

606
BRUNSCHVIG, L.
1922

CHAPITRE III

L'ARITHMÉTISME, DES PYTHAGORICIENS

LES NOMBRES-POINTS

18. — Les allusions des anciens aux divers voyages de Pythagore sont trop éloignées des sources pour avoir une valeur historique; il apparaît cependant qu'on ne saurait rendre compte de la formation de la doctrine pythagoricienne sans regarder du côté de l'Égypte, surtout peut-être du côté de l'Asie. En effet, et sans que nous puissions dire avec exactitude quelle y fut la part de chacun, nous trouvons les penseurs ioniens de la génération des Thalès et des Anaximandres occupés à un travail astronomique qui se relie directement aux recherches favorites des Chaldéens; ils dressent la carte du ciel en connexion avec les divisions zodiacales; ils établissent le tableau des constellations¹. Ce travail, du point de vue où nous allons nous placer, présente un intérêt tout particulier. Observée à l'œil nu, en effet, une constellation a deux caractéristiques : le nombre des astres qui la constituent, et la figure géométrique qu'elle dessine dans le ciel. Ces caractéristiques sont au même titre des données immuables et objectives; une association se forme entre elles qui se revêt de nécessité naturelle et qui peut servir de base à une conception générale de l'Univers. Nous trouvons là, sinon l'origine, du moins l'illustration saisissante de la doctrine pythagoricienne. De même que les constellations ont un nombre qui leur est propre, toutes les choses connues ont un nombre, puisque le nombre est la condition même de leur connaissance. La formule de Philolaos que Stobée nous a conservée, est d'une remarquable précision² : *Kal πάντα γὰρ μὲν τὰ γινωσκόμενα ἀριθμῶν*

1. Paul Tannery, *Pour l'Histoire de la Science hellène*, 1887, ch. iv, § 3, p. 84.

2. H. Diels, *Die Fragmente der Vorsokratiker*, 1^{re} vol. 2^e édit. Berlin, 1906, p. 240.

ἔχοντι· οὐ γὰρ ὅλον τε οὐδὲν οὔτε νοηθῆμεν οὔτε γνωσθῆμεν ὅθεν τούτου.

Cette formule n'exprime pas encore, semble-t-il, tout le contenu du pythagorisme. Non seulement toutes choses possèdent des nombres; mais encore toutes choses sont des nombres. Entre autres témoignages d'Aristote, il suffit de relever ce passage du chapitre consacré, dans le premier livre de la *Métaphysique*, aux Pythagoriciens : Φαίνεται δὲ καὶ οὗτοι τὸν ἀριθμὸν νομίζοντας ἀρχὴν εἶναι καὶ ὡς ὅλην τοῖς οὖσι καὶ ὡς πάθη τε καὶ ἔχει¹. Proposition qui du temps d'Aristote déjà constituait un paradoxe², qui devait prendre un air de plus en plus étrange à mesure que la réflexion séparait davantage ce qui est de l'ordre de l'intelligence et ce qui est de l'ordre de la réalité. Le nombre est un concept; les choses sont des objets ou des substances. Comment prétendre que le nombre soit à son tour objet ou substance? Le difficile, à dire le vrai, nous paraît ici que l'on sache ne pas s'engager dans le problème soulevé par un historien systématique qui faisait entrer les conceptions des Présocratiques dans le cadre des catégories et des causes. Au lieu de chercher le passage d'une notion abstraite à la réalité concrète, il conviendrait sans doute d'enlever à la notion de nombre la signification abstraite que nous sommes habitués à lui attribuer, de lui réintégrer en quelque sorte l'application intuitive qui, pour les Pythagoriciens, en était inséparable, de voir un point lorsqu'on parle d'une unité, et, lorsqu'on parle d'un nombre, de voir un groupe de points dessinant une figure de la façon dont les étoiles dessinent une constellation³. Bref, avant de dire que les choses sont des nombres, les Pythagoriciens avaient commencé par concevoir les nombres comme des choses; les expressions de nombres carrés ou de nombres triangulaires ne sont pas des métaphores; ces nombres sont effectivement, devant les yeux et devant l'esprit, des carrés et des triangles⁴. Aussi, lorsque Eurytos disposait des cailloux en nombre déterminé de manière à obtenir par la forme de leur assemblage le nombre constitutif de telle ou telle réalité,

1. I, 5-986¹⁵.

2. Voir le passage relatif aux Pythagoriciens, dans *Met.*, N. 1090³² : κατὰ μέντοι τὸ ποιεῖν ἐξ ἀριθμῶν τὰ φυσικὰ σώματα, ἐκ μὴ ἔχοντων βάρος καὶ κίνησιν καὶ οὐκ ἔχοντα κίνησιν καὶ βάρος.

