

Die pythagoreische Zahlenlehre.

Von Gustav Junge in Berlin-Lichterfelde.

304
JUNGE, G.
1940

I. Einleitung.

Die Frage, was die pythagoreische Verehrung der Zahlen in Wahrheit bedeutet, geht nicht nur die Geschichte der Philosophie an, sondern auch die der Mathematik. Der Mathematiker würde es gerne sehen, wenn sich aus den schwankenden Angaben des Aristoteles und dem Widerstreit der Meinungen darüber einige klare Ergebnisse ableiten ließen. Mindestens möchte er wissen, ob jene bedeutungsvollen Zahlen immer ganze Zahlen waren. Dies schien bis vor kurzem selbstverständlich. Aber ein englischer Gelehrter ¹⁾ hat versucht, die Idealzahlen Platons den reellen Zahlen der heutigen Mathematik gleichzusetzen, und er hat immerhin einigen Beifall gefunden ²⁾. Um so eher mag ein Versuch lohnen, über die pythagoreische Zahlenlehre, wie sie Plato und Aristoteles kannten, wenigstens in einigen Punkten zur Klarheit zu kommen. — Wir nennen sie pythagoreisch, doch werden wir uns auch mit verwandten Anschauungen bei Plato und Aristoteles beschäftigen, von denen nicht immer feststeht, ob sie wirklich pythagoreisch sind.

Unsere Zahlenlehre ist die alt-pythagoreische und von der neu-pythagoreischen zu unterscheiden. Bald nach der Zeit des Aristoteles haben die letzten alten Pythagoreer gelebt ³⁾. Einige Jahrhunderte später blühte der Neu-Pythagoreismus, und gerade die geheimnisvolle Zahlenlehre, die dem Zeitgeist lag, wurde von ihm gepflegt und weitergebildet. Spätere Schriftsteller haben nicht immer alt- und neu-pythagoreische Lehren auseinandergehalten. Um sicher zu sein, daß wir nur die alten Formen der Zahlenlehre darstellen, werden wir uns möglichst an Aristoteles und seine Ausleger halten.

Die pythagoreische Zahlenlehre ist vom Aberglauben ausgegangen und hat sich nie weit davon entfernt. Gewisse einfache Zahlen, vor allem die Sieben, wurden seit alter Zeit für heilig und bedeutungsvoll gehalten. An diesen alten Volksglauben knüpften die Pythagoreer an ⁴⁾, aber sie haben ihn mannigfach umgebildet. Sie hielten an der Heiligkeit der Zahlen fest, versuchten aber, diesen Glauben durch vernünftige Überlegungen zu begründen. Teils gingen sie von einfachen Rechnungen aus, die sich mit den Zahlen anstellen lassen, teils wurden physikalische Theorien, nämlich das akustische Grundgesetz und die Atomlehre, herangezogen, und endlich wurden auch logische Vorgänge, nämlich das Einteilen der Begriffe, mit den Zahlen in Verbindung gebracht.

Es waren nur bescheidene wissenschaftliche Zutaten, die dem alten Zahlenglauben zugesetzt wurden. Aber sie genügten, ihn zu beleben und gleichsam schulfähig zu machen.

¹⁾ A. E. Taylor, *Gnomon* 2 (1926), S. 396—405. — *Mind* 35 (1926), S. 419—440 und 36 (1927), S. 12—33; siehe Anhang A.

²⁾ H. Reifegang, *Platondeutung der Gegenwart*, Karlsruhe 1929, S. 117—136.

³⁾ Diogenes Laertius, VIII, 46.

⁴⁾ Daß der Pythagoreismus auch sonst auf alte, im Volke überlieferte Vorstellungen zurückging, betont A. Delatte, *La politique pythagoricienne*, Paris 1922, S. 3.

Wir werden also nach der Art der rationalen Grundlage vier Formen des pythagoreischen Zahlenglaubens unterscheiden. Für die erste, rechnende Form nennen wir als Beispiel die neue Begründung für die Wichtigkeit der Zahl Sieben: sie ist die einzige Zahl, die zu allen Zahlen bis zur Zehn teilerfremd ist. — Die zweite Form entsprang aus der Musiktheorie, es war der Glaube an das allgemeine Bestehen einfacher Zahlenverhältnisse. Mit einer großartigen Kühnheit wurde der Schluß gezogen: wie im Reich der Töne, so ist auch sonst in der Welt alles Schöne und Gute durch Zahlenverhältnisse bestimmt. Aristoteles hat hierfür die Formel: die Zahl ist die Ursache der Dinge. — Im dritten Fall war die Atomlehre die Grundlage. Die Annahme, daß die Körper aus getrennten Einheiten bestehen, deren Menge grundsätzlich zählbar ist, wurde gelegentlich durch den wunderlichen Satz wiedergegeben: die Dinge sind Zahlen. — Unter den Rechnungen, die sich mit einer Zahl vornehmen lassen, wurde das wiederholte Verdoppeln und Halbieren für besonders wichtig gehalten. Sowohl die Pythagoreer wie Plato knüpften daran ausgedehnte Spekulationen, die wir an vierter Stelle als die Lehre von der Zweiteilung besonders behandeln werden.

Plato und seine Schüler befaßten sich zeitweilig eifrig mit Definitionen und mit der Einteilung, besonders der Zweiteilung der gewonnenen Begriffe. Der Vergleich mit der wiederholten Halbierung einer Zahl, wie sie etwa bei 32 möglich ist, lag nahe genug. — Auch die anderen Formen der Zahlenlehre suchte man für Definitionen auszuwerten. Das Zahlenverhältnis 2:1, das die Oktave kennzeichnet, galt als Wesensbestimmung und nahezu als Definition der Oktave. Die Zahl der Atome, die ein Ding hat, wurde ebenfalls gelegentlich als Definition des Dinges angesehen.

Aristoteles klagt einmal, es werde wohl gesagt, man solle nur um anderer Dinge willen Mathematik treiben, in Wahrheit aber erfülle die Mathematik jetzt alle Wissensgebiete⁵⁾. Wahrscheinlich zielte Aristoteles hiermit auf Xenokrates, der wie er selbst Schüler Platons war und allerdings in der Mathematisierung der Philosophie sehr weit ging. Von ihm rührt die Definition her: „Die Seele ist eine sich selbst bewegende Zahl.“ Wie Xenokrates, so waren auch viele seiner Zeitgenossen nicht nur in einer pythagoreisierenden Zahlenmystik befangen, sondern auch von einem wahren Definitionsfieber ergriffen. Die Definitionen hatten sich in der Geometrie als zweckmäßig erwiesen, aus einer richtigen, wenn auch scheinbar inhaltsarmen Definition ließen sich alle Eigenschaften der Figur entwickeln. Diese Erfolge führten zur Überschätzung der Definitionen. Man versuchte, die vorhandenen mathematischen Definitionen immer mehr zu vereinfachen und auszuleeren, versuchte auch für durchaus nicht mathematische Dinge, etwa für Lebewesen, auf ähnlichem Wege Definitionen zu finden, womöglich ihr Wesen durch eine Zahl zu bestimmen.

Die vielerlei Formen der pythagoreischen Zahlenlehre haben einen gemeinsamen Ursprung: den uralten Zahlenaberglauben; zur Zeit von Plato und Aristoteles hatten sie auch ein gemeinsames Ziel: das Definieren der Begriffe.

II. Älterer Zahlenglaube.

Der Zahlenglaube der Pythagoreer ist geschichtlich nichts Neues, sondern nur ein Höhepunkt in einer jahrtausendealten Entwicklung. Manche Züge der pythagoreischen oder sonstigen griechischen Zahlenverehrung lassen sich schon vorher in Vorderasien nachweisen.

⁵⁾ Met. I, 9; 992a 32.

Sehr alt ist die Sonderstellung der Zahl Sieben. Wir sprechen von „sieben Sachen“ und meinen „alle Sachen“. Diese Verwendung der Zahl Sieben im Sinne von „alle“ ist in Babylonien schon vor 2000 v. Chr. nachweisbar (siehe Anhang B).

Sieben Gottheiten hatten ihre besondere heilige Zahl. Dem obersten Himmelsgott war die Zahl 60 zuerteilt, dann folgten weitere Gottheiten mit den Zahlen 50 und 40; 30 war die Zahl des Mondes, wegen der 30 Tage des Monats, 20 die Zahl der Sonne, und endlich gab es noch Götter mit den Zahlen 15 und 10. Die drei ersten Götter von den Zahlen 60, 50 und 40 hatten auch einen Teil des Himmels zu eigen, nämlich der erste den Himmelsäquator, die beiden anderen ein Stück nördlich und südlich davon. Der Mondgott von der Zahl 30 war der Sohn des höchsten Gottes von der Zahl 60. Die Tochter des Mondgottes war Ishtar, und deren Zahl 15 war wieder die Hälfte von der Zahl des Vaters. — Auch ein Mensch konnte seine besondere Zahl haben. König Sargon II. (722–705) hat den Umfang seiner Burg 16280 Ellen lang gemacht, weil diese Zahl seinem Namen entspricht⁶⁾.

Von allen diesen Zügen babylonischen Zahlenglaubens werden wir mehr oder mehr minder deutliche Spuren auf griechischem Boden wiederfinden.

Die Bevorzugung der Zahl Sieben ist bei den Griechen schon vor Pythagoras nachzuweisen. Bei Homer kommt die Siebenzahl häufig vor: mehrere Helden haben 7 Söhne, Ulysses' Schild hat 7 Schichten usw. In einem Gedicht von Solon heißt es: mit 7 Jahren wechselt das Kind die Zähne, mit 14 beginnt die Reise, mit 21 erscheint beim Manne der Bart, und so folgt weiter alle 7 Jahre ein wichtiger Abschnitt, bis mit 70 Jahren der Tod erwartet wird⁷⁾.

