

Vogt, H.: Haben die alten Inder den Pythagoreischen Lehrsatz und das Irrationale gekannt? Bibl. math. 7 ('06/07) S. 6—23.

Die Inder haben in einer Zeit, für die griechischer Einfluß noch nicht in Frage kommt, den Pythagoreischen Lehrsatz allgemein aufgestellt, ihn aber nur durch unvollständige Induktion begründet. Sie haben einen vorzüglichen Näherungswert für $\sqrt{2}$, dessen Fehler nur

Haben die alten Inder den Pythagoreischen Lehrsatz und das Irrationale gekannt?

Von HEINRICH VOGT in Breslau.

Die in den Jahren 1901 und 1902 erfolgte Veröffentlichung und Erläuterung des *APASTAMBA-Sulba-Sutra*,¹⁾ einer der drei Aufzeichnungen der ältesten geometrischen, kultischen Zwecken dienenden Konstruktionsmethoden der Inder, hat einen Umschwung in der Wertung der ältesten indischen Geometrie herbeigeführt, dem M. CANTOR im Archiv der Mathematik und Physik (83, 1905, S. 63—72) Ausdruck gegeben hat.

Gerade CANTOR hatte 30 Jahre lang durch sein großes Ansehen den Glauben an die Abhängigkeit der indischen Geometrie von der griechischen aufrecht erhalten. Er hatte sich seine Ansicht gebildet im Gegensatz gegen die von THIBAUT aufgestellte Schätzung der indischen Geometrie als eines selbständigen und uralten Ausflusses indischer Geistesart. THIBAUT hatte das *BAUDHAYANA-Sulvasutra* mit Übersetzung und Kommentar herausgegeben²⁾ und aus allen drei *Sulbasutren*, deren Verfasser BAUDHAYANA, APASTAMPA, KATYAYANA heißen, einen vergleichenden, sehr eingehenden Auszug höchst planvoll und durchsichtig zusammengestellt,³⁾ mit fortlaufendem Kommentar versehen und sein Urteil über das Alter und die Selbständigkeit der Geometrie der Inder aus inneren Gründen hergeleitet.

Weder THIBAUT noch der viel weiter gehende VON SCHROEDER⁴⁾ drangen mit ihren Ansichten durch: den Umschwung herbeizuführen war erst BÜRK beschieden.

BÜRK veröffentlicht das *APASTAMBA-Sulba-Sutra* vollständig in Übersetzung,⁵⁾ führt die innerlichen Gründe THIBAUTS weiter aus und fügt

1) ALBERT BÜRK, *Das APASTAMBA-Sulba-Sutra*; Zeitschrift der Deutschen Morgenländischen Gesellschaft 55, 1901, S. 543—591; 56, 1902, S. 327—391.

2) The Pandit, a monthly journal of the Benares college devoted to Sanskrit literature (Benares), 9—10, 1875.

3) Journal of the Asiatic Society of Bengal (Calcutta), 44: 1, 1875.

4) VON SCHROEDER, *Pythagoras und die Inder* (Leipzig 1884).

5) a. a. O., 56.

Haben die alten Inder den Pythagoreischen Lehrsatz und das Irrationale gekannt? 7

ihnen neue, philologische Argumente hinzu.¹⁾ Er bestätigt und stützt seine Schlüsse, geht aber auch in wesentlichen Punkten über ihn hinaus in dem, was er den alten Indern zu- und den Griechen abspricht.

Die altindische Geometrie ist jetzt ihrer Art nach als selbständig, an Alter der griechischen überlegen erkannt. Die Blütezeit des Opferkults, an den sie geknüpft ist, schließt das 12. vorchristliche Jahrhundert ein; ein Beispiel eines Pythagoreischen Dreiecks (15, 36, 39) ist aus dem 8. Jahrhundert überliefert; die *Sulbasutren* werden nicht später als in das 5. oder 4. vorchristliche Jahrhundert gesetzt.²⁾ Also die Griechen sind bestimmt nicht, wie man bisher angenommen hatte, die Lehrmeister der Inder gewesen.

Können nun umgekehrt, was zeitlich nicht unmöglich wäre, die Griechen von den Indern gelernt haben? Können sie speziell den Pythagoreischen Lehrsatz und das Irrationale aus indischen Quellen geschöpft haben?

Diese Frage will ich im folgenden durch Untersuchung der Grenzen des altindischen geometrischen Wissens zu beantworten suchen.

I.

Haben die alten Inder den Pythagoreischen Lehrsatz gekannt? *APASTAMBA-Sulba-Sutra* cap. I, 4 und 5 lauten:

1. „Die Diagonale eines Rechtecks bringt beides hervor, was die längere und die kürzere Seite desselben, jede für sich, hervorbringen.“
2. „Die Diagonale eines Quadrats bringt eine doppelt so große Fläche hervor.“

Wer diese beiden Sätze liest, wird nicht anstehen, die obige Frage zu bejahen.

Aber vertiefen wir die Frage: Welchen Grad von Einsicht in die Gültigkeit dieser Sätze haben die Inder besessen? Waren es empirische Regeln, von deren Gründen und deren Gültigkeitsbereich man keine Kenntnis besitzt, oder offenbart sich in ihnen ein auf Gründen der Anschauung oder des Denkens beruhendes, den Umfang der Gültigkeit nach dem Umfange der Erkenntnisgründe abgrenzendes Wissen?

Satz 2 ist selbst ein Einzelfall. Er ist vollständig erkennbar aus einer Figur wie der bekannten aus dem PLATONischen Dialog *MEGON*, wo 4 Quadrate zu einem großen Quadrate zusammengeshoben sind und in jedem Einzelquadrat diejenige Diagonale gezogen ist, welche nicht nach

1) a. a. O., 55. — 2) BÜRK, a. a. O., 55, S. 544, 553, 556, 551.

der Mitte der ganzen Figur läuft. BÜRK macht es durchaus wahrscheinlich, daß auch für die Inder die Anschauung dieser Figur ohne logische Deduktion die volle Einsicht in die Beziehung zwischen Quadrat über der Seite und Quadrat über der Diagonale geliefert hat.

