

LA INCONMENSURABILIDAD Y EL PROBLEMA DE LA CONSTITUCION DE LA MATERIA EN LA TEORIA PITAGORICA

Isidoro Muñoz Valle

661
MUNOZ VALE, S.
1976

El teorema de Pitágoras provocó el descubrimiento de la inconmensurabilidad de la diagonal de un cuadrado con sus lados. Este descubrimiento constituyó un rudo golpe para los primeros pitagóricos, que creían que «las cosas son números enteros». (E.d., creían que las figuras geométricas se identificaban con números enteros, y, en último término, también el mundo físico). Ahora resultaba que el fundamento para la construcción de un triángulo rectángulo no puede encontrarse en ninguna proporción entre números enteros. La fecha del descubrimiento de los irracionales ha sido muy discutida. Es anterior sin duda a Platón (1). Según van der Weerden (2), el descubrimiento de la irracionalidad del 2 fue obra de la escuela pitagórica a mediados del s. V, partiendo de su teoría de los números pares e impares. (Como indica Aristóteles (3), si la diagonal fuese commensurable, el mismo número tendría que ser impar y par).

Qué actitud adoptan los pitagóricos ante ese descubrimiento? Recurrieron a la llamada «teoría del flujo».

En la primera etapa pitagórica, antes de sufrir los embates de Zenón, su creencia era que las unidades aritméticas son puntos extensos. Se identifica la unidad aritmética y el punto geométrico. La unidad (1) genera los demás números. Dada la identidad entre los números y las figuras geométricas, «el 1 es el punto, el 2 la línea el 3 el triángulo y el 4 la pirámide» (5). Si el 1 es un punto y los demás números son engendrados por él, los demás números son puntos. La línea, por tanto (que equivale al dos), está constituida por dos puntos extensos y discretos, colocados uno junto al otro. El 3 se identifica con el triángulo (3 puntos), la figura plana más simple, y el 4 con la pirámide o tetraedro (4 puntos), que es el sólido más simple. Como resulta que las figuras geométricas tienen existencia real (6), la conclusión es que las magnitudes (la

(1) Teeteto 147 d, en que se indica que el problema era ya conocido anteriormente.

(2) «Die Arithmetik der Pythagoreer», *Mathematische Annalen*, 1948, p. 152-3. Sobre este punto vease la obra de K von Fritz *Grundprobleme der Geschichte der antiken Wissenschaft*, Berlin 1971; «Die Entdeckung der Inkommensurabilität durch Hippasos von Metapont», pp. 545 ss.

(3) *Analyt. Prior.* 41 a 26.

(4) Cf. Alejandro de Afrodisia, *Metaph.* 512, 37.

(5) Espeusipo en *Theolog. Arith.*, p. 84, 10, ed. De Falco; DK 44 A 13. Esta tratado se atribuye a Jámblico y se supone que se basa en Nicómaco de Gerasa, que escribe hacia el a. 100 d. C. su *Introd. a la Arith.* Pero el autor indica expresamente que el pasaje citado remonta a Espeusipo, el sobrino de Platón y su sucesor en la dirección de la Academia, que había escrito una obra *Sobre los Números Pitagóricos*. Espeusipo afirma en dicho pasaje que el número diez, además de las relaciones básicas musicales, contiene también las fórmulas de la línea, de la superficie y del sólido; pues el 1 es un punto, el dos una línea, el 3 un triángulo y el 4 una pirámide. Poco después dice que el punto es el primer principio respecto a la magnitud; la línea, el segundo; la superficie, el tercero; y el sólido, el cuarto. En el mismo pasaje se indica que su obra *Sobre los Números Pitagóricos* se inspira sobre todo en Filolao (*Theol. Arith.* 82, 10, ed. Falco) de quien hablaremos más adelante.

(6) Cf. Aristóteles, *Metaph.* 1090 b 5. La prueba más palmaria de que tienen existencia real es el tetraedro (compuesto de 4 unidades-puntos-átomos), el sólido geométrico más simple, que ya es de por sí un cuerpo físico.

materia física) están formadas por la yuxtaposición de puntos discretos, puntos que son a la vez extensos. Para los pitagóricos, la generación de los números y la de los elementos de la geometría y la del universo físico es una y la misma: todo procede de la primera unidad-germen (7); la coincidencia entre la primera unidad y el germen que origina el cosmos se indica expresamente en Teón de Esmirna (8).

Pues bien, esta concepción de las figuras geométricas (y de la materia física) como formadas por números enteros sufrió un primer ataque al descubrirse la incommensurabilidad, según queda dicho: ninguna proporción entre números enteros puede ser la base para la construcción de un triángulo rectángulo. Por otra parte, las críticas de Zenón iban dirigidas contra esa visión de las magnitudes constituidas por puntos discretos y a la vez extensos. La solución a estas objeciones se buscó en la «teoría del flujo».

Pero antes ya salieron al paso a dichas objeciones Filolao y Eurito de Tarento, dos pitagóricos contemporáneos de Demócrito (9). Según Kirk-Raven (10), en un pasaje de la *Metafísica* de Aristóteles (11), se contiene ya una nueva teoría de la constitución de las figuras geométricas (y de la materia): la línea no está formada por dos puntos extensos y yuxtapuestos; la línea es una extensión de magnitud continua; lo que hacen esos dos puntos es limitarla, es decir, los puntos no constituyen la línea sino que son sus límites (la línea está formada por la continuidad, por lo «ilimitado»). Esta concepción de los puntos como límites aparece asignada a Eurito por Aristóteles en otro pasaje de la *Metafísica* (12).

(7) Cf. Aristóteles, *Metaph.* 1091 a 12; *Phys.* 213 b 22; Alejandro de Afrodisia, citado en nota 4.

(8) Al hablar de la *sexta tetraktys* 97, 17 ed. Hiller. Recoge once *tetraktys*, tomadas todas probablemente de un autor pitagórico (si se exceptúa la segunda, a propósito de la cual alude expresamente al *Timeo* de Platón). Dice Teón que la «sexta *tetraktys* corresponde a los seres que reciben la existencia por generación. El esperma es semejante a la mónada y al punto; su aumento en longitud se asemeja a la díada y a la línea; el aumento en anchura, a la tríada y a la superficie; el aumento en grosor, a la tétrada y al sólido». Así pues, el mismo proceso da origen a los números, a las figuras geométricas y a los seres del mundo físico.

(9) D. La., IX 38. Ambos fueron maestros de toda una generación de seguidores del pitagorismo (D. La., VIII 46). Cebes, el personaje del *Fedón* (61 e), se contó entre los oyentes de Filolao. Sobre los problemas de la obra y los «fragmentos» de Filolao, cf. J. E. Raven, *Pythagoreans and Eleatics*, Cambridge 1948, p. 94 ss.; Kirk-Raven, *Los Filós. Presocr.*, tr. esp., Madrid 1969, pp. 429 ss.; Guthrie, *A History of Greek Philos.*, Cambridge 1962, I, pp. 329 ss.

(10) O. c., pp. 441 ss. Esta hipótesis ya aparece formulada en Raven, *Pythag. and El.*, p. 109. Es ahí donde afirma que para refutar las objeciones de Zenón, Filolao y Eurito elaboraron la nueva teoría que aquí exponemos, teoría anterior a la del «flujo», que, según Raven, se ha de fechar por la época de los pitagóricos contemporáneos de los discípulos de Platón que la acogieron. Guthrie (o. c., I, p. 264) se limita a exponer la hipótesis de Raven sobre la teoría de Filolao y Eurito sin hacerla propia ni rechazarla. En cambio, cree que la «teoría del flujo» que exponemos a continuación, es propia de la Academia, posiblemente de Jenócrates. Como otras doctrinas platonianas fue atribuida a los pitagóricos por autores tardíos que apenas distinguieron entre la escuela de Platón y la de Pitágoras. De hecho hay gran influjo pitagórico en Platón y sus seguidores. Pero, de todos modos, Aristóteles cuando habla de la «teoría del flujo» (*De An.* 409 a 3), lejos de presentarla como pitagórica, da a entender que es propia de Jenócrates y sus compañeros de la Academia. Sobre este punto volveremos más adelante.