Die Pythagoreer haben sich an dieser Stelle dem Volksglauben angeschlossen. Nach einer Bemerkung des Aristoteles⁸⁾ sahen sie die Siebenzahl als „Ursache“ an für die 7 Vokale, die die griechische Sprache unterscheidet, für die 7 Seiten der Lyra, die 7 Plejaden, die 7 Jahre bis zum Zahnwechsel und die 7 Helden, die gegen Theben kochten. Die letzten drei Reispiele sind alt, die beiden ersten mögen von den Pythagoreern hinzugefügt sein.

III. Der rechnende Zahlenglaube.

Aber die italischen Philosophen, wie sie Aristoteles öfter nennt, haben versucht, den Zahlenglauben zu durchdenken und in ein System zu bringen. Weil die Zahl 7 in so vielen Fällen die richtige Anzahl war, so erhielt sie den Namen „kairos“, das rechte Maß. Auch ein Grund für ihre Bedeutung wurde gefunden: die Zahl 7 ist innerhalb der ersten zehn Zahlen die einzige, die keine andere Zahl als Teiler enthält und die von keiner ein Teil ist; sie wurde darum als „mutterlose Jungfrau“ bezeichnet und mit der Göttin Athene verglichen⁹⁾.

⁶⁾ Die Zuweisung der Zahlen 10 und 30 ist um 1500 nachweisbar, die der Zahl 60 schon um 2300. — Benutzt sind u. a. Boll, *Sternglaube und Sternedeutung*, Leipzig 1918 (*Natur und Geisteswelt* 638). Der erste Abschnitt (über Babylonien) ist von Bezold geschrieben. — B. Meißner, *Babylonien und Assyrien II*, Heidelberg 1925, S. 4–21 und S. 278. — Der Verfasser ist auch den Herren Dr. Moortgat und Dr. Falkenstein vom Vorderasiatischen Museum in Berlin für manche Auskunft zu Dank verpflichtet.

⁷⁾ Über den Zahlenglauben in Griechenland hat W. Roscher eine Reihe von Abhandlungen geschrieben, die angeführt sind bei Ed. Zeller, *Philosophie der Griechen I* (1923), S. 453. — Einen kurzen Überblick für die Siebenzahl gibt Heiberg in *Math. Tidsskrift B* (1925), S. 1.

⁸⁾ *Metaph.* 14, 6; 1093a 13. — Die Pythagoreer sind allerdings nicht genannt, doch wahrscheinlich gemeint.

⁹⁾ Zeller, a. a. O., S. 496.

Außerdem wurde der Bereich der verehrten Zahlen verändert. Die Zahl 60, in Babylonien als Rechnungseinheit bedeutungsvoll, war für den Griechen bei der Rechnung keine ausgezeichnete Zahl, und sie war es auch nicht im Zahlenglauben. Dafür wurden die 10 und die Zahlen bis zur 10 stärker betont. Die Zahl 4 wurde der Gerechtigkeit gleichgesetzt, weil sie „Gleiches mit Gleichem vergilt“, nämlich aus zwei gleichen Faktoren besteht. Auch die Zahl 9 hat ja diese Eigenschaft, ist eine Quadratzahl, aber, wie Aristoteles uns sagt¹⁰⁾, die Pythagoreer hielten bei ihren Definitionen dasjenige, dem der fragliche Begriff zuerst zukommt, für die Substanz des Dinges. 4 ist die erste Zahl, der das „gleich mit gleich“ zukommt, also ist sie die „Substanz“ der Gerechtigkeit. — Grundsätzlich galten die geraden Zahlen als weiblich, die ungeraden als männlich. 2 ist die erste gerade Zahl, 3 die erste ungerade, denn die 1 wurde nicht als Zahl angesehen. So ist 5 die erste Vereinigung einer geraden und ungeraden Zahl, des Männlichen und Weiblichen, und 5 hieß darum die Ehe¹¹⁾.

Der Vorrang der Zahl 10 beruhte ursprünglich wohl darauf, daß sie die Basis des griechischen wie unseres Zahlensystems ist. Es wurden aber auch andere Gründe angeführt, besonders die Beziehung $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, wobei die Zahlen 1, 2, 3, 4 der Folge Punkt, Linie, Fläche und Körper entsprachen.

Bei Plato finden sich einige auffällige Beispiele des rechnenden Zahlenglaubens. Die Hochzeitszahl im 8. Buche des „Staates“ (S. 546b) ist den Historikern der Mathematik bekannt. Sie ist offenbar absichtlich geheimnisvoll eingekleidet. Im 9. Buche (S. 587) bildet Plato eine Stufenfolge der Herrschaftsformen vom Königtum über die Oligarchie und Demokratie zur Tyrannis, und er rechnet uns vor, daß der König $9 \cdot 9 \cdot 9$, also 729 mal glücklicher lebe als der Tyrann. — Platons letztes großes Werk, die „Gesetze“ sind so reich an pythagoreisierendem Zahlenskult, daß Eduard Zeller, allerdings nur in einer Jugendarbeit¹²⁾, darin einen Grund für die Unechtheit dieses Dialoges finden wollte. Wir führen zwei Beispiele an. Im 5. Buche (S. 737e) wird die passende Zahl der Grundbesitzer und Verteidiger des Landes festgesetzt: es sollen 5040 sein; denn diese Zahl ist durch alle Zahlen von 1–10 teilbar, und das ist nach Platons Ansicht ein großer Vorteil für Zwecke des Krieges, auch für Steuern und sonstige Verteilungen. Plato erwähnt noch, daß die Zahl 5040 im ganzen 59 verschiedene Teilungen zuläßt, aber nicht, daß schon ihre Hälfte 2520, durch die Zahlen von 1–10 teilbar ist. — Im 11. Buch (S. 919–920) wird festgesetzt: wer durch erniedrigende Tätigkeit, etwa Ausübung des Krämergewerbes, die Familie entehrt, der soll mit einem Jahr Gefängnis bestraft werden; im Wiederholungsfalle mit der doppelten Zeit und so immer weiter unter Verdoppelung der vorhergehenden Zeit. — Auf die Verdoppelung werden wir noch zurückkommen.

Aristoteles ist zwar sehr geneigt, den pythagoreischen und platonischen Zahlenglauben in allen seinen Formen zu kritisieren, aber bisweilen erweist er sich selbst in der Zahlenmystik befangen. Am Anfang des „Himmels“ will er uns erklären, daß die dreifache Teilbarkeit des Körpers soviel ist wie allseitige Teilbarkeit und auch wie Vollkommenheit. Er beruft sich darauf, daß nach pythagoreischer Lehre das All durch die Drei begrenzt wird, denn Anfang, Mitte und Ende bestimmen das All und bestimmen auch die Drei. Mit anderen Worten: unsere Körperwelt mit ihren drei Dimensionen ist deswegen etwas Vollkommenes, weil die Drei die erste Zahl ist, die Anfang, Mitte und Ende hat.

¹⁰⁾ Met. 1, 5; 987a 22.

¹¹⁾ Zeller, a. a. O., S. 496. — Die Mutterschaft wurde mit der Teilbarkeit verglichen. Ein immerhin ähnlicher Gedanke wurde soeben in Babylonien nachgewiesen: das Kind hat die halbe Zahl des Vaters.

¹²⁾ Platonische Studien, Tübingen 1830; Zeller hat später diese Meinung verlassen.

Bei anderer Gelegenheit scheint Aristoteles unsicher, wie weit er dem Zahlenglauben folgen soll. In der „Politik“¹³⁾ erwähnt er, daß nach Angabe einiger Dichter, die das Leben nach der Siebenzahl bemessen, die geistige Entwicklung des Menschen etwa mit 50 Jahren ihren Höhepunkt habe. Bald danach¹⁴⁾ heißt es, es sei nicht richtig, die Lebensalter nach der Siebenzahl zu zählen, sondern man müsse der Natur folgen. Dagegen in der Rhetorik¹⁵⁾ nennt er als günstigste Zeit für das geistige Schaffen das Alter von 49 Jahren, und zwar beruft er sich bei der genauen Zahl $49 = 7 \cdot 7$ nicht auf andere, so daß man doch glauben muß, er äußert seine eigene Meinung.

Schon bei dieser ersten Form des Zahlenglaubens können wir also bemerken, daß die pythagoreischen Lehren von Plato und Aristoteles, wahrscheinlich auch von anderen Zeitgenossen, durchaus nicht als so fremdartig empfunden wurden wie von uns heute.

III. Zahlenverhältnisse.

Das akustische Grundgesetz bildet in einer Weise einen lichten Punkt in der pythagoreischen Zahlenlehre: hier wissen wir doch, was die Zahlen zu bedeuten haben. Freilich, welche Bedeutung die Zahlen für die Griechen hatten, das ist schon weniger klar. Unsicher ist es auch, wie sich die Kenntnis des Gesetzes entwickelt hat. Gewisse einfache Fälle sind vermutlich längst vor der Zeit der Pythagoreer bekannt gewesen, denn jeder, der mit einer Flöte oder einem Saiteninstrument umging, mußte doch etwas von dem Zusammenhang zwischen Länge und Tonhöhe wissen. Das Verdienst der Pythagoreer ist es wahrscheinlich gewesen, daß sie die Aufmerksamkeit auf die Zahlenverhältnisse richteten.

