

356
WAERDEN, B.L.v.d.
1977

WAERDEN B.L. VAN DER, *Die vier Wissenschaften der Pythagoreer in Rheinisch-westfälische Akademie der Wissenschaften Vorträge No. 268: Opladen Westdeutscher Verlag 1977 46p.: 7-16.*

Die vier Wissenschaften der Pythagoreer

Von Bartel Leendert van der Waerden, Zürich

Einleitung

Neulich passierte es mir, als ich einen Vortrag über die Pythagoreer hielt, daß nach dem Vortrag einer der Hörer mir sagte: „Ihr Vortrag über Pythagoras war so interessant!“ Ich möchte daher betonen, daß ich nicht über Pythagoras sprechen werde, sondern nur über die Pythagoreer. Von Pythagoras als Forscher im Gebiete der exakten Wissenschaften weiß ich gar nichts, und ich möchte Ihnen keine Märchen erzählen. Pythagoras ist für mich, wie für seine Zeitgenossen, vor allem ein religiöser Prophet, ein Ermahner zu einer sittlichen, frommen Lebenshaltung und der Gründer einer religiösen Gemeinschaft: eben der Bruderschaft der Pythagoreer.

Pythagoras und die Pythagoreer glaubten an die Seelenwanderung und an die Unsterblichkeit der Seele. Unsere Aufgabe auf dieser Erde ist, die Seele durch reines Leben zu läutern, sie von irdischen Schlacken zu befreien und sie so auf ihren Aufstieg in den Himmel nach dem Tode vorzubereiten. Wenn dieser Aufstieg nicht gelingt, so ist die Seele verdammt, den Kreislauf der Wiedergeburten von neuem zu durchlaufen, womöglich nicht als Mensch, sondern als stummer Fisch oder als Schwein.

Die Pythagoreer lebten in Süditalien so zwischen 520 und 450 vor Chr. in einer Art Kloostergemeinschaft, mit gemeinsamem Besitz und gemeinsamen Mahlzeiten. Unter ihnen gab es eine Gruppe, die sich *Mathematikoi* nannten. Sie waren nach Aristoteles die ersten, die sich mit den mathematischen Wissenschaften befaßten und diese weiter entwickelten. Vier Wissenschaften oder „Mathemata“ haben sie entwickelt:

Arithmetik, Geometrie,
Harmonik, Astronomie.

Wie kam es, daß gerade in dieser religiösen Gemeinschaft die mathematischen Wissenschaften so intensiv betrieben wurden? Was haben Religion und Mathematik miteinander zu tun? Für uns fast nichts, aber für die Pythagoreer sehr viel!

Erstens: Nach der Ansicht der Pythagoreer waren die Sterne Götter. Die Astronomie ist also gleichzeitig Theologie.

Zweitens: Die Pythagoreer glaubten, daß die Planetengötter unser Schicksal entscheidend beeinflussen. Sie glaubten an Voraussagen, insbesondere astrologische Prognosen. Dieser Glaube war für sie ein zusätzliches Motiv, die Bewegungen der Planeten zu erforschen. Die Astrologie braucht die Astronomie als Hilfswissenschaft, und die Astronomie braucht wiederum die Mathematik.

Drittens: Der Weltenschöpfer hat die Welt, wie die Pythagoreer meinten, nach Zahlen geordnet und nach einem geometrischen Muster. Wer also Zahlentheorie und Geometrie betreibt, nähert sich im Geiste dem göttlichen Schöpfer. Dies ist vielleicht der tiefste Grund, warum die gläubigen Pythagoreer soviel Wert auf die Mathematik legten.

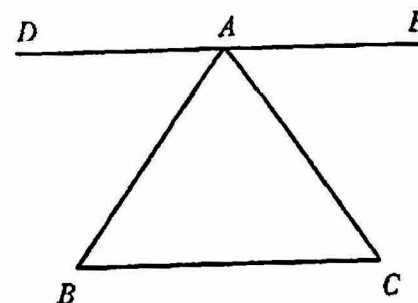
Auch die Musik spielte im Leben der Pythagoreer eine wichtige Rolle. Durch Musik konnte man, wie sie meinten, die Leidenschaften besänftigen und den Geist ins Gleichgewicht bringen. Die Musik war nach ihrer Überzeugung göttlichen Ursprungs: Die irdische Musik war nur eine Imitation der göttlichen Musik: der Harmonie der Sphären.

Die Pythagoreer wußten, daß die symphonischen Zusammenklänge der Musik durch einfache Zahlenverhältnisse bestimmt sind: die Oktave durch das Verhältnis 2:1, die Quinte durch 3:2, die Quarte durch 4:3. Auch das war ein Grund für sie, die Arithmetik zu studieren, insbesondere die Lehre von den Zahlenverhältnissen.

Manche religiösen Lehren wurden von den Pythagoreern geheim gehalten, aber die mathematischen Wissenschaften waren nicht geheim. Wir kennen ihre Musiktheorie aus einem ausführlichen Bericht des Astronomen Ptolemaios. Wir wissen genau, wie sie den Satz von der Winkelsumme im Dreieck bewiesen haben, wie sie das Verhältnis der Diagonale eines Quadrates zur Seite durch Zahlenverhältnisse immer besser angenähert haben, und vieles mehr.

Geometrie

Fangen wir mit der *Geometrie* an, weil wir davon am meisten wissen. *Eudemos*, ein Schüler des Aristoteles, hat nämlich eine „Geschichte der Geometrie“ geschrieben. Diese ist verloren, aber *Proklos* hat in seinem Euklidkommentar bedeutende Fragmente aus der Schrift des Eudemos erhalten. Eines von diesen Fragmenten ist der Beweis des Satzes, daß die Summe der Winkel in einem Dreieck gleich zwei rechten Winkeln ist.



Der Beweis geht so:

Sei ABC ein Dreieck. Ziehe durch A eine Gerade DE parallel zu BC . Da BC und DE parallel sind, sind die Wechselwinkel gleich, also der Winkel DAB gleich ABC und EAC gleich ACB . Füge beiderseits den Winkel BAC hinzu. Also werden die drei Winkel bei A , die zusammen zwei rechte Winkel bilden, gleich der Summe der drei Winkel des Dreiecks sein. So ist der Beweis der Pythagoreer.

