

Zur pythagoreischen Algebra: Quadratwurzel und Kubikwurzel.

Von

B. L. van der Waerden in Leipzig.

354 pdf
WAERDEN, B.L.v.d.
1941

In der axiomatischen Begründung der pythagoreischen Musiklehre, über die Ptolemäus¹⁾ kurz referiert und die in Euklids Sectio Canonis²⁾ ausführlich dargestellt wird, spielt die Frage nach der Möglichkeit der Teilung eines Intervalles in zwei oder mehrere gleiche Teilintervalle eine große Rolle. Arithmetisch kommt sie auf die Frage hinaus, ob sich zwischen zwei Zahlen, die in einem gegebenen Verhältnis $a:b$ stehen, eine oder mehrere mittlere Proportionale einschieben lassen³⁾. Archytas von Taras, der hervorragendste unter den pythagoreischen Musiktheoretikern, hat bewiesen⁴⁾, daß eine solche Einschiebung unmöglich ist, wenn das Verhältnis $a:b$ ein „übersteiliges“, d. h. wenn $a:b = n:(n-1)$ ist.

Der Beweis des Archytas beruht, ebenso wie der in der Sectio Canonis dargestellte, auf folgendem Hilfssatz: Sind a' und b' die kleinsten Zahlen im Verhältnis $a:b$, so lassen sich ebenso viele mittlere Proportionale wie zwischen a und b auch zwischen a' und b' einschieben. Dieser ist ein Spezialfall des Satzes VIII 8 der Elemente von Euklid. Im gleichen VIII. Buch findet sich auch die vollständige Antwort auf die gestellte Frage: Die Einschiebung einer mittleren Proportionalen ist nur möglich, wenn a' und b' Quadratzahlen, von zwei mittleren Proportionalen, wenn sie Kubikzahlen sind (VIII 9 in Verbindung mit IX 8). Die Umkehrung (VIII 11 und 12) wird von Plato dem Pythagoreer Timaios in den Mund gelegt⁵⁾, wodurch bestätigt wird, daß es sich hier um pythagoreische Arithmetik handelt⁶⁾.

Wie sind nun die Pythagoreer zu der Frage nach den mittleren Proportionalen gekommen?

Ich glaube nicht, daß diese Frage aus der Musiktheorie erwachsen ist. Denn für diese sind zwar das arithmetische und das harmonische Mittel direkt wichtig (nämlich für die Teilung der Oktave in Quinte und Quarte), das geometrische aber nur indirekt, insofern die Nichthalbierbarkeit der über-

¹⁾ Klaudios Ptolemaios, Harmonielehre (ed. Düring). Buch I, Kap. 5.

²⁾ Euclidis Opera Omnia (ed Heiberg u. Menge, Leipzig 1916), Bd. VIII.

³⁾ „Zahl“ bedeutet hier nach griechischem Sprachgebrauch „ganze Zahl“; die gesuchten mittleren Proportionalen sollen ebenfalls ganze Zahlen sein.

⁴⁾ Archytas bei Boetius, De institutione musica (ed. Friedlein, Leipzig 1867), S. 285–286.

⁵⁾ Timaios 31 B 4 und 32 A 7.

⁶⁾ Vgl. dazu P. Tannery, Mém. scient. III, Nr. 83, und K. Reidemeister, Die Arithmetik der Griechen (Leipzig 1939).

teiligen Intervalle im logischen Aufbau der Sectio Canonis eine Rolle spielt. Dieser Aufbau stellt aber eine Endstufe der Theorie dar, die erst auf Grund einer ausgebildeten Arithmetik möglich war.

Weit eher könnte das geometrische Mittel aus der Geometrie stammen. Zum ersten Male kommt die Konstruktion des geometrischen Mittels bei Euklid II 14 vor, wo es sich darum handelt, zu einem gegebenen Polygon ein flächengleiches Quadrat zu errichten. Diese Konstruktion ist ein unentbehrliches Hilfsmittel bei der Flächenanpassung (Euklid VI 28 und 29), die nach Eudem⁷⁾ eine Erfindung der Pythagoreer ist. Die Konstruktion von zwei geometrischen Mitteln zwischen zwei vorgegebenen Strecken ist äquivalent dem Problem, einen Würfel von gegebenem Rauminhalt zu konstruieren, und diese Äquivalenz bildet die Grundlage der stereometrischen Lösung des Problems der Würfelverdopplung von Archytas⁸⁾. Die geometrischen Mittel spielen also in der pythagoreischen Geometrie eine wichtige Rolle.

Trotzdem glaube ich nicht, daß die Wurzel der arithmetischen Problemstellung in der Geometrie zu suchen ist. Denn für die Pythagoreer sind die Zahlen immer das primäre; sie trieben Arithmetik, längst bevor es eine Geometrie gab, die sich an so schwere Probleme wie die Würfelverdopplung heranwagen konnte. Von der Geometrie aus gibt es auch keine plausible Erklärung, warum so ausgefallene Probleme wie die Flächenanpassung und die Würfelverdopplung eine so zentrale Rolle spielen. *Vielmehr sieht es so aus, als ob diese Probleme nur geometrische Verkleidungen von algebraischen Fragestellungen sind.* Die einfachsten nichtlinearen Gleichungen in einer oder zwei Unbekannten heißen nämlich

$$(1) \quad x^2 = a \quad \text{bzw.} \quad x^3 = a$$

$$(2) \quad x \pm y = a, \quad xy = b,$$

und die geometrische Formulierung dieser Gleichungsaufgaben führt gerade auf die oben erwähnten Probleme.