Freilich sind die Zeugnisse recht unbestimmt. Das klarste ist ein Fragment des Archytas. Es bezieht sich auf die Flöte und lautet: „Das Rohr gibt einen tiefen Ton, wenn man sein unteres Ende verstopft und hineinbläst; bläst man dagegen in die Hälfte oder sonst einen beliebigen Teil, so klingt es hoch. Denn dieselbe Luft strömt durch einen langgestreckten Raum langsam aus, durch einen kürzeren heftig“¹⁶⁾. Die Oktave wird nicht erwähnt, obwohl es zweimal nahe gelegen hätte. — An einer anderen Stelle sagt Archytas: „Von den Tönen, die an unser Ohr dringen, scheinen die, die schnell und stark von dem Anschlage her zu uns kommen, hoch, die aber langsam und schwach, tief zu sein.“ Als Beispiel wird u. a. eine Gerte erwähnt, die einen tiefen oder hohen Ton gibt, je nachdem man sie langsam oder schnell durch die Luft bewegt. — Plato entwickelt im „Timäus“¹⁷⁾ ausführlich die Zahlenverhältnisse der Tonleiter, aber er bezieht seine Zahlen auf die Abstände der Planeten von der Erde und erwähnt dabei die irdische Bedeutung der Zahlen gar nicht. Er erklärt auch das Gehör und spricht von schnellerer Bewegung der hohen Töne, scheint aber an schnelleres Fortschreiten zu denken.

Die Luftschwingungen und ihre Gesetze waren den Alten unbekannt. So war ihnen auch der Grund unbekannt, weshalb die Tonhöhe bei Saiten- und Blas-Instrumenten sich nach ähnlichen Gesetzen ändert. In dem Bemühen, die Erscheinungen zu erklären, kamen sie auf die irrige Vermutung der verschiedenen Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Die Unsicherheit

¹³⁾ 7, 16; 1335b 32.

¹⁴⁾ 7, 17; 1336b 41.

¹⁵⁾ 2, 14; 1390b 11.

¹⁶⁾ Diels, Fragmente der Vorsokratiker, Berlin 1934, S. 435; das andere Fragment S. 433.

¹⁷⁾ S. 35–36. S. 67b und 80a–b. — Vgl. J. M. Cornford, Plato's cosmology (Timaeus), London 1937, S. 320–326.

über die Zusammenhänge war vielleicht auch der Grund, den Zahlen selbst eine geheimnisvolle Macht zuzuschreiben.

Das Klarste, was Aristoteles sagt, ist, daß „Höhe und Tiefe des Tons in einem Zahlenverhältnis stehen“¹⁸⁾. Gewöhnlich sind seine Äußerungen völlig unbestimmt, etwa: die Pythagoreer „fanden die Eigenschaften und Verhältnisse der Harmonie in den Zahlen“¹⁹⁾. Lehrreich ist eine Stelle²⁰⁾, in der er ihnen den berechtigten Vorwurf macht, daß man nicht immer weiß, ob ihre „Zahl“ eine Anzahl oder ein Zahlenverhältnis sein soll. Er fragt: sind die Zahlen Ursachen der Substanzen im Sinne von Eurytus, der die Gestalt etwa des Menschen mit Steinchen auslegte und deren Anzahl bestimmte, — oder ist das Verhältnis von Zahlen die Substanz, wie in der Musik und bei der Mischung der Elemente, wenn etwa Feuer und Erde im Verhältnis 3:2 zusammentreten? — An dieser Stelle hebt Aristoteles am klarsten die Mehrdeutigkeit des pythagoreischen Zahlbegriffs hervor, die ja der Gegenstand unserer Untersuchung ist.

Gelegentlich begeht aber Aristoteles selbst die Ungenauigkeit, die er den Pythagoreern vorwirft. Eine der vier Ursachen, die er unterscheidet, ist die Form oder der — durch Definition festzulegende — Begriff des Wesens. Als Beispiel führt er an, für die Oktave sei in diesem Sinne Ursache das Doppelte „und allgemein die Zahl“²¹⁾. Der korrekte Ausdruck wäre: allgemein ist für die musikalischen Intervalle ein Zahlenverhältnis die Ursache. — Eine andere Stelle hat die gleiche Nachlässigkeit des Ausdrucks und zeigt auch, wie Aristoteles selbst nach pythagoreischem Vorbild überall Zahlen und Zahlenverhältnisse sehen will: „Alles wird von der Zahl begrenzt, und die Zahl für die äußere Form der Rede ist der Rhythmus“²²⁾. Gemeint ist wieder Zahlenverhältnis. Der Daktylus — $\cup \cup$, so heißt es, hat das Verhältnis 1:1, der Trochäus — $\cup$ das Verhältnis 2:1; zwei Kürzen werden gleich einer Länge gerechnet.

Auch in Aristoteles Schrift „Über Sinn und Sinuliches“²³⁾ erscheint der Glaube an die Zahlenverhältnisse, und zwar in phantastischer Weise von den Tönen auf andere Sinnesgebiete übertragen. Dabei hat man den Eindruck, daß Aristoteles einverstanden ist. — Es wird gesagt, daß die Farben durch Mischung von Weiß und Schwarz entstehen. Diese Mischung erfolgt entweder nach einem Zahlenverhältnis oder nach einem „inkommensurablen Übermaß und Mangel“. Nur im ersten Falle, wenn nach einem Verhältnis von Zahlen, am besten von kleinen Zahlen, wie 3:2 oder 3:4, gemischt wird, gibt es eine schöne Farbe. — Es ist also ganz wie bei den musikalischen Tönen, worauf wir auch besonders hingewiesen werden. — Von den Geschmacksarten heißt es, sie entstehen aus der Mischung von Süß und Bitter, und „wenn durch die Mischung eine Lustempfindung hervorgebracht wird, liegt immer ein Zahlenverhältnis vor“.

Sind die Pythagoreer die ersten gewesen, die den Gedanken von den festen Zahlenverhältnissen hatten? Auch Empedokles ließ seine vier Elemente in bestimmten Verhältnissen ge-

¹⁸⁾ Zweite Analyt. 2,2; 90a 18.

¹⁹⁾ Met. 1, 5; 985b 31.

²⁰⁾ Met. 14, 5; 1092b 8. Wegen Eurytus s. unten S. 350 — Eine ähnliche Stelle, Met. 1, 9; 991b 12, ist gegen Plato gerichtet. — Met. 1, 8; 990a 18—20 wird den Pythagoreern vorgeworfen, eine Zahl solle Ursache der Dinge sein und zugleich das Ding selbst; auch solle eine Zahl die Meinung bedeuten, eine andere die rechte Zeit usw., und dieselben Zahlen sollen in verschiedenen Teilen des Himmels verkörpert sein.

²¹⁾ Met. 5, 2; 1013a 28 und b 33; übereinstimmend Physik 2, 3.

²²⁾ Rhetorik 3, 8; 1408b 28. — Der Gedanke wird schon von Plato, Philebus 17d, angedeutet.

²³⁾ 3; 430b 30. — 3; 440b 20. — 4; 442a 12.

mischt sein. Einige Verse, die Aristoteles oft erwähnt, besagen, daß die Knochen aus Feuer, Wasser und Erde im Verhältnis 4:2:2 bestehen. Nach einem anderen Fragment sollen Fleisch und Blut ungefähr aus allen Elementen zu gleichen Teilen, also nach der Formel 1:1:1:1, gebildet sein²⁴⁾. — Empedokles lebte auf Sizilien, also nicht weit entfernt von den Pythagoreern. Es wird schwer zu entscheiden sein, ob er der Gebende oder Nehmende war.

In einer besonderen Verkleidung erscheinen die Zahlenverhältnisse in Platons „Philebus“²⁵⁾. Zunächst wird uns in feierlichen Worten verkündet, daß das Wissen von Grenze und Unbegrenztem ein Geschenk der Götter an die Menschen sei. Zum Unbegrenzten rechnet alles, was nach heutigem Sprachgebrauch stetig veränderlich ist: Warm und Kalt, Trocken und Feucht, Mehr und Weniger, Groß und Klein. Sollen Ordnung und Schönheit entstehen, so muß die Grenze in das Unbegrenzte eingefügt werden. Als Beispiel wird die Tonkunst genannt, und gemeint ist: die Töne und auch ihre Abstände sind ein Unbegrenztes; nur wenige Intervalle sind musikalisch brauchbar, nämlich die, die sich in kleinen Zahlen ausdrücken lassen. Diese Zahlen sind also die „Grenze“. — Die Anwendung auf andere Sinnesempfindungen, wie wir sie soeben bei Aristoteles kennenlernten, liegt nahe genug und es muß auffallen, daß Plato sie im „Philebus“ nicht erwähnt und im „Timäus“ ablehnt²⁶⁾.

Die Grenze hat im „Philebus“ noch eine zweite Bedeutung. Auch die Jahreszeiten, die uns vor einem Übermaß der Hitze wie der Kälte bewahren, sind durch die Grenze bestimmt, und schön ist etwas nicht nur im Verhältnis zum anderen, sondern ein Ding kann auch an sich schön sein, wie ein wohl gerundetes Gerät. — Die Grenze bedeutet in diesen Fällen etwas Allgemeineres, recht Unbestimmtes, nämlich eine Gesetzmäßigkeit, die nicht gerade durch ein Zahlenverhältnis, sondern durch irgendwelche Größenbeziehung umschrieben ist. —

Auch die pythagoreische Eternkunde müssen wir hier besprechen, denn Astronomie und Musik sind verschwistert, so lehren Archytas und Plato²⁷⁾, und Aristoteles sagt: die Pythagoreer finden „die Eigenschaften der Zahlen in der Musik und am Himmel und an vielen anderen Dingen“²⁸⁾, oder auch: für sie sei „der ganze Himmel Harmonie und Zahl“²⁹⁾. Die Tatsachen sprechen allerdings anders. Es gibt am Himmel keine so einfachen Gesetze wie in der Musik. Zwischen Tag, Monat und Jahr bestehen keine einfachen Zahlenbeziehungen, deswegen war ja immer die Zeitrechnung so schwierig, und erst recht unübersichtlich sind die Planetenbahnen und -zeiten. Dennoch wurde mit großer Zuversicht ein Phantasiebild gezeichnet. Wie schon erwähnt, hat Plato im Timäus³⁰⁾ die von ihm erdachte Tonleiter gleich an den Himmel projiziert und danach den Planeten ihre Abstände von der Erde vorgeschrieben. Die passenden Abstände sind Voraussetzung der Sphärenharmonie, die von Aristoteles ausführlich dargestellt und bekämpft wird. Die Geschwindigkeiten der Himmelskörper sollen sich wie ihre Abstände vom Mittelpunkt des Weltalls verhalten, und durch die Bewegung sollen die Töne einer Tonleiter entstehen³¹⁾.

