

STORIA DELLA SCIENZA

SULLA POSSIBILITÀ DI RICOSTRUIRE LA GEOMETRIA PITAGORICA

Le scarse notizie che si posseggono sopra i risultati conseguiti in geometria dalla scuola pitagorica, provengono, come è noto, quasi tutte dal commento al primo libro di Euclide fatto da Proclo, capo della scuola di Atene (V secolo dopo Cristo). Per quanto scarse però, queste notizie bastano a mostrare il considerevole sviluppo della geometria pitagorica, sia come rigore scientifico sia come numero di scoperte originali.

ἐπὶ δὲ τούτοις Πυθαγόρας τὴν περὶ αὐτὴν φιλοσοφίαν εἰς σχῆμα παιδείας ἐλευθέρον μετέστησεν, ἀνοίθην τὰς ἀρχὰς αὐτῆς ἐπισκοπούμενος καὶ αὐλῶς καὶ νοερώς τὰ θεωρήματα διερευνώμενοι, ὅς δὴ καὶ τὴν τῶν ἀλόγων πραγματείαν καὶ τὴν τῶν κοσμικῶν σχημάτων σύστασιν ἀνεῦρεν.¹

Il quadro è già quello degli Elementi di Euclide, il cui XIII libro mette appunto capo alla costruzione dei poliedri regolari, che richiama, fra l'altro, la capacità di costruire il decagono regolare, il pentagono regolare e il pentagono stellato o pentalfa, che costituiva il segno di riconoscimento degli appartenenti al sodalizio. La costruzione del più difficile dei poliedri regolari, il dodecagono, e la sua iscrizione nella sfera sono confermate esplicitamente da Jamblico nella sua Vita di

¹ Procli Diodochi in primum Euclidis Elementorum librum Commentaria, ex recognitione Godofredi Friedlein, Lipsiae in aedibus Teubneri. 1873, pag. 65.

Pitagora e dagli Scolia di Euclide, dove si legge che i pitagorici conoscevano il cubo, il tetraedro (o piramide) e il dodecaedro; mentre l'ottaedro e l'icosaedro sarebbero stati scoperti da Teeteto. La costruzione infatti del dodecaedro e la sua iscrizione nella sfera costituiva il fine, nel doppio senso della parola, dell'intera geometria pitagorica, appunto per le numerose interpretazioni in senso cosmologico mistico che si davano ai vari rapporti fra gli elementi di quella costruzione geometrica.²

Sappiamo pertanto dove i pitagorici sono arrivati e da Proclo i principali punti intermedi, attribuiti come scoperte direttamente ai pitagorici; in particolare il teorema sulla somma degli angoli interni di un triangolo:

Εὐδημος δὴ ὁ περιπατητικὸς εἰς τοὺς Πυθαγορείους ἀναπέμπει τὴν τοῦδε τοῦ θεωρήματος εὕρεσιν, ὅτι τρίγωνον ἅπαν θυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ἔχει τὰς ἐντὸς γωνίας.³

e quello del quadrato dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo (il famoso teorema di Pitagora), con la conseguente scoperta degli irrazionali:

τῶν μὲν ἱστορεῖν τὰ ἀρχαῖα βουλομένων ἀκούοντας τὸ θεώρημα τοῦτο εἰς Πυθαγόραν ἀναπεμπόντων ἐστὶν εὕρεῖν καὶ βουδύτην λεγόντων αὐτὸν ἐπὶ τῇ εὐρέσει.⁴

Lo attribuiscono a Pitagora anche Diogene Laerzio (VIII, 12), Plutarco (Symp., VIII, qu. 2, VI), Vitruvio (De Architectura, IX, cap. II), Ateneo (Vit. Pyth., 36).

Ma non sappiamo il *come* vi sono arrivati; non conosciamo le dimostrazioni, ad eccezione di quella del teorema sulla somma degli angoli interni di un triangolo, di cui Proclo riporta quella attribuita da Eudemo ai pitagorici:

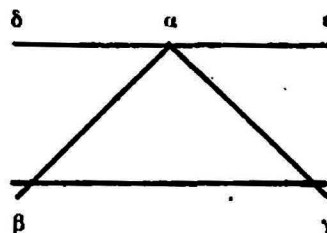
ἔστω τρίγωνον τὸ $\overline{αβγ}$ καὶ ἤχθω διὰ τοῦ $\overline{α}$ τῇ $\overline{βγ}$ παράλληλος ἡ

² Un ottimo studio su questi rapporti si trova nel recente libro di A. REGHINI, *Per la restituzione della geometria pitagorica*, Ignis, Roma, 1934, dove al rigore matematico va associata una profonda conoscenza dei concetti cosmologico-religiosi dei pitagorici.

