

VOGT, H.
1907

1907

Von

$$\Pi(f, f_1, \dots, f_n) = 0$$
$$\begin{aligned}0 &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \Pi}{\partial f} + \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial \Pi}{\partial f_1} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x} \frac{\partial \Pi}{\partial f_n} \\0 &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial \Pi}{\partial f} + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial \Pi}{\partial f_1} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \frac{\partial \Pi}{\partial f_n} \\&\vdots \\0 &= \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial \Pi}{\partial f} + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \frac{\partial \Pi}{\partial f_1} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \frac{\partial \Pi}{\partial f_n}\end{aligned}$$

also auf das Verschwinden der Funktionaldeterminante $\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \dots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$

*) Journ. f. d. r. u. a. Math. Bd. 22, 1841 S. 328 f., Jacobis Gesammelte Werke Bd. III, 1884 S. 404 f., Ausgabe von P. Stäckel in Ostwalds Klassikern der exakten Wissenschaften Nr. 78, 1896 S. 16 f.

Von

Haben die Inder also auch den Pythagoreischen Lehrsatz als allgemein gültig ausgesprochen, so ist er bei ihnen doch keine mit dem Kennzeichen

der Notwendigkeit behaftete geometrische Wahrheit, sondern ein glückliches Ergebnis von Intuition und Ausmessung in Einzelfällen. Ebenso ist sicher, daß die alten Inder das Irrationale, dessen Kenntnis man ihnen zugeschrieben hat, nicht gekannt haben.

So bleibt nach wie vor die Schöpfung der wissenschaftlichen Geometrie insbesondere die Feststellung des Pythagoreischen Lehrsatzes als einer wissenschaftlichen Tatsache und die Entdeckung des Irrationalen das Werk der Griechen. Was sie von den Völkern des Orients, zu denen jetzt auch die Inder treten, erhalten haben können, das kann höchstens ein gewisses Rohmaterial von anschaulich und messend gewonnenen empirischen Tatsachen gewesen sein.

Über eine Verallgemeinerung der Alhazenschen Aufgabe

von

Dr. Pyrkosch.

Eine Kurve 4. Ordnung ist durch 14 ihrer Punkte im allgemeinen bestimmt. Demnach bestimmen 13 Punkte im allgemeinen ein Büschel von Kurven 4. Ordnung. Soll ein Punkt ein Doppelpunkt der Kurve sein, so zählt er für 3 einfache Punkte, und eine Kurve 4. Ordnung vom Geschlecht 0 ist also durch ihre 3 Doppelpunkte und 5 einfache Punkte bestimmt. Demnach ist ein Büschel solcher Kurven im allgemeinen festgelegt, wenn 3 Punkte als Doppelpunkte und außerdem 4 einfache Punkte gegeben sind.

Diese 3 Doppelpunkte können nun sämtlich oder z. T. in die Diagonalepunkte des von den 4 einfachen Punkten gebildeten Vierecks fallen, und im folgenden wollen wir den Fall näher ins Auge fassen, wo 2 Doppelpunkte mit 2 Diagonalepunkten zusammenfallen, während der dritte beliebig bleibt. Ein solches Büschel läßt sich auf folgende Weise erzeugen:

Wir betrachten ein Kegelschnittbüschel mit den Grundpunkten F_1, F_1', F_2, F_2' . Der Schnittpunkt von F_1F_1' und F_2F_2' sei A, der von F_1F_2 und $F_1'F_2'$ sei B. Dann wird durch das Büschel auf AB eine Involution mit den Doppelpunkten A und B festgelegt. Von einem beliebig gewählten festen Punkte O aus projizieren wir diese Punktinvolution durch eine Strahleninvolution. Wir können dann die Kegelschnitte des Büschels [F] und die Strahlenpaare der Involution [O] als lineare Mannigfaltigkeiten auf ∞^3 Arten projektiv auf einander beziehen, indem wir 3 Elemente der einen 3 Elementen der anderen zuordnen. Wir setzen nunmehr fest, daß dem Geradenpaar des Kegelschnittbüschels, das seinen Doppelpunkt in A hat, der Doppelstrahl OA der Strahleninvolution entsprechen soll und dem Geradenpaar des Büschels mit dem Doppelpunkt B der Doppelstrahl OB. Dann sind noch ∞^1 projektive Zuordnungen der Involution und des Büschels möglich.