Da die Lehre von den himmlischen Zahlen durchaus spielerisch und phantastisch war, so ist es kein Wunder, daß sie in den verschiedensten Formen auftrat. Zwei ziemlich

²⁴⁾ Diels, a. a. O., S. 346, Fragment 96 und 98.

²⁵⁾ S. 16c, 17, 25, 26, 51c.

²⁶⁾ Siehe Anhang C.

²⁷⁾ Diels, a. a. O., S. 432. — Staat 530d.

²⁸⁾ Met. 14, 3; 1090a 25.

²⁹⁾ Met. 1, 5; 986a 3 und 21. — Met. 13, 6; 1080b 18 und Vom Himmel 3, 1; 300a 15 heißt es: der Himmel besteht (oder wird erbaut) aus Zahlen. Hier wird der Himmel, uranos, wohl das Weltgebäude bedeuten, und nicht an Zahlenverhältnisse, sondern an Atome gedacht sein; s. S. 348.

³⁰⁾ S. 35—36. Siehe oben S. 345.

³¹⁾ Vom Himmel 2,9; die Pythagoreer werden S. 291a 8 genannt. — Zeller, S. 537—542.

ähnliche Varianten bieten ein bescheidenes mathematisches Interesse. — Die erste findet sich in den „Problemen“, die unter Aristoteles' Namen überliefert und wohl bald nach seiner Zeit geschrieben sind. Hier heißt es: In 10 Analogien gibt es 4 Kubikzahlen, und aus ihnen, wie die Pythagoreer sagen, besteht das Weltall, das ist die 10 Himmelskörper. — Gemeint ist, daß unter den ganzen Zahlen 1, n , n^2 , $\dots$, n^3 vier Kuben sind, nämlich 1, n^3 , n^6 , n^9 . — Plutarch nennt die Zahlen 1, 3, 9, 27, usw. Nach pythagoreischer Lehre bedeute die Eins das Zentralfener; die Zahlen 3, 9 bedeuten aber nicht, wie man erwartet, die Himmelskörper selbst, sondern ihre Abstände: Die Gegen-Erde hat den Abstand 3, die Erde 9, der Mond 27, Merkur 81, Venus 243, Sonne 729 usw. Die Sonne wird „Quadrat und Kubus“ genannt, weil 729 zugleich Quadrat und Kubus ist. — Es wird also doch wieder ein Himmelskörper einer Zahl gleichgesetzt³²⁾.

Die kurzen Angaben des Aristoteles sind gerade auf diesem Gebiet oft schwer zu deuten. Eine Stelle der Metaphysik spricht von Zahlen an verschiedenen Orten des Himmels. Ein alter Erklärer hat hierbei an die verschiedenen Sphären gedacht, die nach der Reihe mit Zahlen 1, 2, 3 . . . versehen wurden. Vielleicht soll aber angespielt sein auf die Zahl der Elementarkörper Feuer, Luft usw. an den verschiedenen Stellen. Eine weitere Möglichkeit ist, daß nach babylonischer Weise Sternbilder mit Zahlen versehen wurden³³⁾.

V. Die Atomzahl.

Aristoteles bespricht die Pythagoreer ausführlich im ersten und in den beiden letzten Büchern der Metaphysik. Im 1. Buch erwähnt er ihre Atomlehre nicht deutlich³⁴⁾, dagegen im 13. und 14. Buch an etwa vier Stellen, die wir wegen der Strittigkeit der Deutung hier wiedergeben wollen. — Die Pythagoreer „bilden das ganze Weltall aus Zahlen, aber nicht aus monadischen, sondern sie lassen die Monaden Größe haben“. Gleich danach heißt es: sie setzen die Zahlen „als ausgedehnt, wie soeben erwähnt wurde“³⁵⁾. An den beiden anderen Stellen werden die Pythagoreer getadelt: „Daß die Körper aus Zahlen zusammengesetzt sein sollen, und daß diese Zahl mathematische Zahl sei, ist unmöglich. Denn die Annahme von unteilbaren Größen ist falsch, und wenn es wirklich solche Größen gäbe, so haben doch die Monaden gewiß keine Größe“³⁶⁾. — Wenn die Pythagoreer „aus Zahlen die Naturkörper entstehen lassen, also aus dem, was keine Schwere noch Leichtigkeit hat, dasjenige, was schwer oder leicht ist, so scheinen sie von einem anderen Weltall zu sprechen und von anderen Körpern, nicht von den sinnlichen“³⁷⁾. — Ganz ähnlich lautet eine Stelle in der Schrift „Vom Himmel“. Nur heißt es hier „einige Pythagoreer“³⁸⁾.

Diese Stellen besagen doch offenbar: nach der Lehre der Pythagoreer, vielleicht nur einiger unter ihnen, bestehen die sinnlichen Dinge aus Einheiten, denen räumliche Ausdehnung,

³²⁾ Probleme 15, 3; 910b 36. — Plutarch, Seelenschöpfung im Timäus 31. — Vgl. Heiberg, Mathematisches zu Aristoteles, Abhandl. Gesch. math. Wiss. 18 (1904), S. 34. — G. B. Schiaparelli, Vorläufer des Kopernikus, übers. von M. Curze, Leipzig 1876, S. 95. — Zeller, S. 540.

³³⁾ Met. 1, 8; 990a 18. — Vgl. Aristotle's Metaphysics, comm. by W. D. Ross, I, Oxford 1924, S. 185. — Die letzte Vermutung nach Arist. Metaph., übers. v. E. Kolfes (Phil. Bibl. Bd. 2), Leipzig 1920, S. 171.

³⁴⁾ Das Wort „Stoff“, hyle, in Met. 1, 5; 986a 17, bedeutet wohl das Unbegrenzte der Pythagoreer (siehe unten S. 351). Etwas später, Met. 1, 7; 988a 23–27, heißt es ausdrücklich, daß das Unbegrenzte für die Pythagoreer Prinzip und auch Stoff war.

³⁵⁾ Met. 13, 6; 1080b 18 und 32.

³⁶⁾ Met. 14, 3; 1090a 32.

³⁷⁾ Met. 13, 8; 1083b 11.

³⁸⁾ Vom Himmel 3, 1; 300a 15.

Schwere und Unteilbarkeit beigelegt werden. Aristoteles scheint sich zu wundern, daß diese Körperchen als Zahlen bezeichnet werden. Wir werden aber sogleich sehen, daß er selbst und auch Plato gelegentlich denselben Sprachgebrauch haben³⁹⁾.

Bei Plato heißt es: „Die Zahl eines Plethron und das Plethron sind dasselbe; ebenso beim Stadion; auch die Zahl des Heeres und das Heer und in ähnlichen Fällen. Denn die gesamte Zahl bedeutet auch den gesamten Bestand des Dinges“⁴⁰⁾. — Die Aussage: „Die Zahl des Heeres ist das Heer“ ist durchaus vergleichbar mit dem pythagoreischen Satz: „Die Dinge sind Zahlen“. Unter Zahl wird das Gezählte verstanden. Wenn ein Maß einer ganzen Zahl gleichgesetzt wird, so ist zu bedenken, daß nach griechischer Auffassung jedes Maß, etwa das Stadion, so lange man danach mißt, als unteilbar angesehen wird. Wenn das Stadion in seine 600 Fuß geteilt wird, so wird es „vernichtet“⁴¹⁾, es zerfällt in die Fuß, die jetzt als unteilbar gelten. So konnte man sagen: „Die Zahl 600 — nämlich Fuß — und das Stadion sind dasselbe“.

Aufschlußreich ist eine Stelle in Aristoteles Schrift „Vom Himmel“, in der zunächst von Leukipp und Demokrit gesagt wird, daß für sie „die ursprünglich ersten Körper der Menge nach unbegrenzt viele, der Größe nach unteilbar sind“. Weiter heißt es⁴²⁾: „In gewisser Weise machen auch sie alles Seiende zu Zahlen und lassen es aus Zahlen bestehen; wenn sie dies auch nicht deutlich aussprechen, so wollen sie es doch eigentlich sagen.“ — Hieraus ist erstens zu schließen, daß Aristoteles es ganz natürlich findet, wenn man sagt: „Die Dinge sind Zahlen“ oder „sie bestehen aus Zahlen“, und damit meint: sie bestehen aus zählbaren Einheiten. Zweitens ist zu schließen, daß die Pythagoreer selbst diese Redeweise brauchten. Wenn sich also bei Aristoteles mit Bezug auf die Pythagoreer diese und ähnliche Wendungen finden⁴³⁾, so besteht immer mindestens die Möglichkeit, daß er auf ihre Atomlehre hindeutet.

Der Vorwurf des Aristoteles gegen die Pythagoreer ist kaum der, daß sie die Dinge als Zahlen bezeichnen, sondern vielmehr der, daß sie ausgedehnte und schwere Atome aus ausdehnungs- und gewichtslosen Einheiten, den Monaden, entstehen lassen. „Wie die erste Eins sich zur Größe gebildet habe, darüber scheinen sie keine Auskunft geben zu können“⁴⁴⁾.