3. De *Caelo*, III, 1, 300¹⁶ : ἐνιοὶ γὰρ τὴν φύσιν ἐξ ἀριθμῶν συνιστάσιν, ὥστε τῶν Πυθαγορείων τίνας. Suivant le livre M de la *Métaphysique*, les Pythagoriciens constituent le ciel tout entier avec des nombres; mais ces nombres ne sont pas des unités au sens spécifiquement arithmétique, ce sont des unités qui ont une grandeur : τὸν γὰρ ὅλον οὐρανὸν κατασκευάζουσιν ἐξ ἀριθμῶν, πλὴν τῶν μονάδων, ἀλλὰ τὰς μονάδας ὑπολαμβάνουσιν ἔχειν μέγεθος, B 1080¹⁸.

4. Cf. pour cette interprétation du pythagorisme Milhaud, *les Philosophes géomètres de la Grèce, Platon et ses prédécesseurs*, 1900, p. 107.

le nombre de l'homme ou le nombre du cheval⁵, il ne faisait nullement, comme l'en accuse l'auteur du livre N de la *Métaphysique*, la parodie de la doctrine pythagoricienne⁶. Il usait d'un procédé rapide et simpliste pour donner satisfaction à l'exigence psychologique que nous retrouverons dans plus d'un système de philosophie mathématique, pour offrir à l'esprit un objet qui fût à la fois, selon le langage des Cartésiens, objet de l'imagination et objet de l'entendement.

Encore convient-il de préciser : tandis que la géométrie analytique unira dans une synthèse originale ce qui avait été préalablement dissocié, *idée algébrique* et *objet étendu*, l'arithmétique géométrique des pythagoriciens atteste simplement la connexion inséparable, l'implication spontanée et comme naïve, de deux éléments que seule la réflexion ultérieure devait dissocier. La pensée mathématique, au lieu d'aller de la nécessité abstraite à l'application concrète, enveloppe toutes les fonctions de l'esprit dans une sorte d'intuition intégrale où elle trouve son équilibre et sa plénitude. Le nombre est présenté immédiatement comme une somme de points figurés dans l'espace, et les figures — lignes, surfaces ou volumes — qui se trouvent tracées par ces points sont immédiatement données comme des nombres.

THÉORIE DES NOMBRES

19. — A cette conception générale du nombre, quelle qualité particulière de science répond chez les Pythagoriciens? Il importe d'entrer ici dans quelques détails; la question a plus qu'un intérêt historique; elle sert à fixer la physionomie originelle d'une doctrine que nous verrons réapparaître au cours de l'évolution de la mathématique moderne⁷.

Le premier trait de l'arithmétique pythagoricienne, c'est qu'elle est une théorie des nombres. Et, en effet, puisque les nombres sont, non plus des auxiliaires du calcul, des moyens « logistiques », mais des réalités naturelles, il convient de les considérer chacun à part, afin d'en déterminer les propriétés intrinsèques. Une fois qu'on se place ainsi à l'intérieur de chaque nombre, ses propriétés caractéristiques apparaissent comme les conséquences des opérations par lesquelles le nombre lui-même

1. *Met.* N. 5, 1092¹⁰, avec le commentaire d'Alexandre, Ed. Hayduck, Berlin, 1891, p. 327, apud Diels, *op. cit.*, p. 243.

2. *Vide infra*, I. V, ch. xv.

a été atteint et défini; ces opérations décident de la forme du groupe de points qui constitue le nombre dans son essence. Et comme la plus simple et la plus féconde de ces opérations est la duplication, le principe de la classification pythagoricienne est emprunté à la considération des nombres qui sont produits par la duplication, et susceptibles par suite de dimidiation. Le nombre disait Philolaos, a deux formes propres, l'impair et le pair : "Ο γὰρ μὲν ἀριθμὸς ἔχει δύο μὲν εἶδη, περισσὸν καὶ ἄρτιον". A cette distinction correspond une opposition fondamentale qui, dans la jeune école pythagoricienne au moins, rejoindra l'antithèse cosmologique du *limité* et de l'*illimité*, et fournira une base à la table des dix oppositions, qu'Aristote nous a transmise¹.

On peut entrevoir, d'une façon encore grossière sans doute, comment la connexion s'est établie entre l'impair et le limité d'une part, entre le pair et l'illimité d'autre part, si l'on considère les classifications numériques que les historiens de la mathématique rapportent aux Pythagoriciens. Déjà Philolaos ajoutait au pair et à l'impair une troisième espèce : l'*ἀρτιόπερισσον*. Cette dénomination qui a été quelquefois appliquée à l'unité², désigne aussi, suivant Jamblique³, les nombres pairs tels que 6 ou 10 qui à la première dimidiation donnent des nombres impairs. A cette acception se rapporte la distinction entre les nombres pairs qui comprennent parmi leurs facteurs un nombre impair intervenant à un moment donné pour mettre un terme à la dimidiation, *περισσάρτιοι*⁴, et les nombres pairs qui ne sont pas sujets à cette limitation, qui se résolvent complètement par dimidiation, *ἀρτιαίς ἀρτιοί*⁵.