Es ist nun leicht einzusehen, daß das Erzeugnis irgend einer dieser Zuordnungen eine Kurve 4. Ordnung ist, die in A, B, O je einen Doppelpunkt hat und die 4 Punkte F zu einfachen Punkten, so daß also die ∞^1 Zuordnungen ein Büschel 4. Ordnung mit den festen Doppelpunkten A, B, O und den einfachen Punkten F_1, F_1', F_2, F_2' erzeugen.

Insbesondere können wir irgend einem Strahlenpaar σ der Involution [O] den Kegelschnitt des Büschels [F] zuordnen, der die AB in denselben Punkten schneidet wie σ ; dann gilt dies von jedem Paar entsprechender Elemente, und die Involution und das Kegelschnittbüschel liegen perspektiv inbezug auf die Punktinvolution auf AB. Dann löst sich von der erzeugten Kurve 4. Ordnung die Gerade AB ab, und die Restkurve ist eine Kurve 3. Ordnung, die in O einen Doppelpunkt hat und außer durch die Punkte F durch die Punkte A und B geht.

Lassen wir irgend einem Kegelschnitt des Büschels ein Strahlenpaar der Involution entsprechen, das entweder dem Doppelstrahl OA oder dem Doppelstrahl OB unendlich benachbart ist, so gelangen wir zu 2 anderen zerfallenden Kurven des Büschels. Die eine besteht aus der Doppelgeraden OA und dem von B ausgehenden Geradenpaar $F_1F_2, F_1'F_2'$ und die andere aus der Doppelgeraden OB und dem von A ausgehenden Geradenpaar F_1F_1', F_2F_2' .

Schließlich ist durch die 5 Punkte A, B, O, F_1, F_2' und ebenso durch A, B, O, F_1', F_2 je ein Kegelschnitt bestimmt, und diese beiden Kegelschnitte bilden zusammen auch eine zerfallende Kurve des Büschels, indem auf ihnen beiden durch die Strahleninvolution und das Kegelschnittbüschel dieselbe Involution eingeschnitten wird.

Wir wenden uns nunmehr zu folgender Aufgabe, die mit einem Kurvenbüschel der beschriebenen Art in einem gewissen Zusammenhang steht:

Wenn ein Kreis κ gegeben und in derselben Ebene 2 feste Punkte A und B, die Punkte X auf κ zu ermitteln, nach denen ein von A ausgehender Lichtstrahl zielen muß, um nach der Brechung an dem Kreise, der 2 optisch verschiedene Medien trennt, nach B zu gelangen.

Es sei O der Mittelpunkt des Kreises κ , X ein Punkt der gesuchten Art, also OX das Einfallslot, α der Einfallswinkel, β der Brechungswinkel, n der Brechungsexponent. Dann ist $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n$. Stehen AM und BN senkrecht auf OX, so ist $\sin \alpha = \frac{AM}{AX}$, $\sin \beta = \frac{BN}{BX}$, folglich $\frac{AM}{BN} \cdot \frac{BX}{AX} = n$. Ist R der Schnittpunkt von OX und AB, so ist $\frac{AM}{BN} = \frac{AR}{BR}$, folglich $\frac{AX}{BX} = n \cdot \frac{AR}{BR}$ oder $\lambda = n \cdot \rho$, wenn $\frac{AX}{BX} = \lambda$, $\frac{AR}{BR} = \rho$ gesetzt wird.