Von einem Pythagoreer wird ausdrücklich bezeugt, daß er Atome annahm. Ephantus, wohl ein älterer Zeitgenosse Platos, hat nach dem Bericht des Stobäus gelehrt: „Von allem die Anfänge sind die unteilbaren Körper und das Leere“. Weiter erfahren wir, er habe als erster die pythagoreischen Monaden als körperlich bezeichnet⁴⁵⁾.

³⁹⁾ Siehe Anhang D.

⁴⁰⁾ Theätet 204d. Das Plethron war als Längenmaß = 100 Fuß; es wurde außerdem als Flächenmaß gebraucht. — Zusatz bei der Korrektur: arithmos ist wohl am Anfang mit „Maß“ (oder „Betrag“) zu übersetzen. Diese Bedeutung ist nicht selten, s. Stephani, Thes. ling. gr., II, Paris 1831—1856.

⁴¹⁾ Met. 7, 10; 1035a 18 von einer Linie, die halbiert wird.

⁴²⁾ Vom Himmel 3, 4; 303a 8.

⁴³⁾ Ross, a. a. O., I S. 146, führt 17 Stellen an. Bei der unbestimmten Ausdrucksweise sowohl des Aristoteles wie der Pythagoreer kann die Aussage „die Dinge sind Zahlen“ gelegentlich auch bedeuten, daß solche „Dinge“ wie Gerechtigkeit und Ehe Zahlen gleichgesetzt werden.

⁴⁴⁾ Met. 13, 6; 1080b 20; vgl. Met. 14, 3; 1091a 16.

⁴⁵⁾ Zeller, Phil. der Griechen I (1923), S. 490 und 804f. Zeller hat in seiner Darstellung der pythagoreischen Lehre auf dies Zeugnis kein Gewicht gelegt, weil er, wie bis vor kurzem die meisten Forscher, glaubte, daß Aristoteles vorwiegend den älteren Pythagoreismus schildere. — Lannery nimmt an, die älteren Pythagoreer hätten die Körper aus Punkten bestehen lassen, und er schließt dies daraus, daß Zeno diese Lehre habe bekämpfen wollen. Uns scheint diese Begründung sehr schwach, und wir meinen auch, man darf den Pythagoreern nicht solchen Widerspruch zutrauen. Siehe Zeller, a. a. O., S. 747 und 752.

Hiernach war der Atomismus zur Zeit des Aristoteles noch eine ziemlich neue Wendung innerhalb der pythagoreischen Lehre.

Wir werden jetzt einige Nebenwege der pythagoreischen Atomlehre besprechen, zunächst einen Irrweg. Es ist das Verfahren des Pythagoreers Eurytus, der wohl etwa gleichzeitig mit Ekphantus gelebt hat. Um die „Zahl“ des Menschen oder des Pferdes zu bestimmen, zeichnete er einen Umriss der Gestalt und füllte die Fläche mit Steinchen verschiedener Farbe aus. Wenn er dann für den Menschen 250 Steine brauchte, dann erklärte er 250 für die Zahl des Menschen⁴⁶⁾. Vielleicht paßt hierzu die schon erwähnte Angabe des Aristoteles⁴⁷⁾, wonach die Pythagoreer das, dem etwas zuerst zukommt, für das Wesen des Dinges hielten. Wenn nun 250 Steinchen die kleinste Menge sind, mit der man die Gestalt des Menschen auslegen kann, dann gibt diese Zahl das Wesen des Menschen an.

Eher verständlich ist es, wenn für die Pythagoreer und Plato die Zahl 1 den Punkt bedeutete, 2 die Linie, 3 die Fläche, 4 den Körper. Man kam wohl darauf, weil die Strecke durch 2 Punkte bestimmt ist, das Dreieck, die einfachste ebene Figur durch 3 Punkte, das Tetraeder durch 4 Punkte. — Plato ging noch weiter. Da Gleiches durch Gleiches erkannt wird, so ordnete er der Zahl 4, der Körperzahl, die sinnliche Wahrnehmung zu, der Zahl 1 das wahrhafte Denken, das die Alleinheit erfährt, und den Zahlen 2 und 3 die mittleren Stufen der Erkenntnis, nämlich die Wissenschaft und die Meinung⁴⁸⁾.

Für die Gleichsetzung der Linie mit der Zwei gibt Aristoteles eine Erklärung, die uns gut in die damalige Vorstellungswelt hineinführt, namentlich das Interesse für die Mathematik und ihre Definitionen kennzeichnet⁴⁹⁾. Die Kreise, die wir sehen, so heißt es, sind teils aus Erz, teils aus Holz oder anderen Stoffen. So ist es natürlich, daß wir bei der Definition des Kreises vom Stoff absehen. Wenn wir ausschließlich eiserne Kreise sähen, so würden wir vielleicht zweifeln, ob nicht das Erz in die Definition aufzunehmen sei. Ebenso kann man beim Menschen, der immer in Fleisch und Knochen erscheint, zweifeln, ob diese Stoffe zur Definition gehören. So tragen auch manche Bedenken, ob es richtig sei, Kreis und Dreieck durch Linie und Stetiges zu definieren, ob man nicht von dem allen absehen müsse und sagen: der Begriff der Linie ist der der Zwei.

VI. Die Zweiteilung.

Da die Zahlen bei den Pythagoreern wie bei Plato und seinen Nachfolgern so große Bedeutung hatten, so war auch die Ableitung der Zahlen aus der Eins eine viel erörterte Frage. Aristoteles schildert diese „Entstehung“ einmal ziemlich genau, allerdings an einer Stelle, die wohl gegen andere Platoniker gerichtet ist. Aber die Ableitung wird ungefähr mit der pythagoreischen übereinstimmen. Es heißt⁵⁰⁾: „Wenn die Eins auf eine gerade Zahl fällt“, nämlich zu ihr addiert wird, „so entsteht die ungerade Zahl. Wenn die Zwei darauf fällt“, nämlich mit einer geraden multipliziert wird, „so entstehen die von der Eins an verdoppelten Zahlen. Endlich, wenn die ungeraden Zahlen darauf fallen“, d. h. mit den Potenzen von Zwei multipliziert werden, „so entstehen die anderen geraden Zahlen.“

⁴⁶⁾ Diels, a. a. O., S. 420.

⁴⁷⁾ Met. I, 5; 987a 22.

⁴⁸⁾ Aristoteles, Von der Seele, I, 2; 404b 16. — Zeller, a. a. O. II, 1, 1922, S. 758 ff.

⁴⁹⁾ Met. 7, 11; 1036b 8. Nach dem Aristoteles-Erklärer Alexander ist von Pythagoreern die Rede. Siehe Ross, a. a. O. II, S. 202.

⁵⁰⁾ Met. 13, 8; 1084a 3. — Vermutlich hatte Plato selbst eine andere Ableitung; siehe Ross, a. a. O. I, S. LIX, auch unten Anm. 64.

Die etwas nachlässige Fassung bedeutet doch wohl, daß man, um zu irgendeiner Zahl zu gelangen, von der 1 aus abwechselnd die Verdoppelung und die Addition der 1 ausführen muß, die Verdoppelung unter Umständen mehrmals nacheinander, die Addition immer nur einmal. Zu der Zahl 37 z. B. gelangt man auf folgende Weise ⁵¹⁾:

1 2 4 8
 9 18 36
 37.

Die in unserer Stelle angedeutete Dreiteilung der Zahlen erscheint auch in einem Philolaus-Fragment ⁵²⁾: „Die Zahl hat zunächst zwei besondere Formen, das Ungerade und das Gerade, dann noch eine dritte aus beiden gemischte Formen, das Gerade-Ungerade“. Mit dem Geraden können nur die Potenzen von 2 gemeint sein, mit dem Gerade-Ungeraden die anderen geraden Zahlen ⁵³⁾.

Hiernach werden wir auch eine andere schwierige Aristoteles-Stelle erklären können ⁵⁴⁾: Für die Pythagoreer „sind Elemente der Zahlen das Gerade und Ungerade, von denen das eine begrenzt, das andere unbegrenzt ist; die Eins aber besteht aus diesen beiden, denn sie ist sowohl gerade wie ungerade; die Zahl aber entsteht aus der Eins“. — Daß die Eins sowohl zum Geraden wie zum Ungeraden gehören soll, wird verständlich, wenn das Gerade die Potenzen von 2 bedeutet. In der Tat gehört die 1 sowohl zu der Reihe 1, 2, 4, 8 . . . wie zu der gewöhnlichen Reihe der ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7 . . . ⁵⁵⁾. — Wenn es am Anfang heißt: „Die Elemente der Zahlen sind das Gerade und Ungerade“, so liegt es nahe, an die geraden und ungeraden Zahlen zu denken. Aber zunächst sagt Aristoteles kurz vorher an zwei Stellen ⁵⁶⁾: die Elemente oder auch Prinzipien der Zahlen sind zugleich die Elemente oder Prinzipien alles Seienden. Die geraden und ungeraden Zahlen können hiermit nicht wohl gemeint sein. Ferner heißt es ⁵⁷⁾: das Gerade ist unbegrenzt, das Ungerade begrenzt. Hierzu paßt es am besten, wenn wir das Gerade und Ungerade als erzeugende Kräfte auffassen, nämlich die eine Kraft immer verdoppelnd, die andere 1 hinzufügend. Die Verdoppelung führt schnell zu sehr großen Werten, weshalb die Griechen sagten, sie breite sich aus wie das Feuer ⁵⁸⁾. Hierin liegt der Sinn der Bezeichnung „das Unbegrenzte“. — Die Zufügung der 1 verhindert zwar nicht weiteres Verdoppeln, wohl aber die Umkehrung, das Halbieren, und dies galt immer als eng verbunden mit dem Verdoppeln. So erklärt sich auch, weshalb die ungeraden Zahlen begrenzt heißen, die Addition der 1 zu einer geraden Zahl Begrenzung.