D'autre part, à côté de la duplication, ou de la dimidiation, l'addition joue un rôle dans la formation pythagoricienne des nombres; Philolaos exalte la *décade*, norme de l'univers, puissance ordonnatrice des hommes et des dieux : Μεγάλα γὰρ καὶ πάντεσσι καὶ παντοεργὸς καὶ βίῳ καὶ οὐρανίῳ βίῳ καὶ ἀνθρωπίνῳ ἀρχὴ καὶ ἀγεμὼν κοινώνουσα... δύνει καὶ τὰς δεκάδας⁶. La vertu de la decade est qu'étant constituée par la somme des quatre premiers nombres $1+2+3+4$, elle enferme la nature des diverses

1. Diels, *op. cit.*, p. 240.

2. *Met.*, I, 5, 986^a 22. Cf. Zeller, *Philosophie des Grecs*, trad. E. Boutroux, t. I, 1877, p. 343.

3. Théon de Smyrne. Éd. Hiller, Leipzig, 1878, p. 22. Cf. Zeller, *tr. citée*, t. I, p. 383, n. 3.

4. *In Nicom. Arithm.* Éd. Pistelli, Leipzig 1894, p. 22.

5. *Nicom. Arithm. Jaeg.* Éd. Hoche, 1806, § X, p. 21 et suiv.

6. *Ibid.*, § VIII, p. 15.

7. In Diels, p. 243, cf. *Arist., Met.* I, 5, 986^a 8.

espèces de nombres, celle du *pair* dont le premier est 2, de l'*impair* dont le premier est 3, du *pair-impair* qui est ici l'unité, du *carré parfait* dont le premier est 4.

20. — Enfin, puisque les Grecs ont ainsi rapporté la constitution des nombres à deux procédés de formation, l'un qui serait la duplication ou pour prendre la forme la plus générale, la multiplication, et l'autre qui serait l'addition, la trace de cette dualité doit se retrouver dans leurs spéculations mathématiques.

L'un des principaux problèmes qui concernent la théorie des nombres consiste à étudier le rapport d'un nombre à ses composants, sous le double point de vue de la multiplication et de l'addition, et à comparer entre eux les résultats obtenus. Ainsi, on considère les diviseurs d'un nombre donné, l'unité comprise, mais à l'exception toutefois de ce nombre lui-même (ce que l'on appellera ses *parties aliquotes*), et on en fait la somme; cette somme sera en général ou plus grande ou plus petite que le nombre lui-même, lequel sera appelé en conséquence *abondant* ou *déficient*. 12 est *abondant* parce que la somme de ses parties aliquotes est : $1+2+3+4+6$ ou 16; 8 est *déficient* parce que ses parties aliquotes ajoutées produisent $1+2+4$ ou 7. Mais il y a quelques nombres qui sont équivalents à la somme de leurs parties aliquotes :

$6=1+2+3$ (avec cette particularité caractéristique du nombre 6, que l'on a également : $6=1 \times 2 \times 3$).

$$28=1+2+4+7+14$$

$$496=1+2+4+8+16+31+62+124+248$$

Une correspondance aussi remarquable entre le procédé de multiplication et le procédé d'addition confère à ces nombres un caractère de perfection; 6, 28, 496 sont des nombres *parfaits*. Dans Euclide la théorie des nombres parfaits est développée jusqu'à fournir une relation d'ordre général entre la classe des nombres parfaits et la classe des nombres premiers; Si, partant de l'unité, on forme la progression géométrique de raison 2, et si la somme de ces termes est un nombre premier, le produit de ce nombre premier par le dernier terme de la progression est un nombre parfait. Par exemple la somme $1+2+4+8+16$ donnant 31, qui est un nombre premier, le produit de 31 par 16, ou 496, est un nombre parfait¹.

1. *Élem.*, IX, 36. Éd. Heiberg, t. II, Leipzig, 1884, p. 408.

PROGRESSIONS ET MÉDIÉTÉS

21. — La théorie des nombres parfaits manifeste d'une façon saisissante le caractère spécifique de l'arithmétique grecque; le savant met au jour la structure interne des nombres, de la même façon qu'il observe les propriétés des figures géométriques, ou qu'il décrit la forme des constellations célestes. A cette méthode est due la partie la plus solide et la plus belle de la doctrine pythagoricienne, celle d'où se dégagent des lois comparables en simplicité et en fécondité aux formules de l'algèbre moderne.

On prend l'unité pour point de départ; on ajoute à l'unité la série ascendante des nombres impairs; la progression arithmétique que l'on forme ainsi jouit de cette propriété qu'à chacune des étapes où l'on s'arrête, la somme de l'unité et des nombres impairs constitue un nombre carré

$$\begin{aligned} 1 + 3 &= 4 \\ 1 + 3 + 5 &= 9 \\ 1 + 3 + 5 + 7 &= 16 \\ 1 + 3 + 5 + 7 + 9 &= 25 \end{aligned}$$

