

257
BOUSQUET, J.
1951

LES CONFRÈRES DE LA PORTE MAJEURE

ET

L'ARITHMOLOGIE PYTHAGORICIENNE

Nous savons par Euclide (*Éléments*, VII, déf. 22) ce que les mathématiciens grecs appelaient un nombre parfait : $\tau\acute{\epsilon}\lambda\epsilon\iota\omicron\varsigma \alpha\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma \acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu \acute{o} \tau\omicron\iota\varsigma \acute{\epsilon}\alpha\upsilon\tau\omicron\upsilon \mu\acute{\epsilon}\rho\epsilon\tau\iota\nu \acute{\iota}\sigma\omicron\varsigma \acute{\omega}\nu$. Un nombre parfait est celui qui est égal à la somme de ses parties aliquotes, c'est-à-dire de ses diviseurs y compris 1. Euclide explique dans la 36^e proposition du IX^e livre la génération de ces nombres parfaits (1). Nicomaque de Gérasa (*Introd. Arithm.*, I, 16) en connaissait quatre, soit 6, 28, 496 et 8128; en effet

$$6 = 1 + 2 + 3,$$

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14,$$

$$496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248, \text{ etc.}$$

L'expression générale établie par Euclide est en notation moderne :

$$(2^n - 1) 2^{n-1},$$

où $2^n - 1$ est un nombre premier.

(1) Cf. Tannery, *Pour l'histoire de la science hellène*, éd. de 1887, p. 370 et 377 (le nombre 6 appelé « holomélie » par les pythagoriciens, « suivant les traces d'Orphée »); Heath, *History of Greek Mathematics* (1921), I, p. 74-75; id., *Manual of Greek Math.* (1931), p. 41-42; P. H. Michel, *De Pythagore à Euclide*, Paris, Belles-Lettres (1950), p. 342-346. — Voir Martianus Capella, p. 269, 24 éd. Eysenhardt (Teubner), et p. 260, 24 : *SENARIUM vero perfectum analogicumque esse quis dubitet cum suis partibus impleatur*? Le nombre 6 fut choisi par Porphyre pour la division en enneades de l'œuvre de Plotin, *Vita Plotini*, 24 : « J'avais les 54 livres de Plotin, et je les ai partagés en six Ennéades; j'eus ainsi la joie de trouver le nombre parfait six et le nombre neuf. » (trad. Bréhier).

Les mathématiciens ont découvert jusqu'ici douze nombres parfaits; les cinq premiers, soit un de plus qu'au temps de Nicomaque, étaient connus au XV^e siècle; huit furent calculés par Jean Prestet (mort en 1670), Fermat ayant établi que $2^n - 1$ est un nombre premier : le fait a été prouvé plus tard par Euler. Les quatre derniers ont été découverts depuis 1886 seulement.

Les quatre nombres parfaits connus des Anciens sont en effet, suivant la formule euclidienne :

$$6 = (2^2 - 1) 2 = 3 \times 2$$

$$28 = (2^3 - 1) 2^2 = 7 \times 4$$

$$496 = (2^5 - 1) 2^4 = 31 \times 16$$

$$8128 = (2^7 - 1) 2^6 = 127 \times 64.$$

Les puissances n des autres nombres parfaits, connus depuis Nicomaque, sont respectivement 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107 et 127.

Avant Euclide, nous dit-on (1), nous n'avons aucun témoignage écrit pour la découverte des nombres parfaits au sens euclidien : Aristote, Platon, Philolaos n'en parlent pas encore. Les Pythagoriciens appelaient parfait le nombre 10, mais dans une autre acception du mot, plus philosophique et religieuse qu'arithmétique. Étant la somme des quatre premiers nombres, le nombre 10 formait la « série de quatre », c'est ce qu'on appelle la petite Tétractys (2). Cette série comprend les nombres dont on forme les rapports correspondants aux intervalles musicaux, quarte, quinte et octave (3). Mais le nombre 10 n'entre pas dans la série « parfaite » au sens euclidien, dont la perfection naît de propriétés bien différentes (4).

(1) Cf. p. ex. Abel Rey, *La Jeunesse de la Science grecque*, p. 281-282. Les nombres parfaits et les nombres « amis » nous font, dit A. Rey, « côtoyer la mystico-magie des nombres ».

(2) Il faudra maintenant renvoyer, dès sa parution, à la thèse de P. KucharSKI (soutenue en 1950) sur la doctrine pythagoricienne de la Tétrade.

(3) Outre A. Delatte, *Études sur la Litt. pythagoricienne* (1915), p. 248-268, et les thèses d'Isidore Lévy, cf. P. Boyancé, *Culte des Muses* (1937), p. 101 sq.; id. *Note sur la Tétractys*, *Antiq. Class.*, 1951, p. 421-425.