⁵¹⁾ Um die Zahlen zu finden, geht man von 37 rückwärts.

⁵²⁾ Diels, a. a. O., S. 408.

⁵³⁾ So auch Lannern, *Mém. scientif.* 2 (1912), S. 111.

⁵⁴⁾ *Met.* 1, 5; 986a 17.

⁵⁵⁾ Nach Theo heißt die 1 deswegen gerade und ungerade, weil sie zur geraden Zahl addiert, diese ungerade macht, und zur ungeraden addiert, diese gerade. Diese Erklärung ist offenbar nichts wert, denn danach wären ja auch 3, 5 . . . sowohl gerade wie ungerade. — Zeller bemerkt, daß das Gerade und Ungerade der Pythagoreer nicht daselbe ist wie die geraden und ungeraden Zahlen. Er versucht aber nicht, das Rätsel zu lösen; a. a. O., S. 458 und 505.

⁵⁶⁾ *Met.* 1, 5; 985b 25 und 986a 1.

⁵⁷⁾ Außer an unserer Stelle auch *Physik* 3, 4; 203a 10: Die Pythagoreer sagen, das Unbegrenzte sei das Gerade, denn (von den Dingen) aufgenommen, und begrenzt vom Ungeraden, verleihe es den seienden Dingen die Unbegrenztheit. — „Von den Dingen“ ist erklärender Zusatz; siehe Zeller, a. a. O., S. 456. — Auf diese Stelle folgt im aristotelischen Text die Umlegung der Gnomonen um die 1, die wahrscheinlich irrtümlich hierher geraten ist und nichts zu tun hat mit der Frage, weshalb das Gerade unbegrenzt, das Ungerade begrenzt ist. Vgl. Heide, *Arch. für Gesch. der Philosophie* 14 (1901), S. 384.

⁵⁸⁾ Aristoteles, *Zweite Analyt.* 1, 12; 77b 40. Hier wird der Vergleich der geometrischen Proportion (wovon ja die wiederholte Verdoppelung ein besonderer Fall ist) mit dem Feuer erwähnt.

Etwas mehr Licht kommt in die Sache, wenn wir an die musikalischen Intervalle und den Aufbau der Tonleiter denken. Wir stellen uns eine tönende Saite von bestimmter Länge vor. Wenn wir auf diese „das Gerade“ oder die wiederholte Verdoppelung anwenden, so erhalten wir die Längen 2, 4, 8 . . . und als Töne die tieferen Oktaven. Die Addition der 1 zu 2, 4, 8 ergibt die neuen Zahlen 3, 5, 9 und damit die Hauptintervalle der Musik, nämlich 2:3, 3:4, 4:5, 8:9, also Quint, Quart, Terz und den großen ganzen Ton.

Erinnern wir uns, daß das „Seiende“, das von Zahlen beherrscht wird, nicht nur die Töne umfaßt, sondern auch den Himmel mit seiner Sphärenharmonie, die rhythmische Rede, vielleicht auch Farben und Geschmacksarten und die Mischung der Elemente — dann hat der Satz: „Das Gerade und das Ungerade sind die Prinzipien der Zahlen und der Dinge“ immerhin etwas von seiner pythagoreischen Dunkelheit verloren. Er könnte bedeuten: von den beherrschenden Zahlen werden die wichtigsten gewonnen durch wiederholte Verdoppelung der 1 und Addition der 1 zu den drei ersten erhaltenen Zahlen.

Bei Plato haben wir im „Philebus“ eine andere Auffassung von „Grenze und Unbegrenzt“ kennengelernt⁵⁹⁾. Das Unbegrenzte bedeutet hier beliebige Veränderung der Saite, die Grenze ist so viel wie Festsetzung eines bestimmten Zahlenverhältnisses zwischen der alten und der neuen Länge. In den anderen Dialogen ist von „Grenze und Unbegrenzt“ nichts zu finden, auch nichts von der wiederholten Verdoppelung und Halbierung⁶⁰⁾. Nach dem Bericht des Aristoteles hat aber Plato diese „Prinzipien“ allerdings angewandt. Er sagte nur nicht „das Unbegrenzte“, sondern „die unbestimmte Zweiheit“⁶¹⁾ oder „das Große und das Kleine“⁶²⁾.

„Im Phädo“⁶³⁾ heißt es: die Zwei kann dadurch entstehen, daß ein Ding geteilt wird, und auch dadurch, daß ein neues Ding hinzutritt. Die wahre Ursache des Zwei-Seins ist aber weder die Spaltung noch das Zusammentreten, sondern vielmehr die Teilnahme an der Zweiheit. — Verdoppeln und Halbieren sollen also im Wesen dasselbe sein: aus einem Teil werden zwei Teile. Um diesen Gedanken anzudeuten, haben wir als Überschrift dieses Abschnitts das Wort „Zweiteilung“ gewählt⁶⁴⁾.

Eine weitere Ausführung mit einer spielerischen Paradoxie findet sich bei Theo⁶⁵⁾: Wenn die Eins geteilt wird, so wird sie als Körper verkleinert, denn die entstehenden Stücke sind kleiner als die Eins war; dagegen als Zahl wächst die Eins, aus der Eins entsteht vieles. —

⁵⁹⁾ Siehe oben S. 347.

⁶⁰⁾ In den Gesetzen wird die Verdoppelung einmal erwähnt, doch nur nebenbei; siehe oben S. 344.

⁶¹⁾ Met. 13, 7; 1082a 13. — Met. 1, 6; 987b 33 (hier nur „Zweiheit“). — Met. 14, 3; 1091a 5.

⁶²⁾ Met. 14, 3; 1091a 10. — Met. 1, 7; 988a 26. — Physik 3, 4; 203a 15.

⁶³⁾ S. 97a und 101b.

⁶⁴⁾ Plato hatte wohl das pythagoreische „Gerade“, wenn auch unter anderem Namen, aber nicht das „Ungerade“. Er lehnte die pythagoreische Tonleiter und die entsprechende Entstehung der Zahlen ab. Die Tonleiter, die er im „Timäus“ konstruiert, enthält die Terz nicht, also auch die Zahl 5 nicht. Plato wollte mit den Zahlen 2, 3 und deren Potenzen auskommen, vielleicht wegen der Beziehung $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ (vgl. E. Frankl, Plato und die sog. Pythagoreer, Halle 1923, bes. S. 166). — Nach Aristoteles (Met. 1, 6; 987b 25 und Physik 3, 4; 203a 15) hat Plato, zum Unterschied von den Pythagoreern, zwei Unbegrenzte angenommen. Diese waren das Verdoppeln und Halbieren. Er konnte nämlich auch das Halbieren unbegrenzt ausführen, da er es auch auf Strecken anwandte. So mußte ihm erst recht eine „Entstehung der Zahlen“ mißfallen, bei der nur an die Verdoppelung der Einheits-Saite gedacht war. — Zeugnisse, griechisch und deutsch, bei Stenzel, Zahl und Gestalt, Leipzig 1933, S. 64 und 67; die Ausdrücke „Anspannen und Nachlassen“, die Simplicius für das Halbieren und Verdoppeln braucht, deuten vielleicht auf die gespannte Saite hin. (Zusatz bei der Korrektur.)

⁶⁵⁾ Ed. Hiller, S. 18.

Es ist die etwas künstliche Lehre von der „unteilbaren“ Eins, zugleich das ängstliche Bemühen, Brüche zu vermeiden. Wenn der Fuß in Zoll geteilt wird, so ist nach der Teilung die alte Eins, der Fuß, nicht mehr da; die neue Eins ist der Zoll, und deren sind mehrere.

Diese Betrachtungen erscheinen etwas verständlicher, wenn wir an die Begriffsspaltung denken, die von Plato zeitweilig sehr ernst genommen wurde. Denken wir uns nach griechischer Weise die Linien eingeteilt in gerade und krumme. Dann ist der neu gewonnene Begriff der geraden Linie an Umfang geringer als der einfache Begriff der Linie: die Gesamtheit der gezeichneten Linien ist in zwei „Hälften“ geteilt. Dagegen inhaltlich, in dem, was die Definition ausdrückt, ist der neue Begriff reicher als der alte, — und ein zahlenbegeisterter Grieche mochte wohl finden, daß er das Doppelte des alten war.

Am weitesten getrieben ist die Begriffsspaltung in Platons „Staatsmann“⁶⁶⁾. Hier wird der Begriff der Wissenschaft immer wieder zweigeteilt, im ganzen neunmal: erst die Wissenschaft überhaupt in erkennende und praktische, die erkennende wieder in zwei Teile usw., bis schließlich die Staatskunde erscheint als die Wissenschaft von der Gemeinschafts-Züchtung der Menschen. — Auch die Zahl 512 läßt neunmalige Halbierung zu, und es wäre damals kein großer Schritt gewesen, diese Zahl dem Begriff der Wissenschaft gleichzusetzen.

Aristoteles macht zu solcher Gleichsetzung einige grundsätzlich billigende Bemerkungen⁶⁷⁾: Die Definition oder Wesensbestimmung ist eine Art von Zahl, denn wie die Zahl teilbar ist bis zur Eins, so gibt es auch Begriffe, die sich teilen lassen, bis man auf einen unteilbaren stößt. Und wie eine Zahl, wenn man etwas wegnimmt oder zusetzt, nicht dieselbe bleibt, so wird auch die Wesensbestimmung verändert durch Wegnehmen oder Zufügen. Endlich gibt es für die Zahl etwas, wodurch sie eins ist⁶⁸⁾, und ebenso ist die Wesensbestimmung eine.