et que tous les nombres carrés sont donnés par ce processus de formation (fig. 1). Par la seule considération d'une progression arithmétique se trouvent donc constituées toutes les surfaces carrées qui ont pour côtés des nombres entiers. De plus, puisque l'addition successive d'un nombre impair 3, 5 ou 7, permet de passer d'un carré 4, 9 ou 16 au carré suivant, 9, 16 ou 25, tout nombre impair se définit comme la différence de deux surfaces carrées ayant respectivement pour côtés deux entiers consécutifs, c'est-à-dire comme un *gnomon*. Cette définition géométrique explique la constitution interne du nombre impair; il est la somme d'un carré ayant l'unité pour côté, et de deux rectangles égaux dont le plus petit côté est égal à l'unité :

$$5 = 1 + 2 + 2; \quad 7 = 1 + 3 + 3; \quad 9 = 1 + 4 + 4.$$

Si nous additionnons d'autre part les nombres pairs consécutifs, nous obtenons une série de nombres qui sont des sommes de progressions arithmétiques, et qui sont en même temps des produits et par conséquent des surfaces; seulement les facteurs de ces produits sont égaux l'un à la moitié du dernier nombre pair de la progression, l'autre à ce premier

PROGRESSIONS ET MÉDIÉTÉS

facteur augmenté de l'unité; la surface a donc ses deux côtés inégaux. elle est hétéromèque ou rectangulaire (fig. 2). Par là s'explique la dénomination de nombres hétéromèques donnée à la somme de ces nouvelles progressions arithmétiques, et l'introduction de l'opposition du carré et de l'hétéromèque dans la série des dix oppositions qu'Aristote nous a transmises, en corrélation directe avec l'opposition initiale de l'impair et du pair. De là encore l'indication d'un nouveau lien entre le couple antithétique *impair-pair* et le couple *limité-illimité*, lien moins direct mais plus logique que celui que nous avons eu l'occasion de signaler et que l'on peut supposer lui avoir succédé dans l'enseignement de l'École. En effet, tandis que la somme des nombres impairs engendre des carrés toujours semblables à eux-mêmes, la somme des nombres pairs engendre des rectangles qui sont perpétuellement différents; de sorte que leur variation indéfinie fait contraste avec la fixité du carré¹.

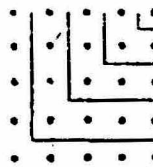


Fig. 1.



Fig. 2.

22. — La portée philosophique de la doctrine pythagoricienne des *médiétés* n'apparaît pas moindre. En outre du *moyen arithmétique* et du *moyen géométrique*, les Pythagoriciens introduisent le *moyen harmonique*. La médiété $\frac{a-m}{m-b} = \frac{a}{b}$ donne l'égalité

$$\frac{2}{m} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Ainsi 8 est moyen harmonique entre 12 et 6 puisque

$$\frac{12-8}{8-6} = \frac{12}{6}.$$

« Nous retrouvons là, dit M. Milhaud, l'origine de la dénomination d'harmonique². Si en effet, au lieu de faire correspondre 1 à la première note de l'octave, on fait correspondre 6 pour n'avoir ensuite que des nombres entiers, c'est 8 qui correspondra à la quarte, au lieu de $\frac{4}{3}$, et 12 à l'octave, au lieu de 2³. »

1. Milhaud, *op. cit.*, p. 115 et suiv.

2. Voir le fragment d'Archytas sur les médiétés (Porphyre, *Commentaire aux Harmoniques de Ptolémée*, in Wallis, *Opera*, t. III, Oxford, 1609, p. 267) et Diels, p. 261.

3. *Op. cit.*, p. 83.

La merveilleuse découverte de la merveilleuse correspondance entre les nombres et les sons (découverte qui semble remonter à Pythagore lui-même¹) est ainsi incorporée à l'arithmétique pythagoricienne, et elle achève d'en fixer le caractère. Les rapports des nombres qui se manifestent dans les accords musicaux sont aussi ceux qui sont inscrits dans les figures de la géométrie : suivant une observation que Nicomaque rapporte à Philolaos, le cube, parfaitement harmonieux en soi puisqu'il est parfaitement identique à lui-même suivant les trois dimensions, présente la connexion des nombres composant à médiété que nous venons de décrire : il a 12 arêtes, 8 sommets, 6 faces². Harmonie géométrique et harmonie musicale se correspondent : ce qui est intelligible pour l'arithméticien, est aussi visible aux yeux que sensible aux oreilles.

LE PYTHAGORISME

23. — On conçoit que de semblables correspondances soient apparues aux Pythagoriciens comme susceptibles d'universalité, qu'ils se soient autorisés par exemple des lois numériques de l'harmonie terrestre pour supposer une sorte de concert céleste, engendré par les nombres astronomiques : l'harmonie des sphères célestes dont la légende veut que Pythagore, seul entre tous les mortels, ait jamais eu la perception³. On conçoit comment leur imagination spéculative a entouré le noyau lumineux que formaient les théories positives de l'arithmétique, de la géométrie, de l'acoustique — et il faut y ajouter l'esquisse de l'astronomie copernicienne — d'une zone infiniment plus vaste qu, sans hésitation, une solution était donnée à tous les problèmes humains ou divins. Avec Philolaos, le nombre, qui par nature est incapable de recevoir le mensonge, devient le principe de la vérité; tandis que le mensonge et l'envie appartiennent à l'infini, à l'insensé, à l'irrationnel⁴. L'avènement de l'harmonie dans le monde est la victoire du nombre

1. Πυθαγόρας, ὡς φησι Ξενοκράτης, εὗρεσκε καὶ τὰ ἐν μουσικῇ διαστήματα, οὗ χωρὶς ἀριθμοῦ τὴν γένεσιν ἔχοντα· ἐστὶ γὰρ σύγκριστις ποσὸς πρὸς ποσόν. Porph. in Ptolem. harm. op. cit., 213, et Heinze, Xenokrates, Darstellung der Lehre und Sammlung der Fragmente. Leipzig, 1892, p. 102.