(4) On sait que la Tétractys est assimilée par le « catéchisme des acousma-

Cependant, dans le néo-pythagorisme d'époque hellénistique et romaine, on a certainement assimilé à la doctrine de la secte les résultats arithmologiques acquis depuis le IV^e siècle et codifiés dans les *Éléments* d'Euclide (1). Or nous possédons, pour les temps avoisinant l'ère chrétienne, deux documents, l'un archéologique, l'autre littéraire, expressément pythagoriciens, où nous voyons le nombre parfait 28 utilisé d'une manière encore plus révélatrice qu'on ne l'a reconnu jusqu'ici. Ils ont été déjà rapprochés l'un de l'autre, mais nous pouvons faire un pas de plus sur la voie qui nous a été ouverte : dans la Basilique de la Porte Majeure, si parfaitement élucidée par M. Jérôme Carcopino, on a pu connaître avec certitude quel était le nombre des confrères : il est de 28. « Vingt-huit fois, comme Madame Strong (*JHS*, XLIV, 1924, p. 97) a été la première à le remarquer, a été reproduite, à quelques variantes près, l'image d'un enclos funéraire que garde une déesse ou un dieu (2)... L'idée qui vient spontanément

à l'oracle de Delphes, et qu'Apollon est suivant le *Cratyle* (405 c-d) le Dieu qui préside à la Musique de l'Univers dans la pensée « des hommes versés dans l'astronomie et dans la musique ». Un autre nombre dit parfait est 81, nombre des années de la vie de Platon, cf. les textes cités par P. Boyancé, *Culte des Muses*, p. 253, n. 5 et 6 : Sénèque, *Epist.*, VI, 58 : « ...quia consummasset perfectissimum numerum quem novem novies multiplicata componeret », et la *Vie anonyme de Platon*, p. 9 W. : Ἐξήσεν δὲ πρὸς ἑαυτοῦς, καὶ διὰ τοῦτου δεκάονος ὅτι Ἀπολλωνιακὸς ὢν τυγχάνει ». Suivent dans l'Anonyme des considérations sur 9, nombre des Muses, dont le carré est 81, qui est aussi la quatrième puissance (δυνάμει) de 3, premier nombre qui ait commencement, milieu et fin. Sur Pythagore et le Dieu de Delphes, cf. les textes rassemblés par I. Lévy, *Légende de Pythagore*, et J. Carcopino, *La Basilique pythagoricienne de la Porte Majeure*, p. 173, n. 2, p. 381, n. 3. On trouvera dans le même ouvrage, p. 183, n. 2, un texte rarement cité de Plin., *N. H.*, XXXIV, 26, rapportant qu'un oracle d'Apollon Pythien ordonna, au début du III^e s., de placer sur le Forum romain les statues de Pythagore et d'Alcibiade, « fortissimo Graiae gentis et alteri sapientissimo » (cf. *ibid.*, p. 279, n. 7). Voir aussi P. Boyancé, *ibid.*, p. 253-261.

(1) Cf. p. ex. dans le traité inédit publié par A. Delatte, *op. cit.*, p. 168, lignes 13-14 (cf. p. 173, lignes 34 sq. et p. 235) : ὁ δὲ τέλειος ὡς πρῶτος καὶ μόνος ἐνδὸν τῆς δεκάδος τοῖς οἰκείοις ἐξισούμενος μέγιστος (A. Delatte cite en note les passages parallèles).

(2) J. Carcopino, *op. cit.*, p. 249-250. Cf. p. 250, n. 2 : « Le même motif revient dix fois dans l'atrium. Là non plus, ce chiffre n'a pas dû être choisi au hasard. Il reproduit la décade de la divine tétractys, et il assignerait à chaque groupe

ment à l'esprit, continue M. Carcopino, c'est que le monument où le motif revient avec cette insistance appartenait à une association funéraire formée par 28 sociétaires, et que chacun d'eux avait tenu à faire placer, dans la crypte qui les rassemblait sous l'invocation de la Divinité, une image de la sépulture qui les attendait tous et que le collège leur préparerait à tour de rôle ». M. Carcopino cite ensuite l'épigramme d'un certain Socrate (d'époque hellénistico-romaine), placée en tête du curieux livre XIV de l'*Anthologie palatine*, et dont voici (*Basilique*, p. 255) la traduction :

« Polycrate. — Bienheureux Pythagore, rejeton héliconien des Muses, dis-moi combien d'athlètes tu entraines dans ta maison aux belles joutes de ta sagesse. — Pythagore. — Je vais te le dire, Polycrate. La moitié étudie l'admirable science des mathématiques. L'éternelle nature est l'objet des travaux d'un quart. La septième partie s'exerce à la méditation et au silence. Il y a, de plus, trois femmes, dont Théano est la plus distinguée. Voilà le nombre de mes élèves qui sont aussi ceux des Muses ». Le manuscrit donne en marge la solution du problème, qui est 28 : car la moitié plus le quart plus le septième de 28, plus 3, égale 28, ou bien, car le dernier nombre, 3, est expressément donné comme $2 + 1$ (trois femmes, dont Théano est la plus distinguée) :

$$14 + 7 + 4 + 2 + 1 = 28$$

L'épigramme nous invite donc à reconnaître, selon la définition euclidienne, le nombre 28 sous la forme de la somme de ses facteurs y compris 1, c'est-à-dire en tant qu'ἀριθμὸς τέλειος (1). M. J. Carcopino a parfaitement remarqué (p. 256-257) que $28 = 4 \times 7$: comme nous l'avons vu plus haut, en effet $28 = (2^3 - 1) 2^2 = 7 \times 4$. Nous pouvons ajouter que le nombre

de frères le maximum qu'il est interdit de dépasser ». Ajoutons que c'est le nombre parfait dans l'autre sens pythagoricien, probablement le plus ancien des deux sens, qui relève de la théologie et de l'acoustique plus que de l'arithmologie « euclidienne ».

(1) Cf. Théon de Smyrne, *Exposition des connaissances mathématiques utiles pour la lecture de Platon*, I, 32 (éd. Dupuis, 74-77).