Auch ein Beispiel können wir anführen. An einer anderen, übrigens nicht völlig verständlichen Stelle⁶⁹⁾ heißt es: da die 2 ein Teil der 4 ist, „so folgt, daß der Mensch ein Teil des Pferdes ist, falls 4 die Idee von etwas ist, wie von Pferd oder Weiß, und 2 die Idee des Menschen“. — Die Bemerkung ist kritisch gemeint und zeigt jedenfalls soviel, daß die Halbierung der Zahl 4 mit der Spaltung eines Begriffs verglichen wurde. —

Wahrscheinlich hatten im Geiste Platons die Begriffsspaltung und ihr Abbild, die Zahlenteilung, noch eine viel höhere und weitere Bedeutung. Sie sind ihm ein Bild des ganzen Weltgeschehens. Wie aus der Eins durch Verdoppelung und Wieder-Verdoppelung die nahen und fernen Zahlen entstehen, so strömt von der Sonne die Wärme, die der Erde das Leben schenkt, und das Licht, das ein Erkennen ermöglicht, und in gleicher Weise ist die Idee des Guten Mittelpunkt und Ursprung alles Werdens und Vergehens. — Es ist der Gedanke der Emanation, den Plato nur einmal, im „Staat“ angedeutet hat, während er später, nach bitteren Enttäuschungen, das Höchste für unaussprechlich erklärte. Es ist derselbe Gedanke, den später der Neuplatoniker Plotin in begeisterten Worten verkündet hat.

VII. Schluß.

Auf Widersprüche innerhalb der pythagoreischen Zahlenlehre ist schon oft aufmerksam gemacht worden. Aber Eduard Zeller hat sich mit seiner großen Autorität bis zuletzt für die Einheitlichkeit der pythagoreischen Lehre eingesetzt. Er und mit ihm viele andere

⁶⁶⁾ Am Anfang.

⁶⁷⁾ Met. 8, 3; 1043b 34.

⁶⁸⁾ Wenn man sagt: „sechs Pferde“, so hat man einen Grund, diese 6 zusammenzufassen.

⁶⁹⁾ Met. 13, 8; 1084a 23. — Zur Gleichsetzung von Begriff und Zahl siehe besonders Stenzel, Zahl und Gestalt bei Platon und Aristoteles, Berlin 1933.

Forscher haben deren Wesen allerdings in einer Absurdität gesehen, nämlich in der Gleichsetzung der begrifflichen, immateriellen Zahl mit sinnlichen, greifbaren Dingen.

Es scheint uns doch, daß Zeller in doppelter Weise Unrecht hatte. Die pythagoreische Zahlenlehre ist nicht einheitlich. Mindestens sind Fälle zu unterscheiden, in denen eine einzelne Zahl und in denen ein Zahlen-Verhältnis das Wesen der Dinge bestimmen soll. Außerdem ist der Ausspruch: „Die Dinge sind Zahlen“ keineswegs sinnlos. Freilich ist die Bedeutung nicht immer dieselbe.

Wir werden zufrieden sein, wenn diese beiden Ergebnisse unserer Untersuchung anerkannt werden⁷⁰⁾.

Anhang A (zu S. 341).

Die irrationalen Zahlen von A. E. Taylor.

A. E. Taylors Hypothese läßt sich wohl so wiedergeben. 1. Die mathematische Stelle der *Epinomis* (990 d) weist auf irrationale Zahlen hin. 2. Die irrationalen Zahlen sind von Plato oder seinen Schülern für astronomische Rechnungen benutzt worden, und 3. sie sind identisch mit den Idealzahlen Platons.

1. Die *Epinomis* bezeichnet es als Hauptaufgabe der Geometrie, zwei Quadrate zu zeichnen, die sich nicht wie Quadratzahlen verhalten. Der Ausdruck dafür ist: „zwei von Natur nicht ähnliche (ebene) Zahlen ähnlich zu machen“. Es handelt sich also um die ganz elementare Aufgabe, ein Quadrat zu zeichnen, das das 2, 3, 5 . . . fache des gegebenen ist. — Entsprechend soll es Aufgabe der Stereometrie sein, „unähnliche (körperliche) Zahlen ähnlich zu machen“, also einen Würfel zu verdoppeln oder zu verdreifachen usw.

Nun haben wir ohnehin verschiedene Anzeichen, daß Plato die Verdoppelung des Würfels sehr am Herzen lag. Er hat sich über die vorhandenen Lösungen abfällig geäußert⁷¹⁾. So ist es ganz verständlich, wenn in der *Epinomis* der Kreis den Wunsch ausspricht, man möchte doch eine einfache Ausführung der Würfelverdoppelung suchen — womöglich so einfach wie die Verdoppelung oder Verdreifachung eines Quadrats. — Die Griechen verlangten eine Lösung von idealer Genauigkeit und eine solche konnte nur geometrisch sein. Wir haben wirklich keinen Grund, an eine angenäherte numerische Lösung zu denken.

Taylor sieht einen solchen Grund darin, daß an unserer Stelle gleich nach den Bemerkungen über Geometrie und Stereometrie auf das arithmetische und harmonische Mittel hingewiesen wird. Diese sind in der Tat von den Griechen zur Berechnung von Näherungswerten für die Quadratwurzel benutzt worden. Wenn nämlich α ein kleiner positiver Wert ist und $\sqrt{1+\alpha}$ zu berechnen, dann ist das arithmetische Mittel zwischen 1 und $1+\alpha$, nämlich $x = 1 + \frac{\alpha}{2}$, eine erste Näherung. Eine Annäherung von der anderen Seite ist das harmonische Mittel y , das definiert ist durch $1:x = y:1+\alpha$. — Werden zwischen x und y wieder

⁷⁰⁾ Verschiedene Richtungen innerhalb der pyth. Lehre wollte Brandis schon 1828 feststellen, s. Zeller S. 450; — über Entwicklungstufen, wie sie Burnet und Döring vermuteten, s. Zeller S. 435–440 (von Nestle geschrieben). — Wir sind auf die Zeitbestimmungen wenig eingegangen, denn das Ziel unserer Arbeit sollte die Klärung der Lehren sein. Immerhin hat sich gezeigt, daß die von Aristoteles als pythagoreisch bezeichneten Lehren zu seiner Zeit noch sehr lebensfähig waren, und dies deutet darauf hin, daß sie größtenteils neu waren. Diese Ansicht vertrat Frank a. a. O. auch schon Lannern, *Mém. scient.* 7 (1925), S. 347.

⁷¹⁾ M. Cantor, *Vorles. zur Gesch. der Math.* I, Leipzig 1907, S. 233.

arithmetisches und harmonisches Mittel berechnet usw., so erhält man Paare von Näherungswerten von rasch wachsender Genauigkeit ⁷²⁾).

Für die Würfelverdopplung, die viel wichtigere Aufgabe, ist die Berechnung der Kubikwurzel nötig. Hierzu ist aber das arithmetische Mittel nicht brauchbar. Vielmehr gibt

$x = 1 + \frac{\alpha}{3}$ eine Annäherung für $\sqrt[3]{1+\alpha}$. — Arithmetisches und harmonisches Mittel können also wohl zur Berechnung der Quadratwurzel, aber nicht der Kubikwurzel dienen.

Außerdem erklärt sich das Auftreten der beiden Mittel ganz einfach durch die musikalische Bedeutung der Zahlen 6, 8, 9, 12: sie bezeichnen Grundton, Quart, Quint und Oktave. Unsere mathematische Stelle wird nämlich eingeleitet durch die Bemerkung (S. 990c), daß für das Verständnis der Astronomie eine Vorbereitung nötig sei, und als deren Gegenstände werden nacheinander kurz charakterisiert Arithmetik, Geometrie, Stereometrie und zuletzt die Musik.

2. Taylors Gedanke, daß die Griechen versucht haben werden, die Verhältniszahlen der Hestirnumläufe mit Quadrat- oder Kubikwurzeln in Verbindung zu bringen, hat zunächst etwas Bestehendes. Da uns immer versichert wird, der ganze Himmel sei Harmonie und Zahl, so wird man solche Zahlen auch gesucht haben. Zu Platons Zeit stand aber die Theorie des Irrationalen in hoher Blüte. Für das Verhältnis von Monat zu Tag hatte man etwa die Zahlen 19756:669 ⁷³⁾. Gewiß lag es nahe zu fragen, ob hier vielleicht eine Quadratwurzel oder das Verhältnis zweier Wurzeln verborgen lag. Aber Kepler hat sein Gesetz nicht durch Wurzeln ausgesprochen, sondern durch Quadrate und Kuben, und entsprechend werden die Alten verfahren haben. Sie haben vermutlich nicht nach Taylor eine Liste der Quadratwurzeln aufgestellt und geprüft, ob etwa zwei das obige Verhältnis hatten, — sondern sie haben jene Zahlen quadriert und untersucht, ob die so erhaltenen Zahlen (nahezu) im Verhältnis zweier einfachen ganzen Zahlen stehen.

Eine genaue empirische Bestimmung der himmlischen Umlaufzeiten lag überhaupt nicht in Platons Sinn. Im „Staat“ (S. 529–530) spottet er über die Leute, die mit offenem Munde nach oben blicken und die Verzierungen an der Decke betrachten; man müsse die Erscheinungen am Himmel beiseite lassen und sich höheren Aufgaben zuwenden, — d. h. Zahlenspekulationen über den Himmel anstellen. Wir haben Platons Phantasie über die Planetenabstände erwähnt. Bezeichnend ist auch seine Beurteilung der Versuche, die Zusammensetzung der Farben praktisch zu prüfen ⁷⁴⁾.