2. Nicom., Arith., § XXVI, p. 135 et Diels, op. cit., p. 238.

3. Arist. de Celo, II, 9, 280^b 12 et Simplicius, Comm., Ed. Heiberg, Berlin, 1893, p. 468. Cf. Zeller, op. cit., p. 400 et suiv.

4. Ψεῦδος δὲ οὐδὲν δέχεται ἃ τῷ ἀριθμῷ εἰσὶν οὐδὲ ἀρμονία· οὐ γὰρ οἰκεῖον αὐτοῖς ἐστὶ. Τὰς τῷ ἀπείρῳ καὶ ἀνοήτῳ καὶ ἀλόγῳ φύσις τὸ ψεῦδος καὶ τὸ φθόνος

sur l'infini¹. Nous n'avons pas à suivre le développement de cette doctrine; ce que nous ne pourrions faire d'ailleurs sans aborder une période de l'histoire où les disciples éloignés de Pythagore se rencontrent, et parfois se confondent, avec les successeurs de Platon. Nous nous contenterons de rappeler les représentations numériques par lesquelles les Pythagoriciens prétendaient expliquer la nature des réalités sociales : justice, occasion, mariage², sans insister sur l'extraordinaire floraison de symboles et d'analogies procédant de cette méthode et présentant ce mélange de précision rigoureuse et d'arbitraire absolu qui est l'essence du mystérieux. Si ce sont là les traits les plus populaires du pythagorisme, il n'est pas sûr que c'en soient les plus originaux; et il est probable qu'on peut appliquer ici la remarque pénétrante de M. Rivaud sur les doctrines présocratiques du devenir : « le cadre et la matière sont fournis par la cosmogonie ancienne. L'observation et l'expérience n'interviennent guère que dans le détail. Pour l'ensemble, elles laissent intactes les images anciennes³ ». En fait, les Ioniens (et les Babyloniens par delà) ont transmis à Pythagore l'héritage des oppositions cosmologiques, des correspondances astrologiques et morales. Même si les Pythagoriciens n'ont vu dans leurs découvertes proprement mathématiques, dans leurs expériences acoustiques, que des confirmations pour l'ensemble de leurs croyances supranaturelles, ce sont ces découvertes et ces expériences d'ordre rationnel qu'il est équitable de retenir et de considérer comme l'apport caractéristique de leur pensée.

Cette pensée, cristallisant dans un système qui n'est plus tout à fait le nôtre, n'en avait pas moins le droit de se croire assez forte pour porter le poids de l'univers; car elle avait effectivement atteint la plus haute qualité de vérité dont l'homme est capable. Si l'idéal d'une science positive est de reposer sur des principes à la fois clairs et délimités, de se développer dans le cadre des principes déjà posés, et de maintenir le contact avec l'expérience qui la confirme et la contrôle, le mathématisme pythagoricien contenait de quoi satisfaire à cet idéal. En impliquant dans la conception du nombre et le géométrique et le

ἐστὶ. Diels, op. cit., p. 244. Voir Newboud, Philolaos, Archiv für Geschichte der Philosophie, année 1906, t. XIX, p. 177.

1. Ἄ φῶς ἐν τῷ κόσμῳ ἀρχή ἐστι ἀπείρων τε καὶ περαίνοντων καὶ ἕως ἃ κόσμος καὶ τὰ ἐν αὐτῷ πάντα, in Diog., Laert. VIII, p. 85 et Diels, p. 239.

— Cf. M. Simon, op. cit., p. 132 et suiv.

2. Met., M. 4. 1078^b 21.

3. Le problème du Devenir et la notion de la Matière dans la philosophie grecque depuis les origines jusqu'à Théophraste, 1903, p. 267 (Paris, F. Alcan).

physique, il avait du même coup conçu l'étude des nombres comme une étude de la réalité concrète, érigé la découverte des rapports arithmétiques en découverte de rapports naturels. La vérité mathématique est une *loi*, au sens objectif du mot ; elle se dégage par l'observation, elle revêt progressivement la forme générale qu'elle comporte ; la notion du nombre parfait et la notion de l'accord parfait, les formules de l'arithmétisme géométrique et celles de l'arithmétisme acoustique ont exactement le même caractère. Et ces lois qui régissent à titre égal et unissent dans une synthèse homogène les différents ordres de la réalité sont d'une telle simplicité qu'elles semblent adaptées à la nature de l'esprit, et destinées à assurer l'équilibre définitif de toutes ses fonctions. L'harmonie de l'univers se reflète dans l'harmonie des idées, ou plutôt l'une et l'autre se fondent dans l'unité, dans l'indistinction qui, pour les Pythagoriciens constitue le *κόσμος*.