Bedenkt man, was HANKEL, THIBAUT und BÜRK überzeugend betonen, und was ein Blick in die *Sulbasutren* bestätigt, „das Vorwiegen der unmittelbaren Anschauung in der Entwicklung der Geometrie der Inder, welches einen so merkwürdigen Gegensatz bildet gegen die durch Begriffe vermittelte Konstruktion der Sätze bei den Griechen“;¹⁾ nimmt man hinzu, daß die *Sulbasutren* und die ihnen dienende Geometrie rein praktische Zwecke verfolgen, so wird man die Gedankengänge, die zur Auffindung des Satzes vom Quadrat über der Rechtecksdiagonale geführt haben, sich ganz empirisch und anschaulich denken müssen. Es dürfte deshalb der BÜRKsche Rekonstruktionsversuch, welcher in ausgiebiger Weise das Umliegen von Gnomonen um ein vorhandenes Quadrat mit ganzzahliger Seite benutzt, auf allgemeine Zustimmung rechnen.²⁾ So können die Inder in Verbindung mit der vorher erkannten Eigenschaft der Quadratdiagonale und der vielleicht schon vorher bekannten Rechtwinkligkeit des Dreiecks 3, 4, 5 empirisch auf einen Zusammenhang zwischen der Rechtwinkligkeit gewisser ganzzahliger Dreiecke und der Tatsache gekommen sein, daß gerade in diesen Dreiecken das Quadrat über einer Seite gleich der Summe der Quadrate über den beiden andern ist. In den *Sulbasutren* finden sich im ganzen 8 solche Dreiecks- resp. Rechteckszahlen angeführt, nämlich 3, 4, 5; 5, 12, 13; 8, 15, 17; 12, 16, 20; 7, 24, 25; 15, 20, 25; 12, 35, 37; 15, 36, 39.

Wie wenig systematisch das Auffinden dieser Rechtecke erfolgt ist, läßt sich auch daraus ersehen, daß, wenn man bis zur größten benutzten Diagonale 39 gehen will, ein systematisches Verfahren im ganzen nicht 8, sondern 15 ganzzahlige Rechtecke liefern würde, nämlich außer den angegebenen noch 6, 8, 10; 9, 12, 15; 10, 24, 26; 20, 21, 29; 18, 24, 30; 16, 30, 34; 21, 28, 35. Gerade nach der von BÜRK rekonstruierten geometrischen und abzählenden Methode ist Vollständigkeit keineswegs verbürgt und Übersehen mancher Fälle wohl möglich. Auch ist sehr einleuchtend, daß die alten Inder Gnomonen von der Breite 6 (für 18, 24, 30), von der Breite 7 (für 21, 28, 35), von der Breite 8 (für 20, 21, 29) nicht erkannten, da sie eben nur bis zur Breite 5 (für 15, 20, 25) fortschritten. Auffällig dagegen und nur durch unsystematisches Verfahren und das rein praktische, nicht auf theoretische Vollständigkeit gerichtete

Haben die alten Inder den Pythagoreischen Lehrsatz und das Irrationale gekannt? 9

Interesse zu erklären ist, daß sie die schmäleren Gnomonen für 6, 8, 10; 10, 24, 25; 9, 12, 15, 16, 30, 34 übersahen.

Daß die Inder nicht noch andere, tiefer gehende Begründungen für ihren Rechteckssatz besaßen, scheint mir zweifellos aus *BAUDHAYANA-Sulba-Sutra*¹⁾ hervorzugehen. BAUDHAYANA, der von den drei Sutra-verfassern am meisten Sinn für Begründung hat, der ungenaue, von den andern überlieferte Methoden nicht hat und genaue Methoden bevorzugt, der somit wohl am meisten mathematisch von den Dreien denkt, und den THIBAUT²⁾ nennt „entitled to the first place by a clearer and more extensive treatment of the topics in question“, fügt allein von ihnen an den Rechteckssatz die Bemerkung: „This is seen in those oblongs the sides of which are three and four, twelve and five, fifteen and eight, seven and twenty-four, twelve and thirty-five, fifteen and thirty-six.“

- CANTOR³⁾ nennt dies „den Pythagoreischen Lehrsatz, erläutert an Zahlenbeispielen“. Dem Wortlaut nach ist es mehr als eine „Erläuterung“; es ist, wenn man auch nach BÜRK in den *Sulbasutren* einen Beweis nicht suchen darf,⁴⁾ eben das, was BAUDHAYANA als „Beweis“ für den vorangehenden Lehrsatz zu geben hat.

Das ist auch die Auffassung THIBAUTS. Im Anschluß an die Parallelstelle APASTAMBAS: „So many cognizable measurements of the vedi (Altar) exist“,⁵⁾ sagt er:⁶⁾ „In this manner APASTAMPA turns the Pythagorean triangles known to him to a practical use, but after all BAUDHAYANA's way of mentioning these triangles as proving his proposition about the diagonal of an oblong is more judicious. It was no practical want which could have given the impulse to such a research — for right angles could be drawn as soon as one of the „vijñeya“⁷⁾ oblongs (for instance that of 3, 4, 5) was known — but the want of some proof which might establish a firm conviction of the truth of the proposition.“

Wir sehen: Über gewisse Einzelfälle von ganzzahligen Rechtecken (auf einige mehr oder weniger kommt es nicht an) hat die indische Betrachtung nicht hinausgeführt und hat ihrer Natur nach nicht darüber hinaus führen können.

Auch der Umstand, daß die Sutren den Quadratsatz stets von dem Rechteckssatz trennen, in dem er bei allgemeiner Auffassung doch enthalten ist, hat wohl seine Ursache darin, daß die Erkenntnisgründe für beide Sätze ganz verschieden waren, daß also für den Rechteckssatz kein allgemeiner Anschauungsbeweis vorlag wie für den Quadratsatz.

1. THIBAUT, *Journal* S. 235. — 2. *Journal* S. 228.

3. CANTOR, *Geschichte der Mathem.* I². S. 538 (= I¹, S. 544).

4. BÜRK, a. a. O. 55, 1901, S. 555. — 5) Vergl. BÜRK, a. a. O. 56, 1902, S. 341.

6) *Journal*, S. 238. — 7) „erkennbare“.

1) HANKEL, *Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter*, S. 220.

2) BÜRK, a. a. O. 55, S. 560–575. — CANTOR, a. a. O. S. 67–69.

Nun könnte man meinen, die Inder haben den Rechteckssatz zwar formell allgemein ausgesprochen, inhaltlich aber darunter nur die bekannten ganzzahligen Fälle begriffen.

Das aber ist bestimmt nicht der Fall. Zwar werden zur Konstruktion des rechten Winkels nur die ganzzahligen Rechtecke benutzt, aber APASTAMPA fügt an die Aufzählung dieser Möglichkeiten die schon oben zitierte Bemerkung (cap. V, 6) „so viele erkennbare Konstruktionen der vedi (Altäre) gibt es“, d. h. so viele ganzzahlige Rechtecke sind vorhanden und können zur Konstruktion rechtwinkliger Altäre benutzt werden. Es liegt hierin erstens das Eingeständnis, daß der Verfasser mehr ganzzahlige Rechtecke nicht kennt, und zweitens setzt die Einschränkung der Brauchbarkeit des Rechteckssatzes zu Konstruktionen auf die „erkennbaren“ Rechtecke die Annahme voraus, daß der Satz auch für „nicht erkennbare“ Rechtecke“, d. h. Rechtecke mit nicht ganzzahligen Seiten und Diagonalen gilt.

Dies findet seine Unterstützung darin, daß der Rechteckssatz ganz geläufig zur Addition und Subtraktion von Quadraten ohne Rücksicht auf ihre Seitengrößen benutzt wird, und daß speziell die trikarani, d. h. die Seite eines Quadrats, welches 3 Flächeneinheiten enthält, hergestellt wird als Diagonale eines Rechtecks, dessen kürzere Seite die Einheit und dessen längere Seite die Diagonale des Einheitsquadrates ist.