3. Waren die Idealzahlen Platons unsere reellen Zahlen, also keine Zahlen im griechischen Sinne, keine ganzen Zahlen? Kein alter Schriftsteller deutet darauf hin, und was wir oben von Platons Zahlenglauben mitgeteilt haben, das waren spielerische Rechnungen wie die mit der Zahl $9 \cdot 9 \cdot 9$, der Glaube an die Allherrschaft der musikalischen Verhältniszahlen, endlich — wahrscheinlich — die Deutung der Begriffsspaltung durch Eigenschaften der Zahlen. Immer sind es ganze Zahlen. Zwar wird im Philebus die beliebige Veränderung stetiger Größen angedeutet, auch wohl das Verhältnis solcher Größen. Aber auch Euklid hat Ähnliches, und die irrationale Zahl ist das noch nicht.

So müssen wir Taylors These ablehnen, wie auch Dijksterhuis ⁷⁵⁾ und andere Mathematiker es getan haben.

⁷²⁾ Lannery, Mém. scientif. 3 (1915), S. 82.

⁷³⁾ Von Ptolemäus angegeben; Handbuch der Astronomie, übers. von Manitius, Leipzig 1912, S. 195 f.

⁷⁴⁾ Timäus 88d; siehe Anhang C.

Anhang B (zu S. 343)

Die Siebenzahl in Vorderasien.

Welches der erste Grund für die Auszeichnung der Zahl Sieben gewesen ist, wird kaum festzustellen sein. Man hat an die Mondphasen, an das Siebengestirn und an die 7 Planeten gedacht. Auf die Mondphasen wurde bei kultischen Handlungen in Babylonien schon vor 2000 v. Chr. Rücksicht genommen. Aber man mußte doch bald bemerken, daß man mit der Rechnung von 7 Tagen von Phase zu Phase nicht auskommt, und daß der synodische Monat $29\frac{1}{2}$ Tage hat. Vielleicht war also die Zeitrechnung nach 7 Tagen vielmehr ein Versuch, sich der schon vorhandenen Verehrung der Siebenzahl anzupassen. — Um 2000 erscheint ein besonderes Zeichen für das Siebengestirn. Aber die 7 Gottheiten, deren Sinnbild es war, wurden schon vorher verehrt, und außerdem haben griechische und römische Schriftsteller darauf hingewiesen, daß sich in den Plejaden keineswegs 7 Sterne deutlich abheben⁷⁶⁾. Auch wer sie heute beobachtet, wird gewöhnlich nicht 7 Sterne zählen, sondern entweder 6 oder mehr als 7. Freilich sind gute Augen oder ein Glas dazu nötig. So sind Name und Bedeutung des Siebengestirns wahrscheinlich auch etwas Abgeleitetes. — Die Zusammenfassung von Sonne und Mond mit den eigentlichen Planeten zu einer Siebenzahl ist in Vorderasien etwa seit 650 v. Chr. nachweisbar, also verhältnismäßig spät. Für den unbefangenen Beobachter stehen ja auch Sonne und Mond zunächst für sich. Beide werden in Babylonien seit dem 14. Jahrhundert mit Venus als Sonnenbegleiter zu einer Dreierheit vereinigt⁷⁷⁾. Erst als sich in dem Jahrtausend vor Chr. die Sterndeutung entwickelte, gewannen die 7 beweglichen Sterne eine gemeinsame erhöhte Bedeutung. Bei Sonne und Mond wurden die Verfinsterungen, übrigens auch atmosphärische Trübungen, als prophetische Zeichen angesehen, bei den eigentlichen Planeten ihre Stellung am Himmel. In dieser Zeit hat sich langsam die Verbindung der 7 Planeten zu einer Einheit durchgesetzt. Die Benennung der 7 Wochentage mit den Namen der Planeten, wie sie heute in den Kultursprachen besteht, ist erst nach Beginn unserer Zeitrechnung nachweisbar.

Durch die Verehrung der Plejaden und der 7 Planeten ist sicherlich das Ansehen der Siebenzahl noch befestigt worden, aber als Ursache ihrer Auszeichnung haben wohl nur die Mondphasen einige Wahrscheinlichkeit für sich. Wenn man auch sie ablehnt, wie Eduard Meyer es tut⁷⁸⁾, so bleibt noch eine mathematische Erklärung: Sieben ist die erste eigenwillige Zahl, die weder zum Zehner- noch zum Zwölfersystem paßt, die zu den beiden babylonischen Einheiten, 10 und 60, teilerfremd ist.

Anhang C (zu S. 347)

Die Verhältniszahlen der Farbenmischung.

Die Übertragung der akustischen Gesetze auf Farben und Geschmacksempfindungen, die Aristoteles ohne Quellenangabe und ohne Kritik mittelt, ist vielleicht nicht pythagoreisch.

⁷⁶⁾ Elementen van Euklides II, Groningen 1930, S. 272.

⁷⁶⁾ Carl von Littrow, Das Zurückbleiben der Alten in den Naturwiss., Rektoratsrede, Wien 1869, S. 9.

⁷⁷⁾ War Merkur, der doch auch ein Sonnenbegleiter ist, damals noch unbekannt? In unseren Breiten ist er schwer zu sehen, und es ist fraglich, ob die atmosphärischen Bedingungen im Zweistromland viel besser sind. Neuere Forschungsreisende scheinen darin einig, daß die Klarheit des dortigen Himmels oft übertrieben wurde, daß der Horizont dort durch Staub nicht weniger getrübt ist als bei uns durch Wasserdunst und Rauch. Freilich war damals mehr Land bebaut als heute, aber das fruchtbare Land doch auch von weiten Wästen umgeben. — Für frühe Entdeckung sprechen immerhin zwei unanfechtbare Gründe: die hellere Stellung der Sternbahn zum Horizont in niederen Breiten und die guten Augen der Bewohner.

Merkwürdig ist schon, daß Aristoteles die Pythagoreer in diesem Zusammenhange nicht nennt, wohl aber in demselben Abschnitt erwähnt, sie hätten die Oberfläche als Farbe bezeichnet (439a 30). Vor allem aber gibt Plato im „Timäus“ (S. 68) eine andere Farbenlehre. Die Farben sollen nicht nur durch Mischung von Schwarz und Weiß entstehen, sondern das Feuer und das Glänzende müssen noch dazukommen. Die Angabe von Zahlenverhältnissen wird abgelehnt: „Wieviel das Maß für jedes einzelne betrage, das zu sagen hätte, auch wenn man es wüßte, keinen Sinn“. Es folgt noch die Bemerkung, daß es frevelhaft wäre, die Farbmischung durch Versuche prüfen zu wollen.

Da Plato nach allgemeiner Ansicht im „Timäus“ pythagoreische Lehren vorträgt und er sicherlich dem Bunde nahestand, so stammte die Farbenlehre, die er angriff, kaum aus dieser Quelle. Im „Philebus“ wird von der Sache nichts erwähnt, weder bei der Erklärung der Grenze und des Unbegrenzten (siehe oben S. 347) noch bei der Besprechung des reinen Weiß (S. 53a). Vielleicht ist die Lehre von den rationalen Mischungsverhältnissen bei Farben und Geschmacksarten, auf dürftige Versuche gestützt, aufgestellt oder jedenfalls Plato bekannt geworden, nachdem er den Philebus vollendet hatte und bevor er den Timäus schrieb. Vielleicht waren es persönliche Gründe, die ihn zur Ablehnung veranlaßten. Sachliche Gründe sind kaum einzusehen, denn die Lehre lag in der Richtung des pythagoreischen Denkens, und phantastischer als Platos himmlische Tonleiter war sie auch nicht ⁷⁹⁾.

Anhang D (zu S. 349)

Zahl und Gezähltes.

„Die Zahl hat eine doppelte Bedeutung, denn sowohl das Gezählte und Zählbare nennen wir Zahl, wie auch das, mittels dessen wir zählen“, so sagt Aristoteles ⁸⁰⁾. Die Zahl im ersten Sinne ist fest verbunden mit den gezählten Gegenständen, so daß wir sogar erfahren: Die Zehn ist eine andere, wenn man von 10 Schafen als wenn man von 10 Hunden spricht; die Zahl allerdings ist beidemale dieselbe ⁸¹⁾. — Die „Zehn“ haftet also an den Gegenständen, die zuletzt genannte „Zahl“ ist die mehr abstrakte Zahl, nach der gezählt wird. Allerdings war die griechische „zählende“ Zahl nicht so völlig abstrakt wie unsere Zahl. Auch sie zählte etwas, nämlich unteilbare, untereinander völlig gleiche Monaden ⁸²⁾.

Numerus numerans und numerus numeratus wurden noch zu Keplers Zeit von der Schule — doch wohl von Scholastikern — unterschieden ⁸³⁾.

⁷⁹⁾ Geschichte des Altertums I, 2, Stuttgart 1926, S. 587. — Für die übrigen Angaben siehe oben S. 343 Anm. 6.

⁸⁰⁾ Vgl. O. Becker, Quellen und Studien zur Gesch. der Math., B 3 (1936), S. 400—410. Becker will die rationale Farbmischung dem Eudoxus zuschreiben. Die Stelle im Timäus ist nicht berücksichtigt.

⁸¹⁾ Physik 4, 11; 219b 5; kurz wiederholt 4, 14; 223a 24.

⁸²⁾ Physik 4, 14, 224a 2; — der Gedanke wird schon vorher angedeutet 223b 5.

⁸³⁾ Dies betont Jacob Klein, Quellen und Studien zur Gesch. der Math., B 3 (1936), namentlich S. 53f.

⁸⁴⁾ Kepler, Mysterium cosmographicum, übersetzt von Caspar, Augsburg 1923, S. 26f. —

Ermähnt seien noch zwei Arbeiten, von denen der Verfasser leider erst spät erfahren hat: Jenny Bollinger, Die sogenannten Pythagoreer des Aristoteles, Diss., Zürich 1925; und B. G. Hopper, Medieval number symbolism, New York 1938.

DEUTSCHE MATHEMATIK 5 (1940)
341—357