jener *linearen Inkommensurabilität* geführt, die eine *quadratische Kommensurabilität* ist. (Diese Art Inkommensurabilität wird, wie bekannt, im 10. Buch der Euklidischen 'Elemente' behandelt, welches Buch also — mindestens zu einem bedeutenden Teil — pythagoreischen Ursprungs sein muß.)

Natürlich mußte man gleichzeitig mit der Entdeckung der linearen Inkommensurabilität auch einsehen, daß jene Proportionenlehre, die auf den beiden grundlegenden Definitionen der Arithmetik: Elem. 7 def. 2 und def. 20 ('Zahl' bzw. »Proportion der Zahlen«) basiert, allzu eng ist. Es waren zum Neuaufbau der Proportionenlehre zwei neue grundlegende Begriffe nötig. Man mußte nämlich — anstatt der 'Zahl' — vor allem den Begriff der 'Größe' (μέγεθος) definieren:

Elem. 5 def. 4: »Daß sie ein Verhältnis zueinander haben, sagt man von Größen, die vervielfältigt einander übertreffen können«<sup>2</sup>.

Und dann hat man die »Proportion der Größen« folgendermaßen definiert:

Elem. 5 def. 5: »Man sagt, daß Größen in demselben Verhältnis stehen, die erste zur zweiten wie die dritte zur vierten, wenn bei beliebiger Vervielfältigung die Gleichvielfachen der ersten und dritten den Gleichvielfachen der zweiten und vierten gegenüber, paarweise entsprechend genommen, entweder zugleich größer oder zugleich gleich oder zugleich kleiner sind.«

Diese beiden großartigen Definitionen bilden die feste Grundlage jener Proportionenlehre im 5. Buch der Euklidischen 'Elemente', die — nach unserem heutigen historischen Wissen — mindestens im wesentlichen als *ein Werk des Eudoxos von Knidos* gilt. In der Tat: hat jener Scholiast recht, wonach Euklid sein 5. Buch hauptsächlich aus dem Werk des Eudoxos übernommen

<sup>1</sup> Zum Begriff '*dynamis*' siehe den ganzen ersten Teil in meinem Buch »Anfänge der griechischen Mathematik« (vgl. oben S. 407 Anm. 1) und die dort angegebene Literatur.

<sup>2</sup> Der zweite, unterstrichene Teil dieser Definition heißt heutzutage gewöhnlich: »*Archimedisches Grundgesetz*«. Vgl. H. v. MANGOLDT — K. KNOPP, Einführung in die höhere Mathematik, 8. Aufl. Leipzig 1944, I. Bd. S. 115 mit der Anm. 1, in der daran erinnert wird, daß dasselbe Axiom wohl noch von Eudoxos stammt.

habe<sup>1</sup>, so müssen auch die beiden vorhin zitierten Definitionen von Eudoxos sein, denn eben diese haben die vielbewunderte 'eudoxische Proportionenlehre', eine der schönsten Leistungen der antiken Mathematik, ermöglicht.

Was nun die Mathematik des Eudoxos betrifft, so kann diese auch heute noch — nach den großen Leistungen des vorigen Jahrhunderts auf verwandtem Gebiete — nur bewundert werden. Die Proportionenlehre des Eudoxos ist auch für den heutigen Wissenschaftler ebenso genial, frisch, zeitgemäß, ja auch 'modern', wie sie im 4. Jh. v. Chr. war<sup>2</sup>. — Aber uns beschäftigt hier nicht die heutige Beurteilung des Eudoxos, sondern jene Geometrie der Pythagoreer (in der historischen Fachliteratur bisher häufig mit dem falschen und irreführenden Namen 'geometrische Algebra' bezeichnet; richtiger wird man in der Zukunft bloß von »*Flächenverwandlung und Flächenanlegung der Pythagoreer*« reden), die im 'Epinomis'-Zitat gelobt wird. Verdient auch diese pythagoreische Wissenschaft jene Bewunderung, die ihr in der 'Epinomis' gezollt wird? — Zur Antwort auf diese Frage möchte ich nur darauf hinweisen, daß die Proportionenlehre des Eudoxos *ohne* die hier behandelte alte Lehre über die Flächenverwandlungen *historisch nie möglich geworden wäre*. Mit Eudoxos zusammen verdient also auch diese alte Wissenschaft unsere restlose Anerkennung.

Ich glaube, der Historiker der Mathematik würde nach den obigen Erörterungen vielleicht nur noch einen Vergleich mit den glänzenden zahlen-theoretischen Leistungen von K. Th. WEIERSTRASS (1815—1897) und J. W. DEDEKIND (1831—1916) erwarten. Aber das kann nicht mehr die Aufgabe dieser bloß auf den Pythagoreismus beschränkten schlichten Texterklärung sein<sup>3</sup>.

Budapest

ÁRPÁD SZABÓ

<sup>1</sup> Vgl. Euclides (ed. HEIBERG, 1888) Bd. V 280.

<sup>2</sup> Vgl. H. W. TURNBULL in: J. R. NEWMAN, *The World of Mathematics*, New York 1956, I 96—97.

<sup>3</sup> Absichtlich vermieden habe ich hier einstweilen die Auseinandersetzung mit O. TOEPLITZ, *Quell. u. Stud. z. Gesch. Math.* B Bd. II, 1933, 336—8.