Die pythagoreischen Mathematiker lebten rund hundert Jahre vor Eudemos: Dieser hatte keinen mündlichen Kontakt mit ihnen. Auch die ganze Form des Beweises, in dem Winkel mit je 3 Buchstaben bezeichnet werden, deutet auf eine schriftliche Überlieferung hin. Eudemos hatte also ein Buch vor sich: ein Lehrbuch der Elementargeometrie aus der Schule der Pythagoreer.

Den Namen des Autors dieses Buches nennt Eudemos nicht. Ich vermute, daß er den Namen gar nicht kannte. Eudemos war, wie wir aus seinen Fragmenten wissen, immer sehr daran interessiert, wer zuerst ein Theorem oder einen Beweis gefunden hat. Das Buch, aus dem er schöpfte, war offenbar nur als Sammelwerk der pythagoreischen Schule bekannt: es trug keinen Autorennamen.

Der Beweis, den Eudemos hier wiedergegeben hat, ist streng logisch aufgebaut, im Stil der Elemente von Euklid. Also haben die Pythagoreer eine logisch aufgebaute, schriftlich niedergelegte Elementargeometrie gehabt. Ihr Beweis des Satzes von der Winkelsumme ist übrigens verschieden von dem Beweis, den man bei Euklid findet.

Eine weitere Erfindung, die Eudemos den Pythagoreern zuschreibt, ist die sogenannte „Anlegung von Flächen“. In der einfachsten Form lautet das Problem so: Gegeben eine Strecke a und eine Fläche F , z. B. die Fläche eines Dreiecks oder Vierecks. Man soll diese Fläche als Rechteck an die Strecke a anlegen, d. h., man soll ein Rechteck auf der Basis a konstruieren, das flächengleich der gegebenen Fläche F ist. – Dann gibt es noch zwei schwierigere Flächenanlegungen mit Defekt oder Exzeß. Alle diese sind nach Eudemos „Erfindungen der Muse der Pythagoreer“.

Die einfache Flächenanlegung ohne Defekt oder Exzeß wird bei Euklid am Ende des ersten Buches der „Elemente“ behandelt und die Anlegungen mit Exzeß oder Defekt im zweiten Buch. Aus diesem und aus anderen bekannten Fakten kann man schließen, daß der letzte Teil des ersten Buches von den Pythagoreern stammt und ebenso das ganze zweite Buch der „Elemente“.

Ein Scholion, das heißt eine Randbemerkung beim vierten Buch der Elemente, besagt, daß alle Theoreme dieses Buches von den Pythagoreern gefunden wurden. In diesem vierten Buch werden das reguläre Dreieck, Viereck, Fünfeck, Sechseck, Zehneck und Fünfeck in einem gegebenen Kreis konstruiert. Bei der Konstruktion des Fünfecks wird die Flächenanlegung mit Exzeß benutzt. Das zweite und vierte Buch hängen also logisch miteinander zusammen.

Im Archive for History of Science, Band 9, hat Erwin Neuenschwander die logischen Beziehungen zwischen den ersten vier Büchern der „Elemente“ von Euklid untersucht und nachgewiesen, daß nicht nur das zweite und vierte Buch, sondern auch der größte Teil des dritten Buches den Pythagoreern zugeschrieben werden müssen. Das dritte Buch handelt vom Kreis und von den Winkeln und Sehnen im Kreis. Die wichtigsten Beweismittel im dritten Buch sind erstens der „Satz des Pythagoras“, der bei Euklid ziemlich am Ende des ersten Buches steht, und die Sätze des zweiten Buches.

In dieser Weise kann man große, logisch zusammenhängende Teile des Geometrie-Lehrbuches der Pythagoreer rekonstruieren. Euklid kannte dieses Lehrbuch und hat es ausgiebig benutzt.

Harmonik

Ich komme nun zu der *Harmonik*, zur Musiktheorie der Pythagoreer, und ich frage: Wie kamen sie dazu, der Oktave das Verhältnis 2:1 zuzuordnen, der Quinte das Verhältnis 3:2 und der Quarte 4:3?

Ursprünglich haben die Pythagoreer diese Verhältnisse wahrscheinlich aus der Erfahrung entnommen. Wenn man eine gespannte Saite zum Tönen bringt und dann auf die Hälfte verkürzt, so wird der Ton eine Oktave höher. Verkürzt man die Saite auf $\frac{2}{3}$ oder auf $\frac{3}{4}$ ihrer Länge, so wird der Ton eine Quinte oder Quarte höher. Ebenso: Macht man eine Flöte halb so lang wie eine andere sonst gleich gebaute, so erhält man wieder den Zweiklang der Oktave. Diese Erfahrungstatsachen stehen bei Aristoteles in den „Musikproblemen“, und Aristoteles

fügt hinzu, daß die Erbauer von Blasinstrumenten tatsächlich so vorgehen. So also könnten die ältesten Pythagoreer ihre Zahlenverhältnisse aus der Erfahrung gewonnen haben.

Unter einem *symphonen Zusammenklang* verstanden die Griechen einen solchen Zweiklang, bei dem die beiden Töne im Ohr zu einem einzigen Eindruck verschmelzen.

Hippasos, nach der Überlieferung der erste der Mathematikoi, hat den drei symphonen Zusammenklängen Oktave, Quinte und Quarte zwei weitere hinzugefügt, nämlich die Doppeloktave (4:1) und die Oktave plus Quinte (3:1).

Derselbe Hippasos hat zusammen mit dem Musiker Lasos Experimente mit tönenden Vasen und Bronzescheiben gemacht, um diese Zahlenverhältnisse zu verifizieren. Er brachte einen bronzenen Diskus durch Anschlagen zum Tönen, nahm dann einen zweiten Diskus, dessen Dicke $\frac{3}{4}$ des ersten war, und erhielt so die Konsonanz der Quarte, und ähnlich für die Quinte und Oktave.

Die „Mathematikoi“ der nächsten Generation, so um 450 vor Chr., waren mit dieser empirischen Verifikation der Zahlenverhältnisse der symphonen Zusammenklänge nicht zufrieden. Sie stellten eine *axiomatische Theorie* auf, in der bewiesen wird, daß die Zahlenverhältnisse dieser Zusammenklänge so sein müssen.

Wir kennen diese axiomatische Theorie aus der Harmonik des Ptolemaios. Nach Ptolemaios gingen die Pythagoreer – also wieder anonyme Pythagoreer – von drei Voraussetzungen aus, die sie ohne Beweis an die Spitze stellten, nämlich:

- 1) Den Tönen entsprechen Zahlen, und zwar gleich hohen Tönen gleiche Zahlen, ungleich hohen Tönen aber verschiedene Zahlen.
- 2) Den symphonen Zusammenklängen entsprechen Zahlenpaare, die ein vielfaches oder ein überteiliges Verhältnis haben. Was heißt das?

Ein „*vielfaches*“ Verhältnis ist ein Verhältnis wie n zu 1, wo n eine ganze Zahl ist. Ein „*überteiliges*“ Verhältnis ist ein Verhältnis wie $(n + 1)$ zu n , wobei der Überschuß 1 ein Teiler von n ist.

Die Pythagoreer postulierten nun, daß den symphonen Zusammenklängen vielfache oder überteilige Verhältnisse entsprechen müssen. Sie begründeten das dadurch, daß die symphonen Zusammenklänge die schönsten und die vielfachen und überteiligen Verhältnisse die einfachsten sind.

Die dritte Grundvoraussetzung der Pythagoreer lautete:

- 3) Der Oktave, der schönsten Konsonanz, die dem Gleichklang am nächsten kommt, entspricht das Verhältnis 2 zu 1, das der Gleichheit am nächsten kommt.

In diesen drei Axiomen der Musiktheorie ist jede Berufung auf die Erfahrung sorgfältig vermieden. Der Autor dieser Axiome, ein anonymer Pythagoreer, beruft sich nur auf die Schönheit der Zusammenklänge und die Einfachheit von Zahlenverhältnissen. Die Zahlen, von denen er spricht, sind nicht etwa Frequenzen von Schwingungen oder Längen von Saiten, sondern reine Zahlen. Die Pythagoreer meinten, der Kosmos sei nach Zahlen geordnet und alles Seiende sei durch Nachahmung der Zahlen. Jeder musikalische Zusammenklang ist für sie die hörbare Verwirklichung eines Zahlenverhältnisses; daher muß die Schönheit des Zusammenklanges in irgendeiner mysteriösen Weise durch die Schönheit und Einfachheit des Zahlenverhältnisses bedingt sein.

Aus den drei eben formulierten Axiomen wird nun rein logisch bewiesen, daß der Oktave, Quinte und Quarte die Verhältnisse 2:1, 3:2 und 4:3 zugeordnet sein müssen. Der Beweis ist bei Ptolemaios nur skizziert. In meinem demnächst erscheinenden Buch „Die Pythagoreer“ wird der Beweis vollständig ausgeführt werden.

Die Musiktheorie der anonymen Pythagoreer war also eine logisch aufgebaute axiomatische Wissenschaft. Am Anfang standen präzise formulierte Axiome; daraus wurde alles andere rein logisch hergeleitet, wie in der Geometrie.

Arithmetik

In der *Zahlentheorie* der Pythagoreer können wir zwei Richtungen unterscheiden: die populäre und die wissenschaftliche Arithmetik. Die wissenschaftliche Arithmetik ist in den zahlentheoretischen Büchern 7, 8 und 9 der „Elemente“ von Euklid dargestellt. Unsere Hauptquelle für die populäre Arithmetik ist die „Arithmetische Einführung“ des *Nikomachos von Gerasa*. Dieser neupythagoreische Autor lebte im ersten oder zweiten Jahrhundert nach Chr., aber er hat sehr viele altpythagoreische Lehren für uns erhalten. Der Zweck seiner sehr populären Einführung ist, die wunderbaren und göttlichen Eigenschaften der Zahlen für jeden ver-

ständig auseinanderzusetzen. So erzählt er denn in einer unterhaltenden Art über Dreieckszahlen, Quadratzahlen, Rechteckszahlen und Kubikzahlen, über vielfache und überteilige Verhältnisse, über Primzahlen und vollkommene Zahlen, erläutert durch viele Beispiele, aber immer ohne Beweise. Er kannte sein Publikum: Er wußte, daß seine Leser wohl in das Mysterium der Zahlen eingeweiht werden wollten, daß aber nüchterne Beweise ihnen zu langweilig wären. Außerdem würde viel von dem geheimnisvollen Zauber der Zahlenlehre beim Beweis verloren gehen.

Ganz anders ist der Stil der arithmetischen Bücher 7, 8 und 9 der „Elemente“. Diese sind streng wissenschaftlich. Vom Mysterium ist nichts mehr übrig, die Worte „göttlich“ und „wunderbar“ kommen nicht vor, alles wird genau bewiesen.

Obwohl Nikomachos vier Jahrhunderte nach Euklid lebte, macht er einen viel primitiveren Eindruck. Er steht bestimmt der Zahlenmystik der ältesten Pythagoreer viel näher. Ich stelle mir vor, daß Pythagoras, der Prophet, seine Weisheit in geheimnisvolle Orakelsprüche kleidete, und daß die Mathematikoi unter den Pythagoreern erst später die Zahlenlehre zu einer exakten Wissenschaft mit strengen Beweisen gemacht haben. Nikomachos aber knüpft wieder an die ältere Zahlenmystik an.

Exakte Beweise finden wir vor allem im Buch 7 der „Elemente“. Dieses Buch enthält einen bewundernswerten, streng logischen Aufbau der Lehre von den ganzen Zahlen. Es fängt an mit dem „Euklidischen Algorithmus“ zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers zweier Zahlen. Darauf fußend, wird eine Lehre von den Zahlenverhältnissen entwickelt. Es wird bewiesen, daß ab gleich ba ist. Dann kommen Sätze über die Teilbarkeit von ganzen Zahlen.