Also die alten Inder haben den Rechteckssatz ganz allgemein und ohne Einschränkung ausgesprochen und verwendet; aber ihr Erkenntnisgrund ist kein anderer, als daß in einigen ganzzahligen Fällen Rechtwinkligkeit und Gleichheit zwischen der Quadratsumme der Seiten und dem Quadrat der Diagonale zusammentreffen. Hieraus wird durch unvollständige Induktion geschlossen, daß die Eigenschaft der Quadratsumme stets die Rechtwinkligkeit zur Folge hat, und umgekehrt.

Auch die Induktion und selbst die unvollständige Induktion hat ihren berechtigten Platz in der Geometrie, aber nur als Werkzeug der Erfindung, nicht als endgültiger Erkenntnisgrund. Sie kann auf Wahres wie auf Falsches führen und gibt einer Einsicht keine Notwendigkeit und Allgemeinheit. Das gesteht selbst SCHOPENHAUER zu, der Feind des griechischen diskursiven Denkens, der Freund der indischen Intuition, der stets angerufene Eidshelfer für die Inder gegen die Griechen:¹⁾ „Diese letztere Art der Erkenntnis ist immer nur Induktion, d. h. aus vielen Folgen, die auf einen Grund deuten, wird der Grund als gewiß angenommen; da die Fälle aber nie vollständig beisammen sein können, so ist die Wahrheit hier auch nie unbedingt gewiß. Diese Art von Wahrheit allein aber hat alle Erkenntnis durch sinnliche Anschauung und die allermeiste Erfahrung.“

1) SCHOPENHAUER, *Welt als Wille und Vorstellung* (Werke 1, Buch 1, § 15).

Der wahre Wert des Pythagoreischen Lehrsatzes bei den Indern ist der eines an einigen Einzelfällen glücklich erratenen Zusammenhanges. Wenn sie diesen Zusammenhang als allgemein gültig aussprechen und verwerten, so dürfen wir uns dadurch über die Tragweite ihrer Erkenntnis nicht täuschen lassen: wir erkennen daran nur, daß die alten Inder, mögen wir ihrem intuitiven Spürsinn mit SCHOPENHAUER, HANKEL und VON SCHROEDER jede Bewunderung zollen, doch vom Wesen des geometrischen Denkens und Erkennens sehr weit entfernt waren.

II.

Haben die alten Inder das Wesen des Irrationalen erkannt; d. h. haben sie, wenn auch nur an einer Zahl oder einem Verhältnis erkannt, daß es durch ganze Zahlen und Brüche nicht genau ausgedrückt werden kann?

Den Weg zur Auffindung des Irrationalen schildert CANTOR folgendermaßen:¹⁾ „Die Hypotenuse (des gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreiecks mit der Kathete 1) wurde gemessen. Sie war größer als eine, kleiner als zwei Längeneinheiten. Die mannigfaltigsten Versuche mögen darauf angestellt, andere und andere Zahlenwerte für die gleichen Katheten eingesetzt worden sein, um eine Zahl für die Hypotenuse zu erhalten Vergebens. Man erhielt wahrscheinlich Zahlen, die dem gesuchten Maße der Hypotenuse nahe kamen; Näherungswerte von $\sqrt{2}$ würden wir sagen.“ Also der erste Schritt ist: man erhält Werte, deren Ungenauigkeit man sich bewußt ist.

CANTOR fährt fort: „Aber es war noch ein Riesenschritt, von der Fruchtlosigkeit der angestellten Versuche auf die aller Versuche überhaupt zu schließen“. Dieser zweite Schritt, in dem man aber statt „schließen“ „vermuten“ sagen sollte, ist gewiß der größte und der eigentliche schöpferische Gedanke, durch den die Idee des Irrationalen ins Bewußtsein tritt. Diesen Schritt hat z. B. ARCHIMEDES getan, indem er auf Grund der vorangegangenen verfehlten Versuche die genaue Rektifikation des Kreises für unmöglich hielt und sich systematisch auf Näherungswerte beschränkte. Aber dieser zweite Schritt ist doch noch nicht der letzte zur Erkenntnis des Irrationalen.

Die Fruchtlosigkeit noch so vieler Versuche kann die Uplösbarkeit eines Problems wohl vermuten, aber nicht sicher erkennen lassen. Auf dem Wege des Probierens kann überhaupt kein Unmöglichkeitsbeweis geliefert werden. Für das praktische Messen, welches, wie F. KLEIN es

1) *Geschichte der Mathematik* 1², S. 169 (= 1¹, S. 154).

glücklich ausdrückt,¹⁾ dem Bereiche der „Approximationsgeometrie“ angehört, gibt es überhaupt kein Irrationales; denn jedes praktische Messen kommt mit Erreichung der Genauigkeitsgrenze zu abgeschlossenen Maßzahlen. Das Irrationale entspringt erst auf dem Boden der „Präzisionsgeometrie“ (wieder nach KLEIN), und der Nachweis der Unmöglichkeit der Rationalität kann seiner Natur nach nicht anders geführt werden als durch Abstraktionen: entweder das Messen muß unendlich fortsetzbar gedacht werden, was es praktisch nicht ist (Schema des größten gemeinschaftlichen Teilers, Kettenbruch-Algorithmus), oder die Annahme der Rationalität muß durch indirekte Schlußweise auf einen Widerspruch mit Zahlengesetzen geführt werden (Pythagoreischer Nachweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$).²⁾ Dieser Unmöglichkeitsbeweis ist der dritte Schritt; ihn hat für die Irrationalität von π erst LAMBERT, für die Transszendenz erst LINDEMANN getan.

Wie einfach denkt sich hingegen BÜRK die Entdeckung des Irrationalen! Er sagt:³⁾ „Man verglich die Diagonale mit der Seite (des Quadrats), nannte die Differenz visesa (Unterschied) und kam nach langen vergeblichen Versuchen zu der Überzeugung, daß sich eine genaue Zahl für die Diagonale nicht finden lasse. So begnügte man sich mit einem Näherungswert, dem savisesa“. Und noch deutlicher:⁴⁾ „Die Inder haben im Anschluß an ihren 1. Unterfall (den Quadratsatz) für die dvikarani (= $\sqrt{2}$) einen Näherungswert (den savisesa) aufgestellt — offenbar, nachdem sie zuvor das Irrationale entdeckt hatten“.

In Wahrheit wird sich die Entdeckung der Irrationalität, etwa der Diagonale des Quadrats, in den oben entwickelten 3 Schritten vollziehen: 1. Die durch Messen direkt erhaltenen oder daraus abgeleiteten Werte werden als ungenau erkannt, 2. es taucht die Überzeugung von der Unmöglichkeit eines genauen Wertes auf, 3. es wird der Unmöglichkeitsbeweis für die Rationalität geliefert. Wie weit sind die Inder auf diesem Wege gekommen?