LIVRE II

GÉOMÉTRIE

CHAPITRE IV

LE MATHÉMATISME DES PLATONICIENS

SECTION A. — La position du problème platonicien.

IMITATION ET PARTICIPATION

24. — Le platonisme est comme le pythagorisme une philosophie de type mathématique. A cet égard même, et s'il fallait en croire Aristote, la différence du pythagorisme et du platonisme serait purement verbale. Suivant les Pythagoriciens les choses imitent les nombres, suivant Platon les choses participent aux nombres; le nom seul serait changé¹. Mais il faut reconnaître que, pris en soi, les mots d'*imitation* et de *participation* sont équivoques, au point de pouvoir être interchangés. Si l'imitation suppose avant tout la séparation de l'original et de la copie, les idées platoniciennes sont des « *paradigmes* », dont les choses sensibles sont des imitations; le *Timée* est, à cet égard, aussi explicite que possible : τότε μὲν γὰρ δύο εἶδη διειλόμεθα, ... ἐν μὲν ὡς παραδείγματος εἶδος ὑπεταθὲν, νοητὸν καὶ αἰὶ κατὰ ταῦτα ἓν, μέλημα δὲ παραδείγματος δεύτερον, γένεσιν ἔχον καὶ δρατὸν². D'autre part la notion

1. Οἱ μὲν γὰρ Πυθαγόρειοι μιμήσει τὰ ὄντα φασὶν εἶναι τῶν ἁριθμῶν, Πλάτων δὲ μετέπειτα, τοῦτονμα μεταβελών. *Met.*, A. 6. 987^o 11.

2. 48 E. Dans une série d'analyses qui ont paru de 1881 à 1885 dans le *Journal of Philology* (vol. X, XI, XIII, XIV, XV), sous ce titre : *On Plato's later theory of ideas*, M. Jackson a même proposé une distinction radicale entre les dialogues où Platon expose la théorie de la participation aux idées, le *Phédon* et la *République*, et les dialogues tels que le *Théétète*, le *Philèbe*, le *Politique*, le

de participation est empruntée au vocabulaire d'Anaxagore, et elle y a un sens purement matériel¹. Πάντα παντός μοῖραν μετέχει, cette parole exprime que tous les éléments de l'univers, le νοῦς excepté, se mélangent effectivement les uns aux autres, que l'univers est ἡ σύμμιξις πάντων χρημάτων². En ce sens, et si l'on faisait fond sur l'interprétation même que les livres M et N de la *Métaphysique* donnent du pythagorisme il conviendrait de lui restituer, par contraste avec le platonisme la thèse de la participation des choses aux nombres. Οἱ δὲ Πυθαγόρειοι διὰ τὸ ὅτι πολλὰ τῶν ἀριθμῶν πάθη ἐνυπάρχοντα τοῖς αἰσθητοῖς σώμασιν, εἶναι μὲν ἀριθμοὺς ἐποίησαν τὰ ὄντα, οὐ χωριστοὺς δὲ, ἀλλ' ἐξ ἀριθμῶν τὰ ὄντα³.

Le vocabulaire respectif qu'Aristote attribue aux Pythagoriciens et aux Platoniciens pourrait donc être interverti sans trop de difficulté; mais, par delà les ressemblances verbales, subsiste l'opposition profonde de l'immanence pythagoricienne et de la transcendance platonicienne : ὁ μὲν τοὺς ἀριθμοὺς παρὰ τὰ αἰσθητά, οἱ δ' ἀριθμοὺς εἶναι φασιν αὐτὰ τὰ πράγματα⁴. Lorsque les Pythagoriciens disent que les choses imitent les nombres, ils mettent sur le même plan la réalité numérique et la réalité naturelle; ils constatent une ressemblance entre l'ensemble du nombre et l'ensemble de la chose : Ἐν δὲ τοῖς ἀριθμοῖς ἰσχύουν θεωρεῖν ὁμοιώματα πολλὰ τοῖς ὄντι καὶ γιγνομένοις... καὶ τὴν ὅλην οὐρανὴν ἀρμονίαν εἶναι καὶ ἀριθμὸν⁵. Au contraire suivant Platon, la science des nombres porte non pas sur les choses prises en soi, mais sur les caractères des choses, qu'elle réussit à comprendre dans ses déterminations. Le principe de ces déterminations, c'est le πῆμα dont le domaine est défini avec précision dans le *Philebe* : « l'égal et l'égalité, et après l'égal le double et tout ce qui serait rapport de nombre à nombre et de mesure à mesure⁶. » Au même objet, suivant l'étalon de la mesure ou de la numération, s'appliqueraient différents types de détermination; mais ces types idéaux sont, pris en soi, des réalités autonomes; ils constituent le plan

Timée ou les Idées seraient remplacées par les types naturels, les paradigmes (t. XIII, p. 242), et où la μέθεξις serait en réalité μίμησις (t. X, p. 280). Zeller a montré les difficultés d'une séparation aussi complète dans un mémoire *Ueber die Unterscheidung einer doppelten Gestalt der Ideenlehre in den Platonischen Schriften*, (1887), *Kleine Schriften*, t. I, 1910, p. 369, et suiv.

