

Verwandtschaft der gleichmäßigen Zwölfer- temperierung mit der pythagoräischen Stimmung

Obwohl in der gleichmäßigen Zwölftertemperierung jedes Intervall innerhalb der Oktave eine Verstimmung erleidet, trifft dieses Schicksal auch hier nicht alle Intervalle mit gleicher Härte. Die einen werden in ihrer Reinheit nur wenig getrübt, die anderen stärker. Die Untersuchung soll sich der Einfachheit halber auf die Intervalle der Durskala beschränken. Sie vereinfacht sich noch mehr, wenn vorweg Klarheit darüber geschaffen wird, in welchem Verhältnis die Größe des syntonischen Kommas K zu derjenigen des pythagoräischen Kommas P steht.

Die Intervallwerte der beiden Kommata betragen:

$$K = 81/80 = 3^4/2^4 \cdot 5$$

$$P = (3/2)^{12}/2^7 = 3^{12}/2^{19}$$

Betrachten wir diese beiden Restintervalle so, wie sie für unser Ohr auftreten, als Tonschrittgrößen, so dürfen wir K und P nicht als Intervallzahlen auffassen, sondern müssen zu deren Logarithmen übergehen. Zu ihrer Berechnung brauchen wir als Fundament die Logarithmen von 2, 3 und 5.

$$\log 2 = 0,3010\,3000$$

$$\log 3 = 0,4771\,2125$$

$$\log 5 = 0,6989\,7000$$

Berechnung der Tonschrittzahl $\log K$:

$\log (3^4) = 4 \cdot \log 3 = 1,9084\,8500$	}	
$\log (2^4) = 4 \cdot \log 2 = 1,2041\,2000$		
$\log 5 = 0,6989\,7000$		
$\log (2^4 \cdot 5) = 1,9030\,9000$		
$\log K$		$= 0,0053\,9500$

Berechnung der Tonschrittzahl $\log P$:

$$\left. \begin{array}{l} \log (3^{12}) = 12 \cdot \log 3 = 5,7254\,5500 \\ \log (2^{19}) = 19 \cdot \log 2 = 5,7195\,7000 \end{array} \right\} \\ \log P = 0,0058\,8500$$

Die Rechnung ergibt also, daß die beiden Tonräume von K und P sich fast genau wie die Zahlen 539 und 588 verhalten. Da in beiden Zahlen der Faktor 49 steckt, in 539 11mal, in 588 12mal, so ist das Verhältnis der Tonräume von K und P fast genau

$$11 : 12.$$

Mit diesem Ergebnis in der Hand ist es leicht, die Verstimmungen zu beurteilen, welche die Intervalle der Durskala durch die gleichmäßige Temperierung erfahren.

Man gehe von dem bekannten 6-stöckigen Turm reiner Quinten Q aus, deren Verlagerung in den Oktavraum $c - c'$ die pythagoräisch gestimmten Tonräume liefert:

F	c	g	d'	a'	e''	h''
—Q	0	Q	2Q	3Q	4Q	5Q

Q ist darin als Tonschrittzahl gemeint. Aus diesem Turm gehen zwei andere Quintenreihen hervor, einerseits die durch Verfüpfung der Intervallzahlen von a' , e'' und h'' bedingte, welche an diesen drei Tonstufen eine Rückschiebung um den Betrag des Tonschrittes K bewirkt, andererseits die durch gleichmäßige Temperierung bedingte, welche aus dem Schritt Q den Schritt $Q - P/12$ macht. Bezeichnen wir den Verengungsbetrag $P/12$ mit v , so dürfen wir auf Grund der vorher abgeleiteten Beziehung zwischen K und P die Rückschiebung K mit $11v$ ansetzen. Nach der im 5. Kapitel erwähnten und von Helmholtz eingeführten Bezeichnungsweise werden durch Rückschiebung der Tonstufen a' , e'' und h'' um den Betrag K aus denselben die Tonstufen $\underline{a'}$, $\underline{e''}$ und $\underline{h''}$. Die Tonbuchstaben der durch gleichmäßige Temperierung entstandenen verengten Quinten mögen durch Einklammerung der alten Bezeichnung ausgedrückt werden. So entstehen die beiden Tonfolgen:

F	c	g	d'	$\underline{a'}$	$\underline{e''}$	$\underline{h''}$
—Q	0	Q	2Q	$3Q - 11v$	$4Q - 11v$	$5Q - 11v$
(F)	(c)	(g)	(d')	(a')	(e'')	(h'')
$-Q + 1v$	0	$Q - 1v$	$2Q - 2v$	$3Q - 3v$	$4Q - 4v$	$5Q - 5v$

Ein Vergleich dieser beiden Reihen zeigt sofort:

- 1) Von F nach (F) Verschiebung $+1v$
- 2) „ c „ (c) „ $0v$
- 3) „ g „ (g) „ $-1v$

- 4) Von d' nach (d') Verschiebung $-2v$
- 5) „ $\underline{a'}$ „ (a') „ $+8v$
- 6) „ $\underline{e''}$ „ (e'') „ $+7v$
- 7) „ $\underline{h''}$ „ (h'') „ $+6v$

Da die gleichmäßige Temperierung die Oktave nicht erfaßt, ändern sich die Verschiebungsbeträge nicht, wenn die obigen Tonstufen in den Oktavraum $c - c'$ verlagert werden. Für den Übergang von der unverstimmten Durskala zur gleichmäßig temperierten ergeben sich somit die Verschiebungsbeträge:

(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	(a)	(h)	(c')
0v	$-2v$	$+7v$	$+1v$	$-1v$	$+8v$	$+6v$	0v

Durch die gleichmäßige Temperierung sind, wie man erkennt, Quint und Quart am wenigsten in Mitleidenschaft gezogen, sie haben eine gegengleiche Verstimmung erlitten. Auch die Sekunde hat noch wenig gelitten; sie hat die doppelte Verstimmung von Quint oder Quart erfahren. Am stärksten sind die verfunften Intervalle, also Terz, Sext und Septim, verlagert worden, und zwar haben sie sich wieder bedenklich nahe an die entsprechenden pythagoräischen Tonstufen herangearbeitet. Denn eine Vorverlegung um $K = 11v$ hätte dieselben genau ergeben. Da Terz, Sext und Septim für das Durgeschlecht charakteristisch sind, hat dieses durch die gleichmäßige Temperierung eine Einbuße erlitten. So macht jene das Neue, welches das Terzerlebnis in die Musik hineingebracht hatte, wieder teilweise rückgängig. Der Schwerpunkt der Skala ist wieder von der Terz nach dem Intervallpaar von Quint und Quart gerückt, die in gegengleicher Verstimmung nahezu rein erklingen, da ihre Trübung um $1/12$ des pythagoräischen Kommas kaum bemerkbar ist.

Auch bei der 41er- und der 53er-Temperierung stellte sich heraus, daß die Gruppe Quint, Quart und Sekund weit weniger als die Gruppe Terz, Sext und Septim verstimmt wird. Der Grund für dieses übereinstimmende Verhalten ist darin zu suchen, daß in allen drei Temperierungen von dem messenden Vergleich von Quintentürmen mit Oktavtürmen ausgegangen wird und diejenigen Quintentürme auserwählt werden, welche von einem Oktavturm so wenig wie möglich differieren. Dieser Minimalunterschied wird alsdann auf die einzelnen Quinten des Turms gleichmäßig verteilt und fällt so pro Quinte besonders winzig aus. Das Verfahren sieht es also von vornherein auf eine mögliche Schonung der Quinte ab. Mit ihr werden dadurch auch die beiden quintverwandten Intervalle der Quarte und der Sekunde, die eine Doppelquinte ist, geschont. Terz, Sext und Septim, eine durch ihre Bindung an die quintenfremde Primzahl 5 abseitige Gruppe, kommen in dem Maße ihrer Quintenfremdheit bei dem Prozeß zu kurz und haben somit die Hauptlast der Verstimmung zu tragen.

Von der Seite der Naturtonreihe her gesehen, hat die gleichmäßig temperierte Stimmung deren beide ersten Oktavräume nicht oder kaum verändert, den ersten, ja noch leeren Oktavraum nicht, den zweiten, Quint und Quart enthaltenden Oktavraum kaum. Erst der dritte Oktavraum, in welchem die weite Terz (Septdezime) mit der Intervallzahl 5 erscheint, fällt ihr wegen stärkerer Verstimmung der Terz zum Opfer. Im Vorausblick auf die späteren Kapitel kann es auch interessieren, in welchem Maße der ja ebenfalls im dritten Oktavraum liegende 7. Teilton mit der Intervallzahl 7, der unmittelbar vor der weiten kleinen Septime des Klanggrundtons liegt, von deren temperierter Lage abweicht. Die Rechnung würde ergeben, daß die Verstimmung der natürlichen weiten Septime (7. Teilton) zur temperierten weiten kleinen Septime den enormen Betrag von $+16v$ in unserer 12er-Temperierung erreicht, sodaß unsere Tasteninstrumente sehr ungeeignet sind, einen Eindruck von dem Klangcharakter der natürlichen Septime zu vermitteln. Aus dem dritten Oktavraum der Naturtonreihe