Wir müssen uns vor allem hüten, unser Wissen um die Irrationalität rückwärts auf die Inder zu übertragen: Finden wir bei den Indern Werte für die Quadratdiagonale, die wir heute Näherungswerte nennen, so berechtigt uns das keineswegs zu der Annahme, daß sie diese Werte ebenfalls als Näherungswerte einer nicht genau ausdrückbaren Größe erkannt haben. Wir haben zunächst zu untersuchen, ob sie diese Werte überhaupt

Haben die alten Inder den Pythagoreischen Lehrsatz und das Irrationale gekannt? 13

für ungenau gehalten haben. Ist dies der Fall, so ist noch der Nachweis des zweiten und dritten Schrittes erforderlich. Sollten sie aber einen oder den andern Wert für genau gehalten haben, dann ist jede weitere Untersuchung überflüssig; dann haben sie das Wesen der Irrationalität bestimmt nicht erkannt.

Alle drei Sutrenverfasser geben für die Länge der Quadratdiagonale übereinstimmend an: „Man verlängere das Maß um seinen dritten Teil und diesen um seinen vierten Teil weniger $\frac{1}{34}$ dieses vierten Teils.“ Also die Diagonale $= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3.4} - \frac{1}{3.4.34}$ Seite. Der Überschuß der Diagonale über die Seite, also die Größe $\frac{1}{3} + \frac{1}{3.4} - \frac{1}{3.4.34}$ heißt visesha „Unterschied“; der ganze Ausdruck für die Diagonale heißt savisesha „mit dem Unterschied“. Der savisesha ist eine sehr gute Annäherung an den wahren Wert der Diagonale; er ist gleichwertig mit $\frac{577}{408}$, dem 8ten Näherungswert der Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{2}$.

Die Genauigkeit des savisesha-Wertes ist zu groß und seine Form ist zu eigenartig, als daß er rein empirisch gefunden sein könnte. Den wahrscheinlichen Weg der Auffindung, der beide Eigenschaften in befriedigender Weise erklärt und nicht über das geometrische Können der Inder hinausgeht, hat THIBAUT in folgender Weise rekonstruiert:¹⁾ Nimmt man an, daß die Inder auf irgend einem Wege bemerkt hatten, daß in einem Quadrat mit der Seite 12 sich die Summe der beiden Seitenquadrate $144 + 144 = 288$ d. h. das Quadrat der Diagonale nur um eine Einheit von 289, dem Quadrat von 17, unterscheidet, daß also die Diagonale annähernd $= 17$ ist,²⁾ so lag es nahe, sich die Frage vorzulegen, um welche Größe die 17 zu verkleinern sei, damit das Quadrat über dieser verkleinerten Strecke genau $= 288$, also um 1 Einheit kleiner als 289 werde. Will man das Quadrat $17^2 = 289$ nach indischer Weise um einen Gnomon $= 1$ verkleinern, so muß man diesem Gnomon die Breite $\frac{1}{34}$ geben; denn ein solcher Gnomon besteht nahezu aus zwei Rechtecken, jedes von der Fläche $17 \times \frac{1}{34} = \frac{1}{2}$. Man wird also für das Quadrat mit der Seite 12 die gesuchte Diagonalgröße $17 - \frac{1}{34} = 12 + 4 + 1 - \frac{1}{34}$ erhalten, welche Größe, auf die Einheit als Seite reduziert, nichts anderes ist als der savisesha $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3.4} - \frac{1}{3.4.34}$.

1) FELIX KLEIN, *Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, eine Revision der Prinzipien* (Leipzig 1902).

2) CANTOR, *Geschichte der Mathematik* 1², S. 170 (= 1¹, S. 155).

3) a. a. O. 55, S. 557, Anm. 1. — 4) a. a. O. 55, S. 575, Anm. 1.

1) THIBAUT, *Journal*, S. 239—241.

2) Vergl. die $\delta\eta\eta\eta\ \delta\acute{\iota}\alpha\mu\eta\tau\epsilon\omicron\varsigma$ der Griechen: FR. HULTSCH, *Biblioth. Mathem.* 1, 1900, S. 8—12.

Haben die Sutrenverfasser den savisesha für einen genauen oder einen ungenauen Wert der Diagonale gehalten?

Eine direkte Andeutung, daß savisesha in anderem Sinne ein Zahlenwert sei wie andere bestimmte Werte, findet sich in keiner der 3 Sutren. So stehen bei APASTAMBA vollständig gleichberechtigt, ohne Andeutung eines Gültigkeitsunterschiedes hintereinander die Sätze (I, 5 und 6): „Die Diagonale eines Quadrats bringt eine doppelt so große Fläche hervor. Das Quadrat dvikarani 'die das doppelte hervorbringende.'“ Und „man verlängere das Maß um seinen dritten Teil und diesen um seinen vierten Teil, weniger $\frac{1}{34}$ dieses Teils. savisesha 'mit dem Unterschied'“.

Woran will man erkennen, daß der erste Satz eine absolute Wahrheit, der zweite eine bewußte Annäherung ausdrückt?

Ja, wenn man für die Differenz zwischen Diagonale und Seite ein eigenes technisches Wort visesha, „Unterschied“, und für die um diese Differenz vergrößerte Seite ein zweites savisesha, „mit dem Unterschied“, prägte, so deutet dies wohl positiv auf das Bewußtsein einer genauen Erkenntnis hin. Wie sollte man eine ungenaue Hinzufügung, deren Ersetzbarkeit durch eine bessere man sich bewußt wäre, durch einen eigenen Namen fixieren? Weiter: Nach BAUDHYANA¹⁾ wird die Längeneinheit pradesa in 12 anguli (Fingerbreiten) geteilt, 1 anguli aber in 8 yaasv (Gerstenkörner) oder auch in 34 tilas (Sesamkörner).²⁾ Von dieser letzteren Teilung sagt THIBAUT:³⁾ „I have no doubt that the second division which I have not elsewhere met, owns its origin to the savisesha“. In der Tat: ist die Quadratseite 1 pradesa = 12 anguli, so ist die Diagonale nach der savisesha-Regel = 17 anguli weniger 1 tila = 16 anguli 33 tilas, also mit diesen Maßen ganzzahlig ausdrückbar. Ist es denkbar, daß man eine so dauernde Einrichtung, wie die Unterteilung der Maßeinheit und Benennung der Unterteile mit festen Namen, treffen sollte zu Liebe einer Ausmessung, die man selbst für ungenau und wandelbar hält?

Man könnte einwerfen: Die oben nach THIBAUT gegebene, sehr wahrscheinliche Herleitung des savisesha ist tatsächlich ungenau; sie setzt zwei Rechtecke von der Länge 17 und der Breite $\frac{1}{34}$, welche zusammen = 1 sind, gleich dem Gnomon von der äußeren Seite 17 und der Breite $\frac{1}{34}$, während tatsächlich dieser Gnomon um ein Quadrat von der Seitenlänge $\frac{1}{34}$, also der Fläche $\frac{1}{1156}$ kleiner ist als die Summe der

1) THIBAUT, Journal, S. 241. — 2) Pandit 9, S. 293.