1. Diels, *op. cit.*, p. 310.

2. *Ibid.*, p. 315.

3. N. 1000^a 20.

4. *Met.*, A 987^a 27, cf. *Phys.* II, 4, 203^a 6.

5. *Mét.*, A 983^a 27.

6. 23 A. Πρῶτον μὲν τὸ ἴσον καὶ ἰσότης, μετὰ δὲ τὸ ἴσον τὸ διπλάσιον καὶ πᾶν ὃ τί περ ἐν πρὸς ἀριθμὸν ἀριθμὸς ἢ μέτρον ἢ πρὸς μέτρον, ταῦτα ἔμπαντι μὲν τὸ πῆμα ἀπολογιζόμενοι καλῶς ἂν δοκοῦμεν δρᾶν ταῦτα.

supérieur de vérité ou d'existence dont procède la participation¹. Que ce soit par présence, par communication ou sous quelque autre forme ou par quelque autre moyen², c'est la *grandeur* qui fait que ceci est plus grand que cela, c'est la *petitesse* qui fait qu'une chose est plus petite qu'une autre³.

Telle est, dans la lumière brutale des textes, la distinction spécifique qui nous conduit à l'étude directe du mathématisme platonicien. Nous avons à déterminer d'une façon précise le progrès accompli par la réflexion de Platon. Comment de la méditation de la mathématique a-t-il tiré une doctrine de la connaissance qui déborde par delà le domaine mathématique, qui se prolonge même au delà de l'antiquité, puisque quelques-uns des interprètes les plus profonds du platonisme y ont décelé le germe d'une méthodologie universelle, capable d'être reliée à l'idéalisme critique des modernes? Mais comment, d'autre part, l'avènement de cette philosophie, dont le succès fut au début si brillant que la mathématique semblait avoir absorbé la philosophie⁴, a-t-il été suivi, à bref délai, de la disparition de la philosophie mathématique? Comment la science des connexions entre les idées — la science réelle — a-t-elle paru pendant près de vingt siècles, subordonnée à la science apparente — à la science des classifications verbales? Cette seconde question ne doit pas être séparée de la première; nous ne serons pas éloignés de saisir le sens du mathématisme platonicien si nous nous rendons capables de satisfaire à cette double curiosité.

LA DÉCOUVERTE DES IRRATIONNELLES

25. — Directement ou indirectement, la considération de la technique est intervenue dans l'élaboration de la philosophie platonicienne. L'identification exacte que le pythagorisme, au moins sous sa forme primitive et, en quelque sorte, à l'état pur, avait établie entre le nombre et la grandeur, entre la pensée arithmétique et la réalité concrète, se trouve rompue, à l'époque où Théodore de Cyrène enseignait les mathématiques à

1. Cf. *Phédon*, 100 C : φαίνεται γὰρ μοι, εἴ τί ἐστιν ἄλλο καλὸν παρ' αὐτὸ τὸ καλόν, οὐδὲ δι' ἑν ἄλλο καλὸν εἶναι ἢ διότι μετέχει ἐκείνου τοῦ καλοῦ.

2. *Ibid.*, 100 D : οὐκ ἔλλατ' ἐστὶ αὐτὸ καλὸν ἢ ἡ ἐκείνου τοῦ καλοῦ εἴτε παρουσία εἴτε κοινωνία, εἴθ' ὅτι καὶ ὅπως προσγίγνεται.

3. *Ibid.*, 101 A : ἀλλὰ διαμαρτύροισιν, ὅτι οὐ μὲν οὐδὲν ἄλλο λέγεται ἢ ὅτι τὸ μὲν μείζον πᾶν ἕτερον ἑτέρου οὐδὲν ἄλλο μείζον ἐστὶν ἢ μέγας, καὶ διὰ τοῦτο μείζον. διὰ τὸ μέγας, τὸ δ' ἔλαττον... διὰ τὴν σμικρότητα.

4. γίγνεται τὰ μαθήματα τοῖς νῦν ἢ φιλοσοφία, *Met.*, A 982^a 32.

Platon¹. Chose curieuse et qui manifeste la fécondité de leurs procédés scientifiques, c'est aux Pythagoriciens eux-mêmes qu'est due la découverte capitale qui devait mettre fin au règne du nombre, la découverte des grandeurs incommensurables. Dans la plus harmonieuse des figures qu'ils aimaient à considérer, dans le carré, ils devaient rencontrer un élément géométrique qui n'était plus une somme de points. Comment s'est révélée cette difficulté? Autant qu'on peut le présumer, ce serait par l'établissement de la formule générale connue sous le nom de théorème de Pythagore : a et b étant les côtés d'un triangle, c l'hypoténuse, $a^2 + b^2 = c^2$.