³ *Op. cit.*, pag. 379.

⁴ *Op. cit.*, pag. 426.

δε· ἐπεὶ οὖν παράλληλός εἰσιν αἱ βγ δε καὶ αἱ ἐναλλάξ ἴσαι εἰσὶν, ἴση, ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ δαβ τῇ ὑπὸ αβγ, ἡ δὲ ὑπὸ εαγ τῇ ὑπὸ αγβ κοινὴ προσκείσθω ἡ βαγ. αἱ ἄρα ὑπὸ δαβ βαγ γαε, τουτέστιν αἱ ὑπὸ δαβ βαε, τουτέστιν αἱ δύο ὀρθαὶ ἴσαι εἰσὶ ταῖς τοῦ αβγ τριγώνου τρισὶ γωνίαις. αἱ ἄρα τρεῖς τοῦ τριγώνου δύο ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι. Τοιαύτη μὲν οὖν καὶ ἡ τῶν Πυθαγορείων ἀπόδειξις.⁵



Ma che Proclo abbia utilizzato direttamente la storia della geometria composta poco prima di Euclide dal discepolo di Aristotele, Eudemo di Rodi, ch'egli cita spesso, è cosa assai dubbia. Va ricordata a questo proposito la brillante critica di Tannery,⁶ secondo il quale Proclo non avrebbe conosciuto direttamente che Gemino (I secolo d. C.), da lui copiato liberamente nella prima parte della sua opera (sulle generalità), Porfirio, Pappo e il suo maestro Siriano, autore di un trattatello sulla questione se l'angolo rientra nella categoria della qualità o della quantità, dove si faceva menzione dei pitagorici mistici, da Filolao a Teodoro di Asine, che Proclo cita spesso nella seconda parte (il commentario propriamente detto).⁷ Molto probabilmente la tradizione, interpretata da Proclo attraverso gli autori sopra citati, attribuiva senz'altro ai pitagorici le dimostrazioni che si sapevano anteriori ad Euclide, saltando quasi interamente Ippocrate di Chio e Oinopide. Ora alla dimostrazione di Eudemo c'è un chiaro accenno anche in Aristotele (Met. 1051 a 24). Era dunque molto antica. Ma tutto ciò non conclude che fosse quella effettivamente usata dai pitagorici.

La testimonianza poi di Proclo rispetto alla dimostrazione sulla somma degli angoli interni di un triangolo da lui attribuita ai pitagorici, perde ogni importanza se la si confronta

⁵ Op. cit., pag. 450.

⁶ PAUL TANNERY, *La Géométrie Grecque; comment son histoire nous est parvenue et ce que nous en savons*, Paris, Gauthiers-Villars, 1877, pag. 11-15.

⁷ Ved. peraltro le critiche di HEIMANN sul *Philologus*, XLIII, 2, pag. 345.

con un passo del commento di Eutocio alle Coniche di Apollonio. Il passo è il seguente:⁸

ὥσπερ οὖν τῶν ἀρχαίων ἐπὶ ἐνὸς ἐκάστου εἵδους τριγώνου θεωρησάντων ταῖς δύο ὀρθαῖς πρότερον ἐν τῷ ἰσοπλεύρῳ καὶ πάλιν ἐν τῷ ἰσοσκελεῖ καὶ ὕστερον ἐν τῷ σκαληνῷ. οἱ μεταγενέστεροι καθολικὸν θεωρήμα γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν.

Eutocio aggiunge poco dopo:

ταῦτα μὲν οὖν ὁ Γεμῖνος ἐν τῷ ἔκτῳ φησὶ τῆς τῶν μαθημάτων θεωρίας.

Evidentemente questa dimostrazione del teorema che Eutocio, avendo sott'occhio il testo di Gemino, attribuisce agli antichi pitagorici, non può basarsi sulla teoria delle parallele in senso euclideo; perchè la dimostrazione riportata da Proclo vale indifferentemente per qualunque triangolo. Non che ai pitagorici mancasse ogni concetto di linee parallele. Se si può assumere come certo che quello euclideo di rette che prolungate all'infinito non s'incontrano mai doveva ripugnare alla mentalità pitagorica, per la quale il finito era perfetto e l'infinito imperfetto, tutto ciò non esclude che i pitagorici avessero la nozione di rette parallele nel senso di equidistanti o semplicemente non incontrantesi. Ma la testimonianza di Eutocio ci fa sapere che anzitutto si trattava di una proprietà dimostrata e non semplicemente ammessa, anche nel semplice caso del triangolo equilatero, e in secondo luogo che non avveniva come la riferisce Proclo. Anche l'unica dimostrazione pertanto attribuita ai pitagorici viene a risultare non giusta.