3) a. a. O., S. 241.

beiden Rechtecke. Waren die Meßmethoden und die Denkart der alten Inder so wenig scharf, daß sie diesen Unterschied gänzlich übersehen und den gefundenen savisesha-Wert für genau halten konnten?

Wir müssen unterscheiden: Wenn wirklich, was wahrscheinlich, aber doch nicht sicher ist, die savisesha-Regel auf dem oben nach THIBAUT gekennzeichneten Wege aufgefunden worden ist, so konnte der Entdecker sehr wohl bemerken, welche Vernachlässigung er beging; denn die genaue Auswertung eines Gnomon lag durchaus im Gesichtskreise altindischer Geometrie und wurde gewohnheitsmäßig ausgeübt.

THIBAUT sagt:¹⁾ „but we must remember that they were interested in geometrical truths only as far as they were of practical use, and that they accordingly gave to them the most practical expression“. So trieb auch den Entdecker des savisesha gewiß nicht theoretisches, sondern praktisches Interesse. Praktisch war die begangene Vernachlässigung gänzlich belanglos; so wurde der savisesha als strenge Regel überliefert; ob mit oder ohne Bewußtsein der Abweichung von der Genauigkeit, ist nicht zu entscheiden.²⁾ Die späteren Geometer, welche nach dieser Regel arbeiteten, konnten nach ihrer Denkweise und nach den Genauigkeitsgrenzen ihrer Meßmethoden gar nicht auf den Gedanken kommen, daß hier eine Regel in anderem Sinne vorliege wie die übrigen Überlieferungen.

Die savisesha-Regel liefert bei einem Quadrat von 10 Metern Seitenlänge die Diagonale um $\frac{1}{16}$ Millimeter zu groß. Die Inder maßen auf dem Erdboden ihre Altäre mit eingeschlagenen Pfählen und daran gespannten Seilen aus; schwerlich dürfte diese Methode eine größere Genauigkeit als allenfalls Zentimeter verbürgen. Wie sollten in ihnen Zweifel an der Genauigkeit des savisesha aufsteigen, deren theoretischer Fehler weit unterhalb der Grenzen ihrer Genauigkeit blieb?

Nur wenige ihrer Regeln, z. B. der Satz von der Diagonale des Quadrats, der Satz $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, der Gnomonsatz, das Senkrechteerrichten durch 2 gleichschenklige Dreiecke hatten einen allgemein anschaulichen Charakter; die allermeisten, z. B. wie oben nachgewiesen, der Satz von der Diagonale des Rechtecks beruhten auf Ausmessung in Einzelfällen und wurden für allgemein gültig gehalten, wenn die Messung keinen Fehler erkennen ließ. Warum sollten sie über savisesha anders denken? Wir können nicht erwarten, daß sie die Genauigkeit dieser Regel ausdrücklich versichern, wenn sie gar keinen Grund hatten, an ihr zu zweifeln.

1) a. a. O., S. 232.

2) Vergl. die unten (S. 17) zitierte Bemerkung BÜCKS zu der ungenauen Vergrößerung des $7\frac{1}{2}$ fachen Altars.

Sehen wir an einigen Beispielen zu, was für Regeln die alten Inder für genau halten konnten! APASTAMBA gibt cap. III, 1 die Vorschrift: „Wünscht man ein Quadrat in ein Rechteck zu verwandeln, so mache man eine Seite so lang, wie man das Rechteck wünscht. Darauf füge man den Rest hinzu, wie es paßt.“

Alle drei Sutrenverfasser verwandeln ein Quadrat in einen Kreis, indem sie um den Mittelpunkt einen Kreis schlagen, welcher zum Radius die halbe Seite hat, vermehrt um $\frac{1}{6}$ der Differenz zwischen der halben Diagonale und der halben Seite; also $r = \frac{a}{3} + \frac{a}{6} \sqrt{2}$. APASTAMBA (III, 2) fügt dieser Regel, welche nicht schlecht, aber doch viel ungenauer als die savisesha-Regel ist (es wird $\pi = 3,09$ gesetzt), die Versicherung der Genauigkeit bei: „Diese“ (Schnur) „gibt einen Kreis, genau. Soviel als“ (an den Ecken) „verloren geht, kommt“ (an den Seiten des Quadrats) „hinzu“.

Alle 3 Sutrenverfasser geben als Seite eines einem gegebenen Kreise flächengleichen Quadrats $\frac{1}{2}$ des Kreisdurchmessers an. APASTAMBA versichert wiederum für diese Quadratur (es ist $\pi = 3$ gesetzt!) die Genauigkeit (III, 3): „Die“ (Schnur) „gibt ein Quadrat, genau“ (so groß wie der Kreis).

Eine Hauptform der indischen Altäre ist der falkenförmige oder sogenannte siebenfache: Er besteht aus 7 ganzen Quadraten, von denen 4, zu einem größeren Quadrat zusammengefügt, den Körper des Falken bilden, je ein Quadrat einen Flügel und den Schwanz; jeder Flügel aber ist um $\frac{1}{4}$ Längeneinheit, der Schwanz um $\frac{1}{8}$ Längeneinheit verlängert, so daß zu den 7 ganzen Quadraten noch 2 Fünftel und 1 Zehntel Einheitsquadrat, im ganzen also $\frac{1}{2}$ Quadrat hinzukommt, und der ganze Altar $7\frac{1}{2}$ Quadrateinheiten enthält. Es ist nun eine Fundamentalaufgabe, diesen Altar um 1 Quadrateinheit zu vergrößern, ohne seine Gestalt zu verändern. APASTAMBA-Sulba-Sutra III, 6: „Was beim 8fachen . . . von dem 7fachen verschieden ist, teile man in 7 Teile und lasse in jeden purusa“ (Quadrat-einheit des 7fachen Altars) „1 Teil eingehen, weil eine Veränderung der Gestalt nicht schriftgemäß wäre“. Also es wird die hinzuzufügende Quadrateinheit in 7 gleiche Teile geteilt und neue Quadrate gebildet, von denen jedes $1\frac{1}{7}$ Einheiten enthält. 7 solche neue Quadrate bilden den Körper, den Stamm der Flügel und des Schwanzes für den neuen Falkenaltar und enthalten somit 8 Quadrateinheiten. Die Verlängerungen der Flügel und des Schwanzes aber bekamen die alte Breite von $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{8}$ ursprünglichen Längeneinheiten. So bleibt trotz der kultischen Vorschrift praktisch weder die Gestalt des Falkenaltars unverändert, noch ist die Flächengröße genau $8\frac{1}{2}$ Quadrateinheiten. Die Vernachlässigung beträgt

Haben die alten Inder den Pythagoreischen Lehrsatz und das Irrationale gekannt? 17

0,047 Quadrateinheiten, also wiederum viel mehr als der Fehler des savisesha. BÜRK bemerkt¹⁾ hierzu: „Die Frage, wie groß der Inhalt eines vergrößerten agni (Altars) genau, d. h. alles — auch jene Verlängerungen — eingerechnet sei, hat unsern Sutra-Verfasser nicht beschäftigt“.