Eine nähere Betrachtung der Arithmetik selbst führt zum gleichen Ergebnis. Bekanntlich hat es neben der offiziellen Arithmetik, die nur ganze Zahlen betrachtete, eine Logistik gegeben, die auch mit Brüchen rechnete. Die Arithmetik ersetzte diese Brüche durch Zahlenverhältnisse. So kann man die im VII. Buch Euklids entwickelte Theorie der auf ihre kleinsten Glieder reduzierten Zahlenverhältnisse als eine Theorie der gekürzten Brüche betrachten. Die Zusammensetzung von Verhältnissen entspricht der Multiplikation von Brüchen, die „Verdopplung“ eines Verhältnisses dem Quadrieren. Der Bildung der höheren Potenzen entspricht die arithmetische Theorie der geometrischen Reihen im VIII. und IX. Buch. So gesehen, ist

⁷⁾ Proklos in Euklid (ed. Friedlein), S. 419.

⁸⁾ Eudemos im Eutokioskommentar zu Archimedis Opera (Heiberg) III, S. 99.

die Frage nach den mittleren Proportionalen zwischen Zahlen nur die arithmetische Fassung der logistischen Frage nach der Quadratwurzel oder Kubikwurzel aus einer rationalen Zahl.

Nun wissen wir aber auch aus anderer Quelle, daß die Pythagoreer sich für die Berechnung von Quadratwurzeln interessierten. Theon v. Smyrna⁹⁾ und Proklos¹⁰⁾ geben uns das Bildungsgesetz der „Seiten- und Diagonalzahlen“, die der Pellschen Gleichung

$$2x^2 - y^2 = \pm 1$$

genügen und deren Verhältnisse Näherungen für $\sqrt{2}$ ergeben. Das Paar (5, 7) kommt bereits im Platonischen Staat (546 C) vor.

Zusammenfassend können wir die Genesis all dieser — auch in der *Epinomis*¹³⁾ stark hervorgehobenen — Probleme so darstellen:

A. Algebraischer (logistischer) Ausgangspunkt:

1. Berechnung von Quadratwurzeln. 2. Berechnung von Kubikwurzeln.

B. Geometrische Einkleidung:

1. Quadratur des Rechtecks. 2. Kubatur eines Balkens (Würfelverdopplung).

C. Arithmetische Einkleidung:

1. Eine mittlere Proportionale. 2. Zwei mittlere Proportionale.

D. Musiktheoretisches Korollar:

1. Halbierung eines Intervalles.

Zur vollen Gewißheit, daß die hier betrachteten geometrischen und arithmetischen Probleme letzten Endes aus der Algebra stammen, gelangt man, wenn man auch noch die Keilschrifttexte heranzieht. Zahlreiche Quadratwurzel- und Kubikwurzeltabellen aus der Zeit von Isis I. bis Darius¹¹⁾ beweisen, wie wichtig diese Operationen den Babyloniern waren. Zahlreich sind auch die Probleme, die durch algebraische Umformung auf die Grundtypen (1) und (2) zurückgeführt wurden¹²⁾. Auch die Näherung $\frac{7}{5}$ für $\sqrt{2}$ findet man hier wieder. Daß die Pythagoreer bei ihren notorischen Beziehungen zum Orient das alles nicht gekannt, es aber in kaum mehr als einem Jahrhundert nebst „Pythagoreischem Lehrsatz“ und so vielem anderen keilschriftlich Überlieferten neu erfunden haben sollten, ist kaum glaublich.

⁹⁾ Theonis Smyrnaei *Expos. rer. math.* (ed. Hiller, Leipzig 1878), S. 43–44.

¹⁰⁾ Proklos, *Komm. zum Staate Platos* (ed. Kroll, 1901), S. 24–29.

¹¹⁾ Siehe O. Neugebauer, *Mathematische Keilschrifttexte I* (Quellen u. Studien z. Gesch. d. Math., Abt. A, Bd. 3, 1935), Kap. I, § 4.

¹²⁾ Siehe unter ¹¹⁾, für die Kubikwurzeln bes. S. 216 und 460–461.

¹³⁾ Siehe O. Toeplitz, *Quellen und Studien B 2*, S. 334.

B. L. van der Waerden, *Zur pythagoreischen Algebra: Quadratwurzel und Kubikwurzel*, *Math. Ann.* 118, 1941, 286–288.

Die logistischen Probleme der Babylonier: Quadrat- und Kubikwurzelziehung, Bestimmung zweier Unbekannten aus Summe und Produkt, haben die Pythagoreer übernommen; jünger sind die geometrischen Einkleidungen: Flächen- und Volumenverwandlungen, Einschaltung mittlerer Proportionalen, sowie musiktheoretische Anwendungen.