(11) *Metaph.* 1036 b 8. Los partidarios de la teoría que expone aquí Aristóteles son los pitagóricos, según indica Alejandro de Afrodisia (cf. Kirk-Raven, o. c., p. 441).

(12) *Metaph.* 1091 b 8, en que se expone una de las teorías propuestas para explicar como los números son la causa de las sustancias y del ser. A continuación se expone la de Eurito: los números se conciben como límites, a la manera como los puntos límites de magnitudes.

Se cuenta (13) que Eurito utilizaba guijarros para delinear la forma externa de un hombre, un caballo, una planta. La explicación que parece más adecuada (14) es que con los guijarros delimitaba las superficies peculiares del hombre, p. ej., y contaba después el número de puntos que limitaban esas superficies (c.d., el número de guijarros). Así como el tetraedro podía ser representado por el número 4 (que es el número de puntos que delimitan sus superficies), de la misma manera el hombre o el caballo podía ser representado por el número de puntos (guijarros) necesarios para limitar las superficies que comprendían su dibujo (250 para el dibujo del hombre en la suposición que recoge Alejandro de Afrodisia) (15). Así la esencia del objeto dibujado, expresada en sus términos más generales, consistía en el número de puntos limitadores.

Con esta nueva concepción de los puntos como límite de las superficies la generación pitagórica de la época de Filolao y Eurito trató de responder a las objeciones de Zenón (16).

Como queda dicho en líneas precedentes, la «teoría del flujo» es un paso más allá de la «teoría de los puntos-límite» en el propósito de responder a las objeciones de Zenón y de resolver el problema de las magnitudes incommensurables (17).

En la más antigua doctrina pitagórica los números, las figuras geométricas y los cuerpos físicos se generaban a partir de una progresión aritmética. La nueva doctrina propone una progresión geométrica. Ya no se trata de la generación de la línea, el triángulo y la pirámide (1, 2, 3, 4), sino de la generación de la línea, el cuadrado y el cubo (1, 2, 4, 8). Aristoteles menciona esta innovación en el libro primero del tratado *Sobre el alma* (18), entre las diversas teorías sobre la naturaleza del alma. En este caso se define el alma como «un número que se mueve a sí mismo», definición que rechaza el filósofo. Los principios básicos de esta teoría, según Aristoteles son: «el punto es una unidad dotada de posición. El punto en movimiento forma una línea; la línea en movimiento forma una superficie». Como hemos indicado en la nota 10 de este trabajo, Aristoteles no cita el nombre del propugnador de estas ideas, aunque hay motivos para creer que se refiere a Jenócrates, el discípulo de Platón (19). El filósofo escéptico Sexto Empírico, a fines del s. II d. C., en su tratado *Adv. Math.* (20), expone también la «teoría del flujo», advirtiendo que es posterior a la de los puntos constitutivos de las figuras geométricas. Afirma con toda

(13) Aristoteles, *Metaph.*, I, c. en la n. 12; Alejandro de Afrodisia, *Metaph.* 827, 9; Teofrasto, *DK* 45, 2.

(14) Kirk-Raven, *o. c.*, p. 440 ss.

(15) *O. c.*; I, c. en la nota 13.