Bei dem Vorhandensein aller dieser groben Vernachlässigungen scheint es mir unmöglich, den alten Indern und speziell den Sutraverfassern gerade gegen den savisesha eine ganz unerhörte Feinfühligkeit zuzutrauen.

Doch ist nicht zu übersehen, daß die drei Sutrenverfasser sich ungenauen Konstruktionen gegenüber recht verschieden verhalten: besonders tritt der Unterschied zwischen BAUDHAYANA und APASTAMBA auch hierin hervor.²⁾

BAUDHAYANA vermehrt den $7\frac{1}{2}$ -fachen Altar um 1 Einheit richtig mit voller Wahrung der Gestalt; indem er nämlich jedes der 7 Quadrate in Körper, Flügeln und Schwanz um $\frac{1}{16}$ Einheitsquadrat vergrößert und auf diese Weise $\frac{1}{16}$ der Vermehrung für die Verlängerungen von Flügeln und Schwanz übrig behält.³⁾ Einen ganz besonderen Beweis seines kritischen Geistes gibt er, indem er die zur Quadratur des Kreises verwendeten $\frac{1}{2}$ des Durchmessers, deren Genauigkeit APASTAMBA versichert, „the gross side of the square“ nennt;⁴⁾ eine Kritik, die in den Sulbasutren wohl einzig dastehen dürfte. Er allein geht im Gegensatz zu dieser als „grob“ erkannten Quadratur des Kreises eine genauere Quadratseite an $= \frac{7}{8} + \frac{1}{8.29} - \frac{1}{8.29.6} + \frac{1}{8.29.6.8}$ des Durchmessers. Wie THIBAUT überzeugend nachweist,⁵⁾ ist diese Formel die Umkehrung der in allen 3 Sulbasutren enthaltenen, oben⁶⁾ angegebenen Regel für Verwandlung des Quadrats in einen Kreis; und zwar hat BAUDHAYANA für diese Umkehrung, welche nicht anders als rechnerisch gemacht werden konnte, nach THIBAUT zum Ausdruck der Quadratdiagonale die savisesha-Regel benutzt.

BAUDHAYANA benutzt den savisesha allein zu diesem Zweck; die anderen Sutrenverfasser zur Herstellung von rechten Winkeln und Quadraten, die Kommentatoren zur Berechnung von Diagonalen, „wo immer Diagonalen in Frage kommen“. Wenn THIBAUT diese ausgedehntere Verwendung des savisesha vom Standpunkt der Genauigkeit verwirft,⁷⁾ „this proceeding however, is not only useless, but positively wrong, as in all such cases calculation cannot vie in accuracy with geometrical construction“, so ist dem entgegenzuhalten, daß die mit savisesha berechnete

1) a. a. O. 55, S. 357. — 2) Vergl. S. 9. — 3) Pandit 10, 73.

4) Pandit 10, 21; Journal, S. 254. — 5) Journal, S. 253, 254.

6) S. 16. — 7) Journal, S. 241.

Diagonale nur um $\frac{1}{55}$ größer ist als die genaue, und der mit savisesha hergestellte rechte Winkel einen genauen rechten Winkel nur um $\frac{3}{5}$ Bogensekunden übertrifft. Diese durch die Rechnung verschuldeten Überschüsse sind weit kleiner als die unvermeidlichen Ausführungsfehler; ihr Vorhandensein wäre weder zu BAUDHAYANAS Zeit noch heute mit Meßinstrumenten festzustellen. Der Grund für den sparsamen Gebrauch des savisesha bei BAUDHAYANA kann also nicht der von THIBAUT vermutete sein. Vielleicht ist es der, daß die savisesha-Formel gerade zu dem Zwecke ersonnen ist, zu dem BAUDHAYANA sie unentbehrlich findet, nämlich zur Umrechnung der Zirkulatur des Quadrats in die Quadratur des Zirkels, und daß man erst später darauf verfallen ist, sie auch anderen Zwecken dienstbar zu machen. Es wäre dies eine Stütze der aus philologischen Gründen gemachten Annahme, daß BAUDHAYANA älter sei als APASTAMBA.¹⁾

BAUDHAYANA würde damit der Erfindung der savisesha-Regel näher gerückt werden als die anderen Sutrenverfasser. Sollte er aber, was nicht unmöglich genannt werden kann, selbst der Erfinder der Regel sein, ja, sollte er sogar ihre Ungenauigkeit erkannt haben, wogegen allerdings die gerade bei ihm sich findende Teilung der Längeneinheit in 34 Unterteile spricht, so hätte er zwar den ersten Schritt zur Entdeckung des Irrationalen getan; ihm aber auch den zweiten und dritten zuzutrauen, dafür liegt keine Spur einer Andeutung vor. Den anderen Sutrenverfassern aber dürfen wir aus der Häufung der oben dargelegten Gründe das Bewußtsein von der Ungenauigkeit des savisesha bestimmt absprechen. Ihnen ist nicht einmal jener erste Schritt geglückt. —

Die Rolle eines handgreiflichen Beweises für die Bekanntschaft der alten Inder mit dem Irrationalen haben im letzten Vierteljahrhundert die Worte dvikarani, trikarani usw. gespielt.

CANTOR sagt von den *Sulbasutren*:²⁾ „Die Auffindung der Seite eines 2, 3, 10, 40 mal so großen Quadrats, als ein gegebenes ist, geschieht durch allmähliche, sich wiederholende Anwendung des pythagoreischen Lehrsatzes ... Dabei erscheinen Namen für $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, usw. gebildet durch Zusammensetzung der Zahlwörter mit dem von uns früher (S. 581, 1. Aufl., S. 527) erörterten Worte karana (THIBAUT, S. 16),³⁾ also dvikarani = $\sqrt{2}$, trikarani = $\sqrt{3}$, daçakarani = $\sqrt{10}$, catvarinçakarani = $\sqrt{40}$ usw.“ S. 581 (527) heißt es allgemein, ohne Beziehung auf die *Sulbasutren*: „Über die Potenzbezeichnung hinaus hat sich aber der Inder auch noch zu einer Bezeichnung der irrationalen Quadratwurzel einer Zahl mit Hilfe des Wortes karana, geschrieben ka, emporzuschwingen gewußt“. Im Anschluß

1) BÜCK, a. a. O. 55, S. 552 (Hinweis auf BÜHLER).

2) *Geschichte der Mathematik* 1^a, S. 599 (= 1^a, S. 544).