Sostanzialmente non si sa nulla circa i processi dimostrativi dei pitagorici. Si possono citare in merito le conclusioni di due valentissimi studiosi dell'argomento: Isadore Levy e Abel Rey. «Nessuno dei dati che ci forniscono i testi dopo Speusippo ed Eraclide (la generazione che segue alla platonica), — scrive il primo⁹ — resiste alla critica; e quello che ri-

⁸ *Apollonii Pergaei quae graece extant cum commentariis antiquis - Edidit et latine interpretatus est I. H. HEIBERG, Lipsiae, Teubner, 1891. Eutoci Commentaria, vol. II, pagina 170.*

⁹ ISADORE LEVY, *Les sources de la legende de Pythagore*, Paris, pag. 5.

mane delle testimonianze prearistoteliche e aristoteliche si riduce a troppo poca cosa». « Se ci riportiamo alla parte seria della documentazione — scrive il Rey¹⁰ — è evidentemente impossibile considerare come esaurienti queste indicazioni frammentarie e scucite ».

* *

Quanto alle ricostruzioni moderne, esse si limitano a delle ipotesi circa il teorema sulla somma degli angoli di un triangolo, il teorema di Pitagora e il pentalfa. Il solo Reghini si è spinto fino ai poliedri regolari. Così l'Allman¹¹ e il Tannery¹² ritengono che la dimostrazione del primo teorema derivi dalla proprietà, assunta empiricamente, dei sei triangoli equilateri congruenti attorno a un vertice; assunzione certamente in contrasto con la testimonianza di Proclo,¹³ il quale afferma che era un teorema, non una semplice assunzione empirica dei pitagorici. Inoltre, per passare al caso generale, l'Allman deve prima trattare il caso del triangolo rettangolo e quindi è costretto ad ammettere empiricamente l'esistenza dei triangoli rettangoli con relative proprietà e solo dopo perviene al caso del triangolo isoscele e del triangolo scaleno. Il Reghini¹⁴ suppone che i pitagorici ammettessero come verità di partenza un postulato ch'egli chiama: il postulato pitagorico della rotazione, grazie al quale, dimostrate le prime 28 proposizioni del primo libro di Euclide (per le quali Euclide stesso non adopera il suo postulato delle parallele) si deriva immediatamente il teorema sopra la somma degli angoli interni di un triangolo equilatero. Premessi poi vari teoremi noti e indipendenti dal postulato delle parallele, si ottiene la dimostrazione del teorema negli altri due casi menzionati da Eutocio. E quantunque la dimostrazione, nel caso del triangolo

¹⁰ ABEL REY, *La jeunesse de la science grecque*, Paris, 1933, pag. 232.

¹¹ ALLMAN GEORGE JOHNSTON, *Greek Geometry from Thales to Euclid*, Dublin, 1889, pag. 12. TANNERY, *op. cit.*, pag. 104.

¹² *Op. cit.*, pag. 304-305.

¹³ Idem, pag. 24-30.

¹⁴ Idem, pag. 37.

isoscele, includa quella del triangolo equilatero, il Reghini ritiene che la dimostrazione fosse effettivamente fatta in tre tempi, sia perchè gli antichi non sentivano il bisogno di tutto sacrificare alla generalità, sia perchè quanto Eutocio riferisce va forse inteso come ordine cronologico di scoperta.

Ma va notato che quello che il Reghini chiama postulato è tutt'altro che intuitivamente evidente per aver diritto a tal nome. Anche se l'osservazione di una ruota che giri può averlo suggerito, rimane sempre una verità complessa come rapporti e interpretazione; per cui sarebbe certamente un diminuire il buon nome di logici rigorosi, attribuito ai pitagorici dalla citazione di Proclo riferita sopra, il far loro assumere quella proposizione come postulato iniziale. Certo la sua applicazione a dimostrare il teorema sulla somma degli angoli interni di un triangolo, ricostruita dal Reghini, in rispondenza alla citazione di Eutocio, è quanto mai elegante e ingegnosa. Ma se anche, per ciò, non è escluso che i pitagorici conoscessero quella verità e se ne servissero, a me pare fuori dubbio che vi avrebbero dovuto arrivare prima per dimostrazione. Che se questa è impossibile, altra dev'essere stata la via da essi seguita.