(16) Por otra parte los pitagóricos postparmenídeos ya no conceptuaron la unidad como impar sino que, según ellos, participa de la naturaleza de lo impar y de lo par (si se añade a un número par lo hace impar; si se añade a uno impar lo hace par), como indica Teón de Esmirna, p. 21, 20 ed. Hiller. Ahora la unidad no se identifica ya con el Límite, sino que participa de la naturaleza del Límite y de lo Ilimitado. No se sigue considerando a la primera unidad como punto de partida de la cosmogonía en el sentido de que deba su nacimiento a la «inhalación» de vacío desde lo Ilimitado (Estobeo, *Ant.* I 18, 1 c; Aristoteles, *Phys.* 213 b 22) y de que el Ser se desarrolla cada vez más a partir del vacío. Los pitagóricos postparmenídeos replican así a la objeción de Parménides (fr. 8; Simplicio, *Phys.* 145, 6-11) que rechazaba el concepto del vacío y la posibilidad de que de lo no-ente nazca algo.

(17) Conford (*Plato and Parmenides*, Londres, 1950, reimpr., p. 12), supone que la «teoría del flujo» nació del intento de refutar las objeciones de Zenón y resolver las dificultades creadas por el descubrimiento de los irracionales. Sobre otras opiniones al respecto, cf. Guthrie, *o. c.*, I, p. 265, n. 1.

(18) 409 a 3.

(19) Plutarco (*Procr. An.* 1012 D) y Andronico de Rodas (citado por Temistio en *De An.* p. 59, 8) nos informan de que la doctrina que definía el alma como «un número que se mueve a sí mismo» era propia de Jenócrates.

(20) X 281.

claridad que es propia igualmente de los pitagóricos, (afirmación que repite Proclo) (21) pero, según Guthrie, nada puede concluirse sobre seguro (22). Sexto Empírico escribe: «algunos dicen que el cuerpo se compone a partir de un punto. En efecto, este punto fluyendo produce una línea; la línea fluyendo produce un plano; y éste moviéndose en profundidad engendra el cuerpo tridimensional». Proclo (23) expone juntas ambas teorías (la que define la línea «como la fluición de un punto» y la precedente), advirtiendo que «considera la que deriva del punto la línea, el triángulo y la pirámide como «más pitagórica»

Como queda dicho (24), Cornford y Raven (25) suponen que la doctrina de la progresión geométrica, que «todo lo construye a partir de un solo punto», en frase de Sexto Empírico (26), fue elaborada por los pitagóricos postparmenídeos con el propósito de modificar, y salvar así, las tradiciones de la escuela ante los intentos demolidores de los eleáticos: la línea (y por tanto los cuerpos físicos) ya no estaba formada por yuxtaposición de puntos discretos y además dotados de magnitud; por tanto las objeciones de Zenón carecían de sentido. Por otra parte, si el descubrimiento de la incommensurabilidad había demostrado que las figuras geométricas no se identificaban con números enteros, la nueva teoría acusando el impacto, replicaba que las figuras geométricas no estaban formadas por una sucesión de números enteros sino a partir de un solo punto que, fluyendo, daba origen a todas ellas y, en virtud del mismo proceso, al mundo físico.

ISIDORO MUÑOZ VALLE

Universidad de Valladolid

(21) *In Eucl.*, p. 97, ed. Friedländer.

(22) La opinión al respecto de Guthrie queda expuesta en la nota 10.

(23) Texto citado en la nota 21 de este trabajo.

(24) Cf. nota 10.

(25) *Pythagoreans and Eleatics*, citada, p. 109.

(26) *Adv. Math.* X 281.

MUÑOZ VALLE I., *La incommensurabilidad y el problema de la constitución de la materia en la teoría pitagórica*: Humanitas XXVII-XXVIII 1975-1976 17-22. | Pour les premiers Pythagoriciens, les figures géométriques étaient formées de nombres entiers. La découverte de l'incommensurabilité de la diagonale d'un carré avec ses côtés ayant montré qu'il n'était pas possible d'identifier l'unité arithmétique avec le point géométrique, on recourut à la théorie du flux. Selon cette théorie, les figures géométriques viennent, non d'une progression arithmétique, mais d'une progression géométrique. La ligne n'est plus formée d'une succession de points, mais d'un point d'où peuvent découler tout aussi bien, selon le même processus, les autres figures géométriques et tout le monde physique.

— *Id.*: Maia XXVIII 1976 223-226. | Cf. l'article précédent.