3) Gemeint ist der Abdruck aus *Journal of the Asiatic society*, S. 242.

an die erste Stelle sagt VON SCHROEDER:¹⁾ „Dies ist wiederum von höchstem Interesse, denn es tritt uns hier in den *Sulbasutras* deutlich das Irrationale entgegen“.

Die CANTOR-SCHROEDERSche Beweisführung ist nicht stichhaltig; ihr Fehler liegt darin, daß CANTOR und VON SCHROEDER nicht zwischen dem Gebrauche der Worte dvikarani usw. in den *Sulbasutren* und in der späteren indischen mathematischen Literatur unterscheiden. Diese Verwechslung ist um so auffälliger, als THIBAUT, der Gewährsmann beider, die Notwendigkeit dieser Unterscheidung sehr klar und überzeugend darlegt.

Die *Sulbasutren* gehen fast ausschließlich konstruierend und messend, nicht rechnend vor: „Nothing in the sutras would justify the assumption that they were expert in long calculations“.²⁾ Dadurch unterscheiden sie sich vollständig von den späteren, 1000 bis 1500 Jahre jüngeren indischen Mathematikern, auch von ihren Kommentatoren, welche durchaus arithmetisch denken und sich bemühen, die alten geometrischen Wahrheiten, um sie sich und ihren Zeitgenossen verständlich und interessant zu machen, ins Arithmetische zu übersetzen. „A geometrical truth interests the later Indian mathematicians but in so far as it furnishes them with convenient examples for their arithmetical and algebraic rules; purely geometrical constructions, as the samāsa and nirhāra (Addition und Subtraktion) of squares, described in the *Sulvasutras*, find no place in their writings.“³⁾

Bei BHASKARA (im 12. Jahrhundert n. Chr.) heißt der spezielle Pythagoreische Lehrsatz: „Die Quadratwurzel der Quadratsumme der Seiten ist die Diagonale“. In den *Sulbasutren* aber heißt es: „Die Diagonale eines Quadrats bringt eine doppelt so große Fläche hervor“. (Die Diagonale) „des Quadrats“ (heißt darum seine) „dvikarani, die das doppelte Hervorbringende“. Das ist der rein geometrische Ausdruck derselben, von BHASKARA algebraisch ausgedrückten Tatsache: In den *Sulbasutren* bedeutet dvikarani nicht $\sqrt{2}$, sondern dvikarani ist die geometrisch konstruierte, nicht die durch Messen oder Rechnen bestimmte Seite eines Quadrats mit der Fläche 2. Jeder Zweifel ist ausgeschlossen durch die bei KATYAYANA hinzugefügte Erklärung:⁴⁾ By the expressions: karani, karani of that (of any square) etc we mean cords. Deshalb ist THIBAUTS Ausginandersetzung unanfechtbar:⁵⁾ „rajja (cord = Seil) is to be supplied to karani“ und „The side of a square being called its karani, the side of a square of

1) *PYTHAGORAS und die Inder*, S. 51. — 2) THIBAUT, *Journal*, S. 238.

3) THIBAUT, *Journal*, S. 271; ebenso das Folgende.

4) THIBAUT, *Journal*, S. 233.

5) a. a. O., S. 233.

double the size was the 'dvikarani', the line producing the double (I shall for convenience sake often employ the terms „side“ or „line“ instead of „cord“); this was therefore the name for the diagonal of a square“.

Gerade weil dvikarani eine im Quadrat durch Konstruktion hergestellte Linie, ja das von Ecke zu Ecke gespannte Seil selbst war, deswegen brauchte man zur Unterscheidung für das Maß derselben Linie einen andern Ausdruck; das eben ist der oben behandelte savisesha.

Wenn nun in der späteren indischen Mathematik „the word karani is invariably used to denote a surd or irrational number; as the commentators explain it, that of which when the square-root is to be taken, the root does not come out exact“,¹⁾ so hat sich hier im Laufe vieler Jahrhunderte ein Bedeutungswandel vollzogen: Von der konstruiert vorliegenden Quadratseite ging die Bezeichnung über auf die ausgemessene oder berechnete, und mit Verengerung des Begriffs, auf diejenige Maßzahl, welche nicht in anderen Anwendungen, sondern allein als Maß einer Quadratseite auftrat, d. h. als irrationale Quadratwurzel. „And“, so schließt THIBAUT seine Abhandlung, „thus we see that the same word which expressed in later times the highly abstract idea of the surd number, originally denoted a cord made of reeds which the adhvaryu stretched out between two wooden poles when he wanted to please the Immortels by the perfectly symmetrical shape of their altar.“

III.

Hätten die alten Inder das Wesen des Irrationalen erkannt, so dürfte man aus diesem einen Grunde trotz mancher entgegenstehender Bedenken ihrer Geometrie diejenige Abstraktion und Wissenschaftlichkeit nicht absprechen, ohne welche diese Erkenntnis ganz unmöglich ist. Mit dem Nachweis, daß sie diese Erkenntnis nicht besessen haben, fällt auch diese Nötigung weg.

Die altindische Geometrie war rein praktisch und empirisch, von Abstraktionen wie der Irrationalzahl weit entfernt; hat sie ja doch auch den Pythagoreischen Lehrsatz nur an Einzelfällen probierend erkannt und mit subjektiver Überzeugung ausgesprochen, aber nicht auf den Rang einer objektiv begründeten wissenschaftlichen Wahrheit zu erheben vermocht.

So können die alten Inder in der Geschichte der Mathematik auf keine andere Schätzung Anspruch erheben, als etwa die, welche bisher seit den Zeiten der Griechen die Ägypter genossen haben. Wie die Ägypter zum Zwecke der Feldmessung mancherlei geometrische Tatsachen empirisch bemerkten und praktisch verwendeten,²⁾ so die Inder zum Zweck der Kon-

1) THIBAUT, *Journal*, S. 274.

2) Die Zeugnisse bei CANTOR, *Geschichte der Mathematik* 1^o, S. 53.

struktion ihrer Altäre. Mag auch ihr Wissen über das der Ägypter erheblich hinausgegangen sein, so können sie in der Geometrie als Wissenschaft die Lehrer der Griechen ebensowenig gewesen sein, wie die Ägypter; aus dem sehr einfachen Grunde, daß beide nicht geben konnten, was sie selbst nicht hatten. Mögen die Griechen stoffliche Anregungen, sozusagen geometrisches Rohmaterial den Völkern des Orients entlehnt haben; nach allem, was wir wissen, bleibt es wahr, wenn PROKLUS¹⁾ einem Griechen nachrühmt, daß er „τὴν περὶ αὐτὴν φιλοσοφίαν εἰς σχῆμα παιδείας ἐλευθέρου μετέστησεν, ἀνωθεν τὰς ἀρχὰς αὐτῆς ἐπισκοπούμενος καὶ δόλως καὶ νοερῶς τὰ θεωρήματα διερευνῶμενος“. Nicht Orientalen, sondern Griechen haben diese weltgeschichtliche Leistung vollbracht; erst bei ihnen finden wir die Methoden und Theoreme „des immateriellen, abstrakten geometrischen Forschens“, die ihnen die ganze vor ihnen und um sie herum existierende Welt nicht hatte geben können.

Mag der Pythagoreische Lehrsatz als empirische Erfahrung zuerst von Indern oder Ägyptern aufgestellt sein, oder mögen sich seine Anfänge im Urwissen der Menschheit verlieren, als wissenschaftliche Tatsache ist er griechisch ebenso wie die Erkenntnis des Irrationalen.

Wir sind meiner Ansicht nach nicht genau genug unterrichtet, um PYTHAGORAS selbst diese Entdeckungen mit Sicherheit zuschreiben zu können;²⁾ aber in seiner Schule sind sie bestimmt gemacht worden. Das sehen wir daraus, daß sie zu PLATOS Zeit vorhanden waren und von PLATO und ARISTOTELES den Pythagoreern zugeschrieben werden. —

Wird neuerdings allgemein zugestanden, daß die Griechen nicht die Lehrmeister der alten Inder gewesen sein können; geht aus meinen Ausführungen hervor, daß die Griechen nicht umgekehrt ihre Geometrie aus indischer Quelle geschöpft haben können, so bleiben für den Ursprung der Geometrie drei Möglichkeiten.

Die erste spricht CANTOR aus:³⁾ „Es kam mir der Gedanke, ob nicht in den Zeiten, welche wir als uralte zu bezeichnen pflegen, also rund ausgesprochen jetzt vor drei bis vier Jahrtausenden, schon ein dem ganzen damaligen Kulturgebiete, also Vorderasien und Ägypten gemeinsames nicht ganz unbedeutendes mathematisches Wissen“ (z. B. das rechtwinklige Dreieck 3, 4, 5) „vorhanden gewesen sein könnte, welches sich je nach der Begabung der einzelnen Völker bald nach der einen, bald nach der anderen Richtung weiter entwickelte“. Zweitens könnte in historischen Zeiten geometrisches Wissen an verschiedenen, voneinander unabhängigen

1) PROCLI *Commentarii in Euclidis elem.* I. ed. FRIEDLEIN (Leipzig 1873), p. 65.

2) Die älteren Forscher (ZIEGLER, HANKEL) sind mit Recht hierin zurückhaltender als manche Neueren.

3) CANTOR, *Arch. der Mathem.* 8^s, 1905, S. 71.

Stellen entstanden sein. Diese Vorstellung ist zur Zeit die unbeliebteste, zumal bei den Erforschern des alten Orients. Aber ich meine, man hat doch kein Recht, sie mit WINDISCH und BÜRK¹⁾ als Glauben an „einen wunderbaren Fall von prästablierter Harmonie“ abzuweisen, zumal wenn man nicht nur die, zum Teil durch den gleichen Stoff bedingten, Übereinstimmungen, sondern auch die Unterschiede des Inhalts und der Methoden gebührend würdigt. Endlich könnten die Griechen die Regeln der ägyptischen Feldmeßkunst oder der indischen Altarbaukunst auf irgend einem Wege erhalten und als Grundlage und Rohmaterial für die Geometrie benutzt haben, die sie darauf in eigenem Geiste erbauten. Das ist die überlieferte, nicht erwiesene aber auch nicht widerlegte, Vorstellung, nur daß jetzt die Inder in Konkurrenz mit den Ägyptern treten.

Eine Entscheidung zwischen diesen drei Möglichkeiten dürfte zur Zeit wissenschaftlich nicht zu begründen sein.

Nachtrag.

Durch die Güte des Herrn Herausgebers dieser Zeitschrift werde ich nach Vollendung meiner Arbeit auf einen sehr beachtenswerten Vortrag aufmerksam gemacht, den ZEUTHEN unter dem Titel „*Théorème de PYTHAGORE*“, *origine de la géométrie scientifique* auf dem zweiten internationalen Kongreß für Philosophie zu Genf September 1904 gehalten hat (abgedruckt in den *Comptes rendus du Congrès, Genève 1904*).

Ich freue mich, in wesentlichen Punkten Übereinstimmung mit meinen Anschauungen feststellen zu können. Der Vortragende scheidet die empirischen Anfänge der Geometrie, welche auf „*intuition simple*“ beruhen, von der „*géométrie propre*“ oder „*scientifique*“. Erstere findet er bei mehreren orientalischen Völkern, besonders bei Indern und Ägyptern; zur wissenschaftlichen Geometrie sind erst die Griechen vorgeschritten; und zwar war der entscheidende Schritt die Entdeckung des Irrationalen und Inkommensurablen (S. 852): „*C'est à eux que se rattache la première connaissance de quantités incommensurables que nous rencontrons dans l'histoire, et cette connaissance a provoqué ensuite les démonstrations géométriques que nous devons aux Grecs*“. Die Inder haben sich zur Idee des Irrationalen nicht erhoben (S. 851 Ende): „*Mais les Indiens ne se sont sans doute jamais posé la question plus abstraite de savoir s'il était en vérité absolument impossible de trouver une fraction numérique égale à $\sqrt{2}-1$* “; savisesha haben sie vermutlich für genau gehalten (S. 851 Anfang): „*et alors on aura pu regarder ces mesures comme exactes*“.

1) Btag, a. a. O. 55, S. 575.

Die Worte BALDHAYANAS, „Das sieht man an den Rechtecken usw.“ (siehe oben S. 9) sieht ZEUTHEN wie THIBAUT und ich im Sinne ihres Urhebers „*comme démonstration du théorème de PYTHAGORE*“ an (S. 816); endlich (S. 850): „*Nous ne savons pas si la connaissance du „théorème de PYTHAGORE“ a un origine unique, ou s'il y a eu plusieurs découvertes indépendantes ni, dans le dernier cas, si on y est parvenu de la même manière ou par des procédés différents*“.

Dagegen scheint mir der Rekonstruktionsversuch, den BÜRK für die indische Herleitung des allgemeinen Pythagoreischen Lehrsatzes mit wesentlicher Ausnutzung des Gnomon gibt, festeren Anschluß an die Methoden der *Sulbasutren* zu haben als der BRETSCHNEIDERSCHE, auf den ZEUTHEN zurückgreift. Ähnliches dürfte für die beiden Versuche gelten, die savisesha-Regel herzuleiten (S. 850, 851). Der erste will diese Formel allein aus Messung hervorgehen lassen und dürfte damit weder ihrer Genauigkeit noch ihrer eigentümlichen Form gerecht werden; der zweite benutzt die Formel $2 = a^2 \pm 2ax + x^2$ zu einem rein rechnerischen Verfahren und traut damit den alten Indern eine Rechenkunst zu, welche nach dem Ausweis der Quellen und dem Zeugnis THIBAUTS erst ihre späteren Nachkommen besessen haben. THIBAUT, der in diesem besonderen Punkte wie im allgemeinen mehr Beachtung verdient, als er bisher gefunden hat, dürfte mit seinem Herleitungsversuche der Wahrheit wohl näher gekommen sein.