Il teorema di Pitagora presenta difficoltà ancor maggiori. Di due sole cose si può esser certi: e cioè che se anche la nozione delle proprietà espresse da quel teorema è anteriore a Pitagora, derivando dall'India o dall'Egitto, Pitagora ne trovò la dimostrazione geometrica — altrimenti non si spiegherebbe la *βουδύρη* accennata da Proclo e tutta l'unanime tradizione antica — e in secondo luogo che la dimostrazione non doveva limitarsi al caso del triangolo rettangolo isoscele, usato nel Menone (Men., XIX) da Socrate con lo schiavo per provare la teoria della reminiscenza, anche se fosse vero che i pitagorici non andarono più in là dell'irrazionale $\sqrt{2}$ e del caso tipico del triangolo egizio; ma doveva essere generale. Il problema è: quale via ha seguito Pitagora per la dimostrazione.

Il Tannery suppone che Pitagora si sia servito della similitudine e inclina a credere che egli ammettesse un postulato della similitudine, da cui si può dedurre quello delle pa-

rallele. Anche per il Loria¹⁵ questa dimostrazione presenta il massimo della verisimiglianza. Ma l'ipotesi non è suffragata da alcun elemento e lo stesso Tannery riconosce che gli antichi introdussero il più tardi possibile la nozione di similitudine; mentre, d'altro canto, egli stesso sostiene che il teorema di Pitagora fu una delle prime proposizioni pitagoriche. Inoltre la teoria della similitudine non conduce propriamente al teorema di Pitagora, ma al cosiddetto primo teorema di Euclide, contro l'esplicita citazione di Proclo.¹⁶

Una via molto più semplice e naturale è quella suggerita dal Bretschneider¹⁷ e seguita dall'Allman e dal Reghini, secondo una dimostrazione di cui si conosce la figura ma non l'autore, e che, per semplicità, sta accanto a quella di Abul Hasan Tabit (IX secolo d. C.) e di Baskara (XII secolo d. C.) fra le settanta e più dimostrazioni che si conoscono. Senonchè, anche per quella dimostrazione, l'Hankel¹⁸ obietta che essa non presenta affatto un colorito tipicamente greco, ma ricorda i metodi indiani; da cui seguirebbe: o che Pitagora avrebbe tratto dall'Oriente anche la dimostrazione del teorema, opinione che non dispiace all'Allman,¹⁹ ma che, come si è detto sopra, non è ammissibile, o che non corrisponderebbe quella trovata da Pitagora.

* *

Sono, come si vede, conclusioni piuttosto scettiche sulla possibilità di ricostruire la geometria pitagorica. Ma sono conclusioni a cui lo storico della scienza coscienzioso deve attenersi. Nessun documento antico, nessun tentativo matematico dei moderni ci dà la sensazione di trovarci di fronte ai procedimenti seguiti da quei primi geometri. D'altronde la nostra mentalità è certamente mutata rispetto a quella che do-

¹⁵ LORIA GINO, *Storia delle Matematiche*, Torino, 1929-1933, vol. I.

¹⁶ *Op. cit.*, pag. 430.

¹⁷ BRETSCHNEIDER, *Die Geometrie und die Geometer vor Euklides*, Leipzig, 1870.

¹⁸ HANKEL, *Zur Geschichte der Mathematik in Altertum*, Leipzig, 1874.

¹⁹ *Op. cit.*, pag. 37.

veva prevalere nel V secolo a. C. per poter tentare in astratto quello che si fece allora. Bisognerebbe prima liberarci dalla *forma mentis* che quasi ventitrè secoli di geometria euclidea hanno ingenerato in noi. Ciò che non è certo possibile.

Accontentiamoci dunque di registrare i risultati innegabilmente conseguiti da quegli antichi maestri. Essi bastano a rivelarne il valore e la grandezza. « I pitagorici — scrive Diogene Laerzio ²⁰ — hanno portato la geometria alla perfezione dopo che Moeris (un faraone del XIV secolo) ebbe trovato il principio degli elementi di tale scienza ». E questo rimarrà il massimo titolo di gloria di quella « Scuola Italica » che dalle coste della Calabria e della Lucania tanta luce diffuse intorno e lasciò dietro a sè.

ANGIOLO DELL'ORO.

²⁰ DIOG. LAENZ., VII. *Pyth.*, VII, 1, 2.

A. DELL'ORO, *Sulla possibilità di ricostruire la geometria pitagorica*: *Historia* 1935 95-102. | Il est peu probable qu'on arrive jamais à reconstituer la géométrie pythagoricienne, aucun document antique, aucune tentative moderne ne semblant reproduire la méthode suivie par les premiers géomètres, ni retrouver leur *forma mentis* particulière.

4599 Dell'Oro, A.: *Sulla possibilità di ricostruire la geometria pitagorica*. — *Historia* 9 ('35) 95-102.

V 4558
t 1717