Viel mangelhafter ist der logische Aufbau des darauffolgenden Buches 8. Das Buch enthält unvollständige Beweise, unnötige Wiederholungen, sogar Fehlschlüsse.

In der Musiktheorie des Pythagoreers Archytas von Tarent (der mit Platon befreundet war) werden Sätze aus dem Buch 8 als bekannt vorausgesetzt. Wahrscheinlich ist das ganze Buch 8 in der Schule des Archytas entstanden. Nun werden aber im achten Buch Sätze aus dem siebenten Buch wörtlich zitiert. Das siebente Buch muß also zur Zeit des Archytas, um 400 vor Chr., schon vorhanden gewesen sein. Sehr wahrscheinlich ist es im Kreis derselben anonymen Pythagoreer entstanden, denen wir auch den axiomatischen Aufbau der Geometrie und der Harmonielehre verdanken. Sie waren es, die nach Aristoteles als erste die vier Wissenschaften systematisch begründeten.

Astronomie

Ich komme nun zur vierten Wissenschaft: der *Astronomie*. Die Rekonstruktion der pythagoreischen Astronomie ist schwieriger als die der anderen Wissenschaften, weil wir nicht so viele gute Zeugnisse haben.

Ein wichtiges Zeugnis steht bei *Geminus* in der „Einführung in die Phänomene“. Es lautet:

„Es liegt nämlich der gesamten Astronomie die Annahme zu Grunde, daß die Sonne, der Mond und die fünf Planeten sich erstens mit gleichmäßiger Geschwindigkeit, zweitens in kreisförmigen Bahnen und drittens in einer der Bewegung des Weltalls entgegengesetzten Richtung bewegen. Die Pythagoreer waren die ersten, welche an derartige Untersuchungen herantraten und für die Sonne, den Mond und die fünf Planeten kreisförmige und gleichmäßige Bewegungen annahmen. Konnten sie doch für die göttlichen und ewigen Himmelskörper nicht eine derartige Unregelmäßigkeit annehmen, vermöge welcher sich dieselben bald schneller, bald langsamer bewegen, bald gar stillstehen sollten, wie man bekanntlich bei den fünf Planeten von ‚stationär werden‘ spricht. Darf man ja selbst bei einem gebildeten und gesetzten Menschen in seinem Gange eine derartige Ungleichmäßigkeit der Bewegung nicht voraussetzen. Freilich werden für die Menschen die Bedürfnisse des Lebens häufig Ursache zu langsamerer oder schnellerer Bewegung; allein bei der unvergänglichen Beschaffenheit der Gestirne ist zu schnellerer oder langsamerer Bewegung keinerlei Ursache denkbar. Aus diesem Grunde stellten sie die Frage in dieser Form, wie sich wohl bei Annahme kreisförmiger und gleichmäßiger Bewegung die Himmelserscheinungen erklären ließen.“ (*Geminus*, *Isagoge*, ediert und übersetzt von Manitius, S. 11.)

Das ist ein sehr merkwürdiges Zeugnis. Eine Hypothese, die für die ganze griechische Astronomie grundlegend war, nämlich die Hypothese der gleichmäßigen Kreisbewegung aller Himmelskörper, wird hier theologisch begründet. Die Himmelskörper sind göttlich und ewig, so sagen die Pythagoreer, also können sie sich nicht unregelmäßig bewegen, und wenn der Augenschein lehrt, daß sie sich bald schneller, bald langsamer bewegen, bald gar stillstehen, so kann das nur Schein sein, und wir müssen versuchen, durch Annahmen über gleichmäßige Kreisbewegungen die Erscheinungen zu erklären.

Ein großartiges wissenschaftliches Programm, theologisch begründet! Eine echt pythagoreische Mischung von Wissenschaft und Religion.

Wie haben nun die Pythagoreer ihr Programm durchgeführt? Welche Hypothesen haben sie zur Erklärung der scheinbar unregelmäßigen

Planetenbewegungen angenommen? Unser wichtigster Zeuge ist *Platon*. In einem Mythos am Schluß des Dialoges „Der Staat“ wird der Kosmos als eine Spindel mit acht Wirteln dargestellt. Die Wirtel ballen sich in der Mitte um die Spindel herum. Die Spindel ist die Nord-Süd-Achse, um die sich der ganze Himmel mit allen Sternen täglich dreht. Die acht Wirtel sind die sieben Planetensphären und die Fixsternsphäre. Diese Sphären sind, wie Platon sagt, ineinandergeschachtelt wie gewisse Spielzeugschachteln. Man muß sich das wahrscheinlich so vorstellen: Jede Planetensphäre hat zwei Oberflächen, die eine hohl, die andere konvex, und zwischen diesen beiden konzentrischen Kugelflächen bewegt sich der Planet auf einem kleinen Kreis, einem Epizykel. So wenigstens erklärt es uns ein spätantiker Kommentator, *Derkyllides*. Platon selbst drückt sich nicht so deutlich aus, aber sein Text ist in Übereinstimmung mit dieser Erklärung.

Was ist ein Epizykel? Ein Epizykel ist ein kleiner Kreis, der auf einem großen Kreis aufsitzt (daher das Wort *epi-kyklos*, Aufkreis). Der große Kreis dreht sich um die Erde und nimmt bei dieser Bewegung den Epizykel mit. Außerdem dreht sich der Epizykel um den eigenen Mittelpunkt und nimmt bei dieser Bewegung den Planeten mit.

Im Sphärenmodell des Mythos im „Staat“ muß man sich die Sache wohl so vorstellen: Der Epizykel bewegt sich zwischen je zwei konzentrischen Kugelflächen um die Erde herum, und der Epizykel trägt den Planeten. Durch dieses einfache Modell kann man in der Tat die Erscheinungen des Mondes, der Sonne und der unteren Planeten Merkur und Venus recht gut erklären. Bei Mars, Jupiter und Saturn ist es schwieriger, wie Platon im „*Timaos*“ selbst hervorhebt.

Auf jedem Sternenkreis, so erzählt Platon im Mythos, sitzt je eine mitumschwingende Sirene. Jede dieser Sirenen gibt einen einzigen Ton von sich, und diese Töne bilden eine Harmonie, d. h. eine wohlgeordnete Tonleiter. Dies ist eine deutliche Anspielung auf die Sphärenharmonie der Pythagoreer. Das von Platon so farbenreich geschilderte Weltbild ist nämlich, wie ich noch näher erläutern werde, das Weltbild der Pythagoreer.

Dasselbe Weltbild liegt auch dem Dialog „*Timaos*“ zugrunde. Die märchenhaften Vorstellungen von der Spindel und den Wirteln im Schoße der Notwendigkeit hat Platon im *Timaos* zwar abgestreift, aber die Anordnung der Planetenbahnen ist dieselbe wie im Mythos der *Politeia*, nämlich so:

In der Mitte des Weltalls sitzt, unbeweglich, die kugelförmige Erde. Um sie herum bewegen sich die Planeten und die Fixsterne mit gleich-

mäßigen Kreisbewegungen. Die Fixsterne haben nur ihre tägliche Bewegung. Jeder Planet aber hat zwei Bewegungen: eine tägliche völlig gleichmäßige Drehung um die Nord-Süd-Achse, die allen Himmelskörpern gemeinsam ist, und eine entgegengesetzte langsamere Bewegung der einzelnen Planeten, jeder in seiner eigenen Kreisbahn. Diese Kreisbahnen liegen schief zur Ebene des Äquators. Sie liegen alle sieben ungefähr in der Ebene der Ekliptik, aber sie können etwas davon abweichen.

Soweit ich das Weltbild des „Timaios“ bisher beschrieben habe, reicht es aus, um die mittleren Bewegungen der sieben Planeten zu erklären. Man braucht aber einen zusätzlichen Mechanismus, wenn man z. B. erklären will, warum Venus einmal links von der Sonne als Abendstern erscheint und dann wieder rechts von der Sonne als Morgenstern. Das hat Platon sehr wohl gewußt. Der Hauptredner des Dialoges, der Pythagoreer Timaios, sagt nämlich selbst, daß Venus und Merkur abwechselnd die Sonne überholen und von ihr überholt werden.

Zur Erklärung dieser Erscheinung hat die Dialogperson Timaios eine Theorie, die er aber nur in ganz dunklen Worten andeutet. Er sagt, daß die Kreise von Venus und Merkur „einen der Sonne entgegengesetzten Bewegungsantrieb (enantion dynamin) erhalten haben“. Einige antike Erklärer deuten das so: Die Sonne und Venus und Merkur haben je eine Epizykelbewegung, wobei die Epizykel von Venus und Merkur sich nach links drehen, der Epizykel der Sonne aber nach rechts. Diese Deutung ergibt astronomisch einen guten Sinn, und sie ist mit dem Platontext in Übereinstimmung. Ich habe das näher ausgeführt in einem Aufsatz „The Earliest Form of the Epicycle Theory“ im Journal for History of Astronomy, Band 5 (1974).

Es scheint mir ganz klar, daß das astronomische System, das den Dialogen „Politeia“ und „Timaios“ zugrunde liegt, den Pythagoreern zu verdanken ist. Die Argumente, die dafür sprechen, habe ich in der eben erwähnten Arbeit im Journal for History of Astronomy auseinandergesetzt. Taylor, der hervorragende englische Kommentator des „Timaios“ meint ebenfalls, daß dieser Dialog in allen Hauptsachen auf den Gedanken der Pythagoreer beruht. Die antiken Kommentatoren waren derselben Meinung, und Platon selbst deutet es dadurch an, daß er seine Kosmologie dem Pythagoreer Timaios in den Mund legt.

Dazu kommen noch einige spätantike Zeugnisse, die die Erfindung der Epizykel und Exzenter den Pythagoreern zuschreiben.

Damit bin ich am Ende meiner Beschreibung der vier Wissenschaften der Pythagoreer angelangt.

C.R.: NTM 16 1979,1 128 Schreiber.

Les Pythagoriciens ont nettement contribué à l'élaboration des quatre sciences mathématiques que sont l'arithmétique, la géométrie, l'«harmonique» et l'astronomie. Van der Waerden cherche à expliquer la cohérence de leur système qui accordait autant d'importance aux sciences qu'aux questions religieuses. Les positions de l'auteur sont soumises à discussion dans les pages qui suivent (17-24).

Diskussion

Herr Hirzebruch: Bitte, schildern Sie das Verfahren zur angenäherten Berechnung von $\sqrt{2}$.

Herr van der Waerden: Das ist ein wunderbares Verfahren. Es ist ein Algorithmus wie der euklidische Algorithmus zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers.

Man geht aus von einer ganz groben Näherung, nämlich von dem Verhältnis 1:1. Man nimmt eine Einheit als Diagonale und eine Einheit als Seite. Ich schreibe die Seiten oben und die Diagonalen unten:

$$\begin{array}{cccc} s & = & 1 & 2 & 5 & 12 \\ d & = & 1 & 3 & 7 & 17 \text{ usw.} \end{array}$$

Jetzt addiert man die beiden Einheiten: $1 + 1 = 2$. So erhält man die zweite Seite. Dann addiert man $2 + 1$ und erhält 3. Das ist die zweite Diagonale. Das Verhältnis von 3:2 ist schon eine bessere Näherung. Jetzt addiert man wieder senkrecht $2 + 3 = 5$ und dann waagrecht $2 + 5 = 7$. Man erhält das Verhältnis 7:5. Das ist schon eine gute Näherung für die Wurzel aus 2. Man fährt fort: $5 + 7 = 12$, $12 + 5 = 17$ usw.

So erhält man immer zwei Zahlen s und d , die die Bedingungen erfüllen: d^2 ist gleich $2s^2$ plus oder minus 1, abwechselnd plus 1, minus 1, plus 1, minus 1 usw.

Das haben die Pythagoreer bewiesen, wobei sie das Theorem 10 des zweiten Buches der Elemente von Euklid benutzten, wie Proklos uns mitteilt.

Herr Hirzebruch: Heute könnten wir auch sagen, daß es sich um einen Kettenbruch zur Lösung der Pellschen Gleichung handelt.

Kannten die Pythagoreer auch andere Kettenbruchentwicklungen? Gibt es in der alten Literatur, zum Beispiel, entsprechendes für $\sqrt{3}$?

Herr van der Waerden: Ich würde lieber sagen: Es ist die Umkehrung des euklidischen Algorithmus.

Die Pythagoreer bildeten, um immer höhere Zahlen zu bekommen, $s' = s + d$ und $d' = 2s + d$. So erhält man aus s und d zwei größere Zahlen, die eine bessere Näherung ergeben.

Wenn Sie aber den euklidischen Algorithmus auf s' und d' anwenden, dann erhalten Sie s und d . Der Algorithmus der Seiten- und Diagonalzahlen ist also eine Umkehrung des euklidischen Algorithmus. Und der euklidische Algorithmus wurde nach meiner Theorie von den Pythagoreern erfunden, denn das ganze 7. Buch stammt von den Pythagoreern. Beide Algorithmen sind großartige pythagoreische Erfindungen.

Herr Niemöller: Mein Interesse kommt von der Seite der Musiktheorie: Wäre der von Ihnen genannte Ausdruck „symphoner Zusammenklang“ wirklich so zu verstehen, daß ein simultaner Zusammenklang entstand? Dieser entstand dann auch später noch. Sie wissen ja, daß es in der Antike keine Mehrstimmigkeit gab.

Auch später im Mittelalter wird consonantia immer auf aufeinanderfolgende Töne bezogen, die im Intervallschritt eben konsonant oder nicht konsonant sind. Man kann gegenüber dem Monochord nur zwei Töne hintereinander zupfen, um die Abstände im Verhältnis 1:2 zu messen, so daß also auch nicht die Töne den Zahlen entsprechen, sondern Tonverhältnisse Zahlenproportionen sind.

Ich wollte nur deshalb darauf hinweisen, weil die ganze pythagoreische Theorie, soweit man ihr folgen darf, natürlich musiktheoretisch im Mittelalter bis zu Johannes Kepler geht, womit wieder die Zusammenhänge mit den späteren quadrivialen Wissenschaften erwiesen sind.

Das ist also auch für einzelne Fachdisziplinen, wie für die Musikwissenschaft, interessant, so etwa von der Akustik her, wo Zahlen eine wesentliche Rolle spielen, aber auch von der Philosophie seit der Antike her.

Insofern geht das vielleicht bis heute hin zur harmonikalen Grundlagenforschung von Hans Kaiser, wo eben auch kosmologische Zusammenhänge mit musikalischen Phänomenen im Zusammenhang stehen.

Herr van der Waerden: Die Pythagoreer haben beides betrachtet, sowohl das gleichzeitige Zusammenklingen als auch das aufeinanderfolgende Erklängen. Eine Aufeinanderfolge erhält man zum Beispiel, wenn man auf dem Monochord einen Ton spielt und dann die Saite auf die Hälfte verkürzt, wie es Pythagoras nach der Überlieferung gemacht hat. Wahrscheinlich ist diese Überlieferung richtig.

Die griechischen Musiker haben aber auch die Töne gleichzeitig erklingen lassen. Häufig kam es vor, daß die Begleitung einer Melodie eine Oktave höher erfolgte als die Melodie selbst. In der Definition des Begriffs „symphoner Zusammenklang“, wie sie, glaube ich, bei Ptolemaios steht, wird verlangt, daß die Töne sich, wenn man sie gleichzeitig ertönen läßt, im Ohr zu einem einzigen Klang vereinigen.

Es gibt diese Unterscheidung zwischen symphonem und emmelischem Zusammenklang. Die symphonen Zusammenklänge beziehen sich nach Definition hauptsächlich auf das gleichzeitige Erklängen – man kann sie aber auch nacheinander erklingen lassen –, während der Begriff „emmelisch“ vor allem auf Töne angewendet wurde, die nacheinander erklangen.

Herr Cl. Müller: 1. Bilden die Pythagoreer in der Geschichte der Kultur die erste Schule des Denkens, die den Grundgedanken der exakten Naturwissenschaften so klar herausgestellt hat?

2. Was weiß man über das Leben der Männer, die den Bund der Pythagoreer gebildet haben?

Herr van der Waerden: Die erste Frage war, ob die Pythagoreer als erste die exakten Wissenschaften in dieser Breite aufgebaut haben. Das bejaht Aristoteles ausdrücklich. Er sagt: Die in Italien, die sogenannten Pythagoreer, waren die ersten, die sich mit Mathemata befaßt und diese Wissenschaften weitergebracht haben. Das steht im Text.

Nur ist daran eine Korrektur anzubringen. Aristoteles hat, als er diesen Text schrieb, nicht so sehr an die Geometrie, sondern in erster Linie an die Arithmetik, an die Harmonik und an die Astronomie gedacht; denn er sagt ausdrücklich einen Satz später, daß in diesen Wissenschaften die Zahlen das erste seien. Und das stimmt für die Geometrie nicht. Für die Geometrie stimmt auch nicht, daß die Pythagoreer die ersten waren, schon Thales hat gute Geometrie betrieben. Das war die Antwort auf die erste Frage.

Entschuldigen Sie, wie lautete die zweite Frage?

Herr Cl. Müller: Ich würde gern etwas mehr über die Lebensbedingungen dieses Kreises wissen, was es für Männer waren und wie sie gelebt haben.

Herr van der Waerden: Es gab zwei Gruppen von Pythagoreern, die akusmatikoi und die mathematikoi. Die akusmatikoi legten hauptsächlich den Nachdruck auf die akusmata, das heißt auf das Gehörte. Das,

was Pythagoras gelehrt hatte, wurde möglichst unverändert weiterüberliefert. Es war gewissermaßen das heilige Wort. Daran durfte kein Jota geändert werden. Einer der Kommentatoren sagt: Wer am meisten akusmata auswendig gelernt hat, galt am höchsten. Diese Lehre wurde zu einem großen Teil als religiöse Lehre geheimgehalten.

Dagegen haben die mathematikoi zwar auch die religiöse Lehre von Pythagoras respektiert, sie trieben aber daneben auch Mathematik und hielten ihre mathemata nicht geheim. Das haben ihnen die anderen übelgenommen.

Dann gab es ein großes Schisma. Dabei wurde der schon genannte Hippasos vom Pythagoreer-Orden ausgeschlossen und ist dann, wie die Legende sagt, später zur Strafe für seine Indiskretion oder für die Offenbarung von Geheimnissen mit einem Schiff untergegangen. Die Götter haben ihn bestraft.

Was weiß man über ihr Leben? Man weiß ziemlich viel über ihre Sittenlehre. Es gibt sittliche Traktate darüber, wie sich die Menschen zu verhalten haben. Man kann annehmen, daß sie sich wie die mittelalterlichen Klosterorden nicht immer genau an diese hohen Prinzipien gehalten haben, daß diese aber doch im Grunde genommen maßgebend waren.

Sie mußten zum Beispiel ihren Familienbesitz in den Orden einbringen, denn sie hatten einen gemeinsamen Besitz. Das führte natürlich zu großen Schwierigkeiten, da die Eltern es nicht gern sahen, wenn beispielsweise der Sohn seinen Familienbesitz in den Orden einbrachte.

Sie hatten auch einen großen politischen Einfluß. Es gab Gemeinschaften von Pythagoreern in allen süditalienischen Städten, so in Kroton, in Syrakus, in Tarent usw. Sie hielten alle miteinander zusammen und hatten einen großen Einfluß auf das politische Leben der Städte.

Das hat sogar zweimal zu Revolten geführt; man hat sich gegen die Pythagoreer gewehrt. Als sie einmal in Kroton im Vereinshaus versammelt waren, wurde dieses von ihren Feinden angezündet, wobei sehr viele Pythagoreer umgekommen sind. Die anderen haben sich dann zerstreut. Einige sind nach Tarent gegangen und andere nach Theben auf das Festland. Die Klostersgemeinschaft hörte auf zu existieren, aber unterirdisch haben sie doch ihre Lebensgemeinschaft weitergeführt. Sie hatten aber keinen politischen Einfluß mehr.

Herr Hamm: Meinem Eindruck nach ist die griechische Geometrie weniger ausschließlich als andere Disziplinen von den Pythagoreern geprägt worden. Hängt dies vielleicht damit zusammen, daß die An-

wendung des pythagoreischen Grundsatzes „Alles ist Zahl“ auf die Geometrie problematisch ist?

Herr van der Waerden: Man muß verschiedene Gruppen von Pythagoreern unterscheiden, und zwar muß man nicht nur Akusmatiker und Mathematiker in Betracht ziehen, sondern auch diejenigen, die Metaphysik betrieben und nachgedacht haben über den ersten Ursprung der Dinge.

Der Ausspruch „Alles ist Zahl“ stammt vielleicht von Pythagoras selbst, vielleicht auch von der Gruppe, die unter religiösen Gesichtspunkten Metaphysik betrieb und über den Ursprung aller Dinge nachdachte, während die mathematikoi mehr daran interessiert waren, logisch die mathematischen Wissenschaften aufzubauen.

Herr Peschl: Hat Pythagoras irgendwelche Kontakte mit dem Orient, mit Ägypten oder Babylon gehabt?

Herr van der Waerden: Das ist eine sehr umstrittene Sache. Die Überlieferung sagt, daß Pythagoras nach Ägypten gereist ist, sich dort in alle Mysterien hat einweihen lassen und alle religiösen Lehren gierig aufgenommen hat. Er ging dann nach Babylon, wo er von den dortigen Magiern in der Astronomie, Arithmetik usw. unterwiesen wurde.

Er soll übrigen auch schon in Ägypten exakte Wissenschaften gelernt haben. Es gibt Gelehrte, die kein Wort von diesen Legenden glauben. Ich gehöre nicht dazu. Ich meine, daß in diesen Legenden zwar einige sachliche Fehler nachzuweisen sind, daß aber dennoch ein Einfluß vom Orient her, insbesondere von Babylon, nicht geleugnet werden kann.

Herr Dörrie: Ich danke Ihnen sehr dafür, daß Sie das Nebeneinander und das Miteinander in der pythagoreischen Bewegung hervorgehoben haben, nämlich auf der einen Seite etwas religiös Lebensreformerisches und auf der anderen Seite sicher Ansätze zur exakten Wissenschaft.

Herrn Cl. Müller würde ich erwidern, daß dort sicher ein Ansatz zur exakten Mathematik gefunden wurde, aber man ist nur zufällig darauf gestoßen, so wie Kolumbus auf Amerika. Man suchte eigentlich etwas anderes. Man hat sicher die Ganzheitlichkeit eines Weltbildes und darin eingeschlossen des Überweltlichen gesucht. Man hat sich, was heute kein Gelehrter wagen würde, mit Ansätzen zufriedengegeben und das Weitere, wie Sie es vorhin angedeutet haben, späterer Untersuchung überlassen.

Ich möchte aber bei einer Skizzierung dieser pythagoreischen Bewegung noch mehr dies unterstreichen, daß die Pythagoreer alles mögliche Wissen, das in Griechenland und vermutlich auch im Orient erreichbar war, an sich zogen. Dafür ist ein Beispiel dieses: Sicher kannten die Pythagoreer von den fünf regelmäßigen Körpern drei, und zwar die drei einfachen.

Während der Zeit, über die Sie uns berichtet haben, ist vermutlich von Theaitetos der Zwölfflächer und der Zwanzigflächer hinzugefunden und der wichtige Beweis geführt worden, daß es weitere als diese fünf Körper nicht geben kann.

Das haben sich die Pythagoreer sogleich zu eigen gemacht, und es ist alsbald eine Überlieferung entstanden, als wenn alles dieses schon im pythagoreischen Kreise erörtert worden wäre. Man muß also vielleicht doch etwas mißtrauisch gegen globale Zuordnungen sein. Freilich haben wir kaum die Möglichkeit, den Pythagoreern in der Mitte des 5. Jahrhunderts ein bestimmtes Diktum abzusprechen. Die Überlieferungen sind dazu zu ungenügend.

Ich möchte nun noch dies erwähnen, daß wohl die Mehrzahl meiner Fachkollegen die Schriften, die unter dem Namen des Archytas umlaufen, nicht der vor-platonischen Antike, sondern vermutlich dem 1. Jahrhundert, vielleicht sogar dem 2. Jahrhundert nach Christus zuzuordnen würden.

Da müßte man, glaube ich, die Frage nach der Möglichkeit späterer Fälschung sehr sorgfältig prüfen; denn daran hängt es ja nun, ob das 8. Buch des Euklid von Archytas abhängt oder etwa eine Harmonik des Archytas aus dem 8. Buch abgeleitet sein könnte. Diese kleine Unsicherheit wollte ich zu bedenken geben.

Herr van der Waerden: Ich danke sehr für dieses Votum. Die Gesichtspunkte, die Sie hervorgehoben haben, sind sicher sehr richtig.

Hinsichtlich der regelmäßigen Körper muß ich jedoch etwas berichtigen. Die Pythagoreer haben drei dieser Körper gekannt, während die beiden anderen erst von Theaitetos sind. Aber es sind nicht die drei einfachsten. Das Merkwürdige ist, daß sie das Tetraeder, den Würfel und das Dodekaeder gekannt haben, nicht aber das Oktaeder.

Das Oktaeder, das mühelos zu konstruieren ist, hatten die Pythagoreer nicht. Neulich ist als Erklärung von einem amerikanischen Autor vorgeschlagen worden, sie hätten gar nicht danach gesucht, alle regelmäßigen Körper zu konstruieren. Das sei nicht ihre Problemstellung gewesen.

Herr Dörrie: Ich habe dies nur anführen wollen, um die Tendenz zu illustrieren, daß die Pythagoreer sehr vieles an sich gezogen haben. Sie mußten ja darauf zielen, das gesamte Wissen zu vertreten, so daß vermutlich nicht wenige mathematische Entdeckungen, an denen die Zeit damals reich war, in die pythagoreische Enzyklopädie hineingezogen worden sind, was wir nicht immer von den Quellen her bestreiten oder beweisen können. Dafür sollte das Gesagte nur ein Beispiel sein.

Herr van der Waerden: Zu den Archytas-Fragmenten möchte ich noch etwas bemerken.

Die Information über Archytas und die Musiktheorie von Archytas stammt nicht aus den Fragmenten von Archytas. Über die Echtheit der Fragmente von Archytas habe ich gar kein Urteil. Die Information über die Musiktheorie von Archytas stammt von Ptolemaios, und zwar aus der Harmonik von Ptolemaios. Ptolemaios gibt die Zahlenverhältnisse von drei Tonleitern wieder, die Archytas berechnet hat.

Das hat also mit der Echtheit der ethischen Fragmente gar nichts zu tun, sondern stammt aus einer fachmathematischen, das heißt musiktheoretischen Quelle.

Außerdem gibt es bei Boethius ein mathematisches Theorem von Archytas, das samt Beweis überliefert ist. Für das Theorem gibt es einen ganz anderen Beweis in der „sectio canonis“ des Euklid, aber Archytas hat den Satz anders bewiesen als Euklid. Archytas brauchte diesen zahlentheoretischen Satz in seiner Musiktheorie. Diese Musiktheorie müssen wir Archytas zuschreiben, unabhängig von der Echtheit der Fragmente.

Herr Schmitz: Soweit mir bekannt ist, hat schon Herakleides von Pontos etwa um das Jahr 300 v. Chr. das heliozentrische System vertreten. War diese Tatsache den Pythagoreern nicht bekannt?

Herr van der Waerden: Die Frage nach dem astronomischen System von Herakleides von Pontos ist sehr umstritten. In dem neuesten Buch von Neugebauer über die Geschichte der Astronomie wird eine Interpretation vertreten, in einem neu erschienenen Aufsatz von Salzer eine andere. Ich habe in meinen Arbeiten wieder eine andere vertreten. Die Sache ist so schwierig, daß ich darüber jetzt nicht diskutieren kann.

Herr Hamm: Inwieweit haben sich die pythagoreischen Mathematiker um die Philosophie gekümmert?

Herr van der Waerden: Ich will einmal drei traditionelle Teile der Philosophie unterscheiden: Erkenntnistheorie, Ethik und Metaphysik.

Eine Erkenntnistheorie haben die pythagoreischen Mathematiker gehabt. Sie haben nicht nur einzelne Wissenschaften entwickelt, sondern sie haben auch die Zusammenhänge zwischen beiden Wissenschaften untersucht. Sie haben die Frage nach der Methode und dem Objekt der Wissenschaft gestellt. Sie haben also richtige erkenntnistheoretische Untersuchungen angestellt. Darüber habe ich eine Arbeit geschrieben, die „Erkenntnistheorie der Pythagoreer“ heißt und in dem einzigen Band der Zeitschrift *Rete*, der erschien, veröffentlicht wurde.

Metaphysik haben die Pythagoreer, insbesondere Philolaos, sehr intensiv betrieben, aber diese Metaphysiker haben nach der Meinung von Aristoteles sehr viel Unsinn gemacht. Hier bin auch ich ganz der Meinung von Aristoteles, denn was Philolaos macht, ist zum größten Teil Unsinn.

Diese Gruppe von Pythagoreern, die schlechte Metaphysik gemacht haben, möchte ich sehr deutlich unterscheiden von den Pythagoreern, die gute Wissenschaft betrieben haben.

Was die Ethik betrifft, so kann ich sagen, daß es eine ausgedehnte Literatur gibt, die aber mit den exakten Wissenschaften wenig zu tun hat.