4	5	6	7	8
c	e	g	—b	c'

wird somit in temperierter Stimmung

(c)	(e)	(g)	(b)	(c')
0v	+7v	—1v	+16v	0v

Die gleichmäßig temperierte Stimmung stellt den auf das Empfinden der Terz und der terzverwandten Intervalle eingestellten Hörer vor die Aufgabe, sich durch die wirklich erklingenden Töne nicht irreführen zu lassen. Doch damit stehen wir bereits vor der Frage nach Wert und Unwert der temperierten Stimmung.

11. KAPITEL

Wert und Unwert der temperierten Stimmung Zwölftonprobleme

Die Frage, wie die Ersetzung der reinen Stimmung durch die temperierte zu bewerten ist, hat die Geister von jeher beschäftigt und nicht zur Ruhe kommen lassen. Bei ihrer Beantwortung muß man sich zunächst darüber klar sein, daß das Verlangen nach der reinen Stimmung der Seele des neuzeitlichen Menschen tief eingewurzelt ist. Bei der Vorführung der ungeheuer komplizierten Thompson-Organ wurden auch die Mitglieder einer englischen Sängergemeinschaft, der

Ernst Bindel greift in diesem umfangreichen Werk, das jetzt als Neuauflage in einem Band vorliegt, die tiefe Verbindung von Musik und Mathematik auf, wie sie schon bei Pythagoras, im mittelalterlichen „Quadrivium“ und in Keplers „Weltharmonik“ bestanden hat, und führt sie auf einer unserer Zeit entsprechenden Stufe weiter. Dabei gelingt es ihm einerseits, eine Gliederung der Musikgeschichte zu entwickeln, die in eindrucksvoller Weise die Bewußtseinsentwicklung der Menschheit hervortreten läßt. – Andererseits wird hier eine mathematische Betrachtung der Musik vorgeführt, die die Welt der abstrakten Zahlen zu einer qualitativ-schöpferischen Welt werden läßt und damit der Musik ein künstlerisches und wissenschaftliches Fundament zugleich verleiht.

Ernst Bindel, 1890 in Magdeburg geboren, war nach seinem Studium der Mathematik, Physik und Chemie lange Jahre pädagogisch tätig, bevor er der Anthroposophie Rudolf Steiners begegnete. Durch sie wurde er an die erste Waldorfschule in Stuttgart geführt, deren Wirksamkeit in der Öffentlichkeit durch seine schriftstellerische Tätigkeit besondere Förderung erfuhr. Seine Werke haben in der europäischen Kulturwelt ein deutliches Echo gefunden und wurden zum Teil in mehrere Sprachen übersetzt. Ernst Bindel starb im Alter von 84 Jahren in Stuttgart.

Johann Nepomuk David: „Dieses Bindelsche Buch kann viele ernste Musiker bei inneren Entscheidungen kräftigen. Ich halte es für eine Hilfe und für so umfassend, wie sie dem Musiker bislang noch nicht geboten wurde. Dem Theoretiker aber ist es eine Fundgrube nicht allzeit offenliegender Dinge, die so klar und ruhig dargestellt werden, daß man durch die Diktion allein schon wieder ein Kunstwerk vor sich hat, das Bewunderung verdient.“

Paul Hindemith: „Zweifellos wird das Buch als willkommene Bereicherung der Literatur für den Theorieunterricht angesehen werden.“

Schutzumschlag: Walther Roggenkamp unter Verwendung einer harmonikalen Schwingungsfigur aus „Kymatik“ von Hans Jenny. Der im schlierenoptischen Verfahren aufgenommene Flüssigkeitstropfen wurde durch einen bestimmten Ton zur Schwingung angeregt.

DIE ZAHLENGRUNDLAGEN DER MUSIK IM WANDEL DER ZEITEN