Cette relation était connue des Hindous, à une époque que M. Bürk, dans son introduction à l'édition et à la publication des *Sulvasutras* d'Apastamba², fait remonter au VIII^e siècle avant l'ère chrétienne (et la date est acceptée par les derniers historiens de la mathématique). Mais si les Hindous ont exprimé le théorème de Pythagore dans sa généralité, nous ne pouvons pas affirmer qu'ils en possédaient une démonstration générale. Peut-être se contentaient-ils de poser la loi par induction, en remarquant la connexion entre les différentes valeurs, exprimées en nombres entiers, que l'on pouvait donner aux côtés de l'angle droit du triangle (ou plutôt du rectangle) et des valeurs numériques entières qui leur correspondaient pour l'hypoténuse (ou pour la diagonale). L'induction devait leur paraître d'autant moins douteuse que, suivant la remarque de Zeuthen, ils devaient ne pas hésiter « à croire que toujours il était possible d'exprimer les trois côtés d'un triangle comme des multiples entiers d'une unité assez petite »³. Au contraire pour Pythagore, dont ce fut là sans doute l'apport original, le théorème est une vérité qui est indépendante de cette particularité que les côtés du triangle rectangle peuvent être représentés par des nombres entiers. Dès lors, les Pythagoriciens se trouvaient engagés dans un domaine où le parallélisme du concept numérique et de la représentation géométrique ne peut plus se maintenir. Le carré est la figure rectangulaire la plus simple; le carré numériquement le

1. Diog. Laërt, III, 6.

2. Voir 2, *Wie alt ist der Satz von Quadrat der Hypotenuse bei den Indern?* Zeitschrift der deutschen morgenländischen Gesellschaft, t. LV, année 1901, p. 550 et suiv.

3. *Théorème de Pythagore, origine de la géométrie scientifique* (Congrès International de Philosophie, II^e session, Rapports et comptes rendus, Genève, 1903, p. 846) Voir également Milhaud *La Géométrie d'Apastamba*, Revue Générale de Sciences, 1910, p. 512, et suiv., et *Nouvelles Études sur l'histoire de la Pensée scientifique*, 1911, p. 109 et suiv.

plus simple est celui dont on suppose que le côté est égal à l'unité; or, l'observation empirique a dû le faire facilement découvrir, si la diagonale du carré, qui a l'unité pour côté, est prise à son tour comme côté d'un nouveau carré, l'aire de ce carré est égale à deux; quelle sera donc la longueur exacte de la diagonale? ou si l'on préfère, quelle sera la longueur exacte de l'hypoténuse du triangle rectangle isocèle dont les côtés sont égaux à l'unité? Tous les essais faits pour trouver une expression fractionnaire dont le carré soit équivalent à 2, échouent les uns après les autres. L'échec est-il définitif, et ne pourra-t-on en choisissant des unités de mesure de plus en plus faibles finir par découvrir une racine exacte de 2? Les Grecs se sont posé la question; ils l'ont tranchée à l'aide d'une démonstration qui donne une idée claire de leurs ressources logiques, et qu'il est d'autant plus intéressant de reproduire ici qu'une allusion d'Aristote¹ permet de la faire remonter à une date très voisine de l'époque pythagoricienne. Si la diagonale est commensurable² au côté du carré, le rapport peut être mis sous la forme d'une fraction irréductible $\frac{d}{c}$. Le théorème de Pythagore $d^2 = 2c^2$ montre immédiatement que d est pair, d'où l'on conclurait, puisque d et c sont premiers entre eux, que c est impair. Mais la parité de d permet d'exprimer le théorème sous la forme suivante :

$$4\left(\frac{d}{2}\right)^2 = 2c^2 \quad \text{ou} \quad 2\left(\frac{d}{2}\right)^2 = c^2$$

ce qui entraînerait la parité de c . Si d et c sont supposés commensurables, il résulte de l'hypothèse que c est à la fois impair et pair³. Ainsi se trouve établie à la pleine lumière d'un raisonnement rigoureux l'impossibilité de faire correspondre un nombre déterminé d'unités à la diagonale d'un carré qui a l'unité pour côté. Un tel nombre devrait être celui qui a pour carré 2; il devrait être pair et il devrait être impair en même temps; il n'a pas d'« état civil », il est en dehors de l'intelligibilité. Et pourtant la grandeur que l'on se voit condamné à ne jamais pouvoir mesurer avec exactitude est géométriquement construite et déterminée. Le domaine de l'existence débordé le type de l'intelligibilité; la rupture de l'équilibre où s'était tenu le dogmatisme pythagoricien est inévitable.

1. *Premiers Analytiques*, I, 23, 41^a 28. Ἀσόμετρος ἢ ἀμέτρητος ἐστὶ τὸ ὑπερβαίνει τὰ μετρήσιμα καὶ ