

305
KAHANOFF, B.
1947

C1

LA PHILOSOPHIE DE PYTHAGORE ET LA SCIENCE⁽¹⁾

PAR

BORIS KAHANOFF.

I

Un des plus curieux penseurs que l'humanité ait connus, Pythagore, puisait à toutes les grandes sources de sagesse à l'époque, entre autres chez les savants prêtres de Memphis et de Thèbes.

Nous allons évoquer l'idée fondamentale de sa philosophie, qui projette une lumière éblouissante sur le monde et nous en donne une réelle vision. C'est le primat de la mathématique, ou la loi du Nombre qui d'après les Pythagoriciens est « la prison dans laquelle l'unité divine a renfermé l'univers ».

Au début, les Pythagoriciens enseignaient que les nombres constituent l'essence même des choses et leur sont identiques. Dans cette forme, l'idée est inconcevable, même absurde. Plus tard, les Pythagoriciens affirmèrent seulement que le Nombre *régit* le monde, ce qui dans notre langage moderne veut dire que le Nombre détermine les *rapports* des choses, mais nullement leur *nature* elle-même, ou les « choses en soi », ces dernières étant d'ailleurs inaccessibles à notre compréhension. Les rapports des choses reflètent donc les rapports des nombres correspondants, et comme ces derniers ils obéissent aux lois inexorables de la

B. KAHANOFF, *La philosophie de Pythagore et la science* : BIE XXIX 1946-1947 243-253. | Aperçu sommaire de la genèse et de l'évolution des sciences à la lumière de la loi du nombre de Pythagore.

Φ 5-4911. KAHANOFF (B.). *La philosophie de Pythagore et la science*. Bull. Inst. Egypte (1948), 38, 243-53. — Pythagore enseignait d'abord que les nombres sont l'essence des choses, mais il fut plus heureux ensuite en disant seulement que le nombre régit les rapports des choses. L'évolution des sciences jusqu'à nos jours confirme ces vues. Les mathématiques s'appliquent à de nombreux domaines, à tous les phénomènes mesurables. Il y a des limites à cette évolution (phénomènes accessibles uniquement à nos sens ou à notre conscience), mais, pour connaître un phénomène, il faut toujours essayer de le mesurer.

⁽¹⁾ Communication présentée en séance du 15 mai 1947.

mathématique pure — placée par Auguste Comte à la base de l'échelle des sciences.

Pour nous, heureux héritiers des trésors légués par Archimède, Newton, Maxwell, Einstein, l'idée Pythagoricienne paraît évidente, presque banale. Mais il a fallu un véritable génie pour l'énoncer il y a 25 siècles quand la science physique était à peu près inexistante.

Même à présent le champ de nos recherches scientifiques est encore loin d'être labouré d'une manière adéquate par les mathématiciens. De vastes domaines leur échappent encore totalement. Il est certain cependant que l'idée de Pythagore conquiert le monde de plus en plus, et c'est dans l'extension des méthodes mathématiques sinon à toutes, du moins à de multiples branches de nos connaissances, que réside le meilleur gage de nouveaux et insoupçonnés triomphes de la science.

Comme plus tard dans la conception platonicienne le monde des phénomènes matériels n'est que le reflet d'un monde idéal, de même dans la conception pythagoricienne les *rapports* des phénomènes matériels ne sont que le reflet des *rapports* des nombres, ces deux catégories de *rapports* différant l'une de l'autre autant que différent la matière de l'idée, l'imparfait du parfait. Étudier les lois des nombres — la mathématique —, et les appliquer ensuite aux mondes physique et même spirituel, autant que leurs phénomènes s'y prêtent, voilà la meilleure méthode pour accroître nos connaissances dans leur forme condensée — la science.

II

Ainsi, pour retracer sommairement la genèse des sciences et en pronostiquer le progrès à l'avenir, nous allons suivre la pensée pythagoricienne et jeter un coup d'œil rapide sur les étapes principales dans l'évolution de la science des nombres. Non pas dans le sens restreint de la « Théorie des nombres », mais dans le sens général de la mathématique pure. Sous le double aspect : de la *nature* des nombres, et de leurs *rapports*.

Au début, quand l'homme primitif a commencé à dénombrer des multitudes d'objets similaires, il ne connaissait que des nombres entiers. Encore leur limite s'étendait-elle bien lentement. Ainsi, par exemple,

le récit biblique sur Joseph ramassant de grandes quantités de céréales pour affronter la famine en vue, nous raconte que Joseph en a cessé le recensement « car il n'y avait plus de nombres » (*Genèse*, 41, 49).

Le stade suivant comporte déjà la reconnaissance d'une seule et unique partie de l'unité. On sait que ce stade est caractéristique pour l'Ancienne Égypte. Même de nos jours nous avons pu constater chez certains originaux de la Haute Égypte la curieuse habitude de simplifier des fractions ordinaires par leur réduction non pas à des fractions décimales, mais à des fractions au numérateur 1. Ce qui trahit probablement un très vieil atavisme.

Plus tard, l'introduction des fractions a complété le système des nombres qui sont en notre usage commun et que nous qualifions de rationnels.

C'est toujours Pythagore qui fut le premier, semble-t-il, à s'apercevoir des lacunes dans ce système des nombres, en constatant notamment l'impossibilité d'exprimer par un nombre rationnel quelconque le rapport entre la diagonale et le côté d'un carré. Presque deux millénaires se sont écoulés jusqu'à ce que l'on ait reconnu que cette valeur numérique ainsi que d'autres nombres pareils étaient réellement existants et sujets aux opérations de calcul habituelles.

Ici nous observons un cas où l'exploration empirique des choses précède leur exploration mathématique, la matière stimule l'idée, l'expérience devance l'analyse. Ce processus se répète souvent dans l'histoire des sciences (rappelons-nous les lois de Kepler!), mais généralement c'est l'inverse qui a lieu.

On a compris que les nombres rationnels, en dépit de leurs variations infinitésimales et continues de $-\infty$ à $+\infty$ ne représentent qu'une fraction des valeurs numériques réelles. Dans une autre étude (« Sur le Théorème de Fermat »), nous avons montré que cette fraction elle-même est infinitésimale, et qu'il existe une infinité de systèmes similaires au système des nombres rationnels, dont les valeurs numériques varient également d'une manière continue de $-\infty$ à $+\infty$, et tels que deux nombres quelconques du même système ont toujours une mesure commune, mais n'ont jamais de mesure commune avec un nombre quelconque d'un autre système. Il en résulte entre autres que les cas où deux valeurs

numériques sont commensurables entre elles sont infiniment moins fréquents que les cas où elles ne le sont pas.

Ainsi on est arrivé à la notion des nombres irrationnels.

Le discernement de nouvelles catégories des nombres ne s'est pas arrêté. On s'est aperçu que le terme « irrationnel » englobe des nombres de natures tout à fait différentes. D'abord a-t-on discerné parmi eux la catégorie des nombres irrationnels qui sont « algébriques », autrement dit, qui satisfont à une équation

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \dots + kx + l = 0$$

où les exposants et coefficients sont des nombres entiers ou nuls. Toutes les autres catégories des nombres irrationnels ont été dénommées « transcendantes ».

Mais la différenciation de ces dernières, n'ayant aucun trait positif commun, n'a pas tardé d'apparaître non plus. Actuellement nous en connaissons des nombres logarithmiques, des nombres fonctions de π , de certaines intégrales définies, et autres. Mais rien ne s'oppose à l'hypothèse qu'il existe encore d'autres catégories des nombres transcendants que nous ignorons actuellement, mais que l'avenir nous décèlera, ou dont nous n'aurons même jamais connaissance.

Nous voyons donc que les nombres rationnels ne constituent qu'un seul parmi d'innombrables autres systèmes des nombres réellement existants, tous les systèmes étant incommensurables entre eux-mêmes. Il n'existe, ou au moins on n'a conçu aucun procédé d'expression symbolique uniforme englobant *tous* les nombres réels. Notons à ce propos que le défaut de mesure commune n'est donc pas inhérent exclusivement aux phénomènes matériels hétérogènes ; il se manifeste également, il fait presque la règle parmi les valeurs numériques abstraites, ce vaste domaine si homogène, paraît-il, qui appartient au monde encore plus vaste d'« idées pures ».

Un fait curieux. Comme nous venons de le dire, nous ne connaissons aucun système universel de symboles numériques. Néanmoins le génie grec a conçu un système universel de *représentation graphique* des nombres réels, quels qu'ils soient — rationnels, irrationnels ou transcendants. C'est le rapport de deux longueurs, dont l'une est constante et prise pour

l'unité. Certes, ce système a le vice de toutes les représentations graphiques, où l'étendue d'un point et l'épaisseur d'une ligne tracée sont toujours appréciables. Mais en dehors de ce vice, la conception grecque n'a pas été et ne sera jamais surpassée par son universalité, car elle est parfaite ⁽¹⁾.

L'aperçu de la nature des nombres serait incomplet si nous ne mentionnions pas la catégorie des nombres définitivement introduits dans nos recherches par Gauss et Argand, notamment, les nombres imaginaires. Ceux-ci se distinguent de tous les autres nombres par le fait qu'ils sont une pure création de la raison humaine, car ils n'existent point en réalité. Pour donner une idée de l'importance capitale des nombres imaginaires, il suffit de rappeler qu'ils sont à la base de la théorie des fonctions analytiques et de ses multiples applications dans les sciences physiques.

III

Après l'aperçu sommaire de l'évolution de nos connaissances en ce qui concerne la *nature* des nombres, tournons-nous maintenant vers les *rapports* de ces derniers. Au terme « rapport » nous donnons le sens de « lien fonctionnel » entre les nombres.

Nos connaissances de ces rapports débutent par la fonction linéaire entre deux valeurs numériques x et y , du type

$$y = ax + b$$

où l'homme s'est familiarisé d'abord avec les cas les plus simples tels que $a = 1$, ou $b = 0$.

Ensuite on s'est initié aux fonctions circulaires. Les anciens Égyptiens

⁽¹⁾ L'universalité de ce mode d'expression *graphique* des nombres pourrait être étendue aussi à des *symboles* numériques. En effet, faisons varier un angle φ d'une manière continue de $-\pi$ à $+\pi$. Alors la série des valeurs $\tan \varphi$ représentera la gamme complète de *tous* les nombres réels de $-\infty$ à $+\infty$. Quelquefois ce mode d'expression peut s'avérer même avantageux (v. notre étude « Extraction graphique des racines cubiques ». *Bull. de l'Inst. d'Égypte*, 1945), cependant sa généralisation nous semble aussi peu commode qu'irréalisable.

y ont tellement avancé qu'ils ont pu calculer le nombre π avec une précision surprenante, l'erreur étant inférieure à 1 % (Ahmès, 2000 av. J.-C.).

Les fonctions côniques ont été étudiées surtout par les Alexandrins. Leurs connaissances des courbes côniques étaient si vastes qu'au fond les derniers deux millénaires n'y ont pas ajouté beaucoup.

Plus tard on a commencé à s'initier aux fonctions de degrés supérieurs à 2, aux fonctions transcendantes, aux fonctions à plusieurs variables.

Une immense expansion, on dirait une véritable révolution dans nos connaissances des rapports des nombres s'est produite au XVII^e siècle lorsque Descartes, Newton et Leibnitz ont introduit des valeurs numériques infinitésimales et créé le calcul différentiel, qui a été profondément exploré au siècle suivant par une pléiade d'illustres mathématiciens, en premier lieu par Lagrange et Laplace. On peut affirmer avec certitude que nos plus merveilleuses découvertes modernes, tant scientifiques que techniques, n'auraient été guère possibles sans les découvertes théoriques des mathématiciens cités.

Il faut cependant avouer que malgré ses succès éblouissants, la science mathématique de nos jours est encore loin d'être toute puissante. Déjà les équations différentielles linéaires de 2^e degré aux coefficients non-constants présentent de sérieuses difficultés à leurs solutions, même au cas d'une seule variable indépendante, et cela malgré la grande lumière que Legendre, Bessel et tant d'autres y ont apportée. Les difficultés augmentent pour des équations différentielles partielles. Quant aux équations différentielles non-linéaires, ainsi qu'aux équations différentielles d'ordres supérieurs à 2 et aux coefficients non-constants — on peut dire qu'elles demeurent encore presque inexplorées.

Or en dépit de l'harmonie, c'est-à-dire des rapports simples fréquemment constatés dans la nature, les phénomènes naturels sont souvent des fonctions fort compliquées de nombreux autres phénomènes ou facteurs, indépendants ou interdépendants. Un de ces facteurs est nécessairement le *temps* dans toutes les fonctions qui comportent un processus d'évolution ou des variations avec le temps, comme c'est le cas, par exemple, dans des réactions chimiques non-instantanées. Ceci nous amène à croire que de nouveaux progrès dans le domaine des équations différentielles à plusieurs variables et surtout des équations

différentielles partielles vont certainement marquer de grands progrès également dans les sciences physiques et autres.

Arrêtons-nous sur ces « autres » sciences. Dans le passé, les savants biologistes, psychologues et autres, dans leurs constantes recherches des « causes » ou des lois, se contentaient souvent de découvrir que le phénomène A est la cause du phénomène B qui en est l'effet, ce que nous exprimons analytiquement en écrivant

$$B = f(A)$$

Pour nous, Néo-Pythagoriciens, cela ne suffit plus : nous voulons connaître la nature exacte de la fonction f . Comme il ne nous suffit pas de constater que la force d'attraction (ou de répulsion) entre deux charges électriques décroît avec leur éloignement, et notre curiosité n'est apaisée que par la loi de Coulomb précisant que cette force est inversement proportionnelle au carré de la distance entre les charges. Voilà une connaissance du phénomène totale et rigoureuse, sans réserves ni approximations. Pour nous, la notion « causalité » se confond avec celle de « lien fonctionnel », laquelle est généralement plus compliquée et quelquefois même inextricable.

Comme un exemple d'expression mathématique dans les sciences non-physiques citons la loi de Weber-Fechner, et cela indépendamment du fait que la rigueur de cette loi est contestée par les psychologues.

Notons encore une catégorie des fonctions fort singulières qui permettent de déterminer des rapports numériques non pas rigides et définis, mais probables, la précision du degré de probabilité elle-même étant l'objet des investigations mathématiques. Fondé par les études de Pascal et de Fermat sur des jeux de hasard, le calcul des probabilités s'est développé — contrairement aux prévisions et même à l'aversion d'Auguste Comte — en une branche mathématique de la plus haute importance. Il suffit de nous rappeler que durant les derniers trois quarts de siècle, depuis Boltzman, le calcul des probabilités est en train de modifier radicalement certaines de nos conceptions fondamentales des phénomènes physiques.

En dehors des procédés analytiques, la science découvre encore autrement les rapports numériques des phénomènes. Souvent établit-elle

empiriquement des séries de ces rapports entre deux ou plusieurs phénomènes, dont l'image est donnée par des courbes, abaques ou autres figures nomographiques. Ceci a couramment lieu dans toutes les sciences basées sur des méthodes statistiques. Les connaissances que nous en tirons sont généralement moins rigoureuses que celles obtenues analytiquement, car dans la plupart des cas les séries des données empiriques sont discontinues, et ce n'est qu'en recourant aux procédés d'interpolation (ou d'extrapolation) que nous attribuons à ces courbes et abaques une continuité hypothétique.

Un des objets de la mathématique appliquée est de déceler les fonctions analytiques dont les courbes et abaques ne sont que des images plus ou moins imparfaites. Cette branche importante de la mathématique appliquée a pris naissance dans certains travaux de Newton, et s'est grandement développée dès lors.

IV

Faut-il croire qu'un jour la loi du Nombre subjuguera l'ensemble de nos connaissances sans exception aucune? Déjà les anciens Pythagoriciens se rendaient compte que cette loi n'est pas absolue, ni universelle. Ils discernaient nettement les phénomènes sujets au Nombre et partant les plus accessibles à notre compréhension, des phénomènes qui lui échappent et par conséquent accessibles uniquement à nos sens ou seulement à notre conscience.

Discernement remarquable. Nous pouvons cependant autrement énoncer l'idée pythagoricienne, sous une forme encore plus simple et plus précise, notamment : *la loi du Nombre régit les phénomènes mesurables*. Cet énoncé renferme la loi et sa restriction. Les phénomènes « uniquement » accessibles à nos sens ou à notre conscience ne sont pas mesurables, et partant échappent à la loi du Nombre. En effet, nos sens ne sont guère des instruments de mesure et sont incapables de nous renseigner sur le rapport de deux sensations semblables. Même les mesures les plus communes, celles de longueur, ne peuvent être relevées uniquement par notre vue, et nous devons forcément recourir à des règles. Nos sens nous

procurent des connaissances qualitatives, mais non pas quantitatives. Tout au plus permettent-ils d'établir un lien d'inégalité entre deux sensations et d'affirmer que le corps A est « plus » chaud que le corps B, mais ils ne les lient par aucune égalité et ne les mesurent pas. Or, d'après notre énoncé la mesure des phénomènes est la condition nécessaire pour que la loi du Nombre les régit. Nous aurions tout ignoré de la Thermodynamique si la chaleur était « uniquement » accessible à nos sens; heureusement la chaleur se manifeste encore dans beaucoup d'autres phénomènes parfaitement mesurables, par exemple, dans l'accroissement du volume du mercure dans le thermomètre.

Cependant nous n'allons point affirmer que les phénomènes non-mesurables ne se prêtent pas à des études. Il est au contraire indéniable qu'il existe des sciences basées uniquement sur des données de nos sens et de notre conscience. Elles portent le signe caractéristique de toute science — la découverte des certitudes auparavant inconnues et, ce qui en résulte, la faculté de prévoir. Ces sciences nous renseignent, non seulement sur la diversité qualitative des phénomènes, mais encore sur le « lien fonctionnel » entre des phénomènes de qualités différentes. Toutefois, contrairement aux sciences régies par la loi du Nombre, les sciences soustraites à cette loi sont *incapables de préciser le lien fonctionnel* entre deux phénomènes hétérogènes, ainsi que de *préciser le rapport* entre deux phénomènes de même qualité. Tout au plus peuvent-elles traduire ce rapport par une relation d'inégalité.

Au point de vue méthodologique, il existe un immense écart entre ces deux catégories de sciences : les unes recourent à des sentiers étroits, sinueux et incertains, les autres empruntent la voie royale qui mène tout droit et avec le minimum de fatigue vers le but final — la Vérité.

Ainsi pour acquérir la connaissance d'un phénomène il faut toujours *essayer d'apprendre à le mesurer*, et cela en explorant soigneusement toutes ses manifestations en dehors de nos sens et que nous découvrons à l'aide des instruments. Il est hors de doute que la biologie, la psychologie et tant d'autres sciences révéleront au monde beaucoup de leurs secrets le jour où la loi du Nombre leur sera suffisamment imposée.

Heureusement l'expansion du « royaume du Nombre » est en pleine marche, elle conquiert constamment de nouveaux domaines précédemment

incultes, elle s'étend même aux merveilleux phénomènes de notre vie spirituelle. Mais ce processus d'expansion ne sera jamais achevé, et sa dernière limite nous reste cachée.

Si cependant cela ne dépendait que de nous-mêmes, nous aurions certainement souhaité que le scalpel des mathématiciens ne dénude jamais certains coins mystérieux de notre âme, et que l'exploration de ces derniers demeure éternellement réservée aux artistes, aux poètes, aux métaphysiciens.

V

Nous avons parcouru quelques étapes remarquables dans l'évolution de nos connaissances sur la nature des nombres et sur les rapports de ces derniers, dont les rapports des choses ne sont que le reflet plus ou moins imparfait. Or l'idée pythagoricienne du Nombre, telle que nous l'entendons, se manifeste encore autrement dans l'évolution de nos connaissances.

Certaines de celles-ci sont *quantitatives* et s'expriment par des formules d'égalité ou d'inégalité dépourvues de constantes physiques. D'autres, par contre, portent sur le discernement *qualitatif* des choses, perceptible uniquement par nos sens ou notre conscience. Les catégories des choses de « qualité » nettement différente, que nous dénommons dans la suite « phénomènes premiers », peuvent être liées fonctionnellement entre elles à l'aide des constantes physiques. Ainsi, par exemple, la masse d'un corps et la force de sa gravitation terrestre (son poids) sont des phénomènes premiers, quoique leur lien fonctionnel comportant une constante physique est rigoureusement précisé.

Or l'histoire mouvementée des sciences abonde en découvertes qui ont réduit deux ou plusieurs phénomènes premiers à un seul, dont les précédents ne sont que des variétés numériques.

Newton a identifié la mécanique céleste avec la mécanique terrestre.

Maxwell et ses illustres continuateurs ont montré que les phénomènes d'électro-magnétisme, de rayonnement lumineux, ultracourt, X, cosmique et autres ne sont que des manifestations des mêmes ondes mais à longueurs différentes.

Einstein a identifié la matière avec l'énergie et en a précisé rigoureusement le lien fonctionnel. Ce qui est à l'origine et demeure à la base de la physique nucléaire qui est en train de révolutionner toute notre existence.

Rappelons enfin la conception classique des éléments chimiques dont l'individualité indestructible a été établie par Lavoisier, Proust, Dalton, et définitivement consacrée, semblait-il, par le génial Tableau de Mendeleïev. Or cette conception s'écroule devant nos yeux. La science moderne conçoit tous les éléments chimiques comme de simples combinaisons des mêmes protons et électrons, soit en état libre, soit combinés en neutrons.

Arriverons-nous un jour à connaître l'unique et dernier phénomène premier, la « cause des causes » ? ou bien l'ensemble des derniers et irréductibles phénomènes premiers ? Nous l'ignorons, et l'ignorons probablement toujours.

Nous résumons. La philosophie de Pythagore ignore la *nature* des choses en soi, mais elle nous fait connaître les *rapports* des choses, seules d'ailleurs accessibles à notre compréhension. Ces rapports obéissent aux lois inexorables de la mathématique. D'abord la science de l'espace, la géométrie, ensuite les sciences physiques proprement dites, puis de nombreuses autres sciences basées sur des données mesurables, deviennent de plus en plus des branches de la mathématique appliquée. Ainsi la philosophie de Pythagore a tracé le grand et éternel chemin sans fin du progrès scientifique.

BORIS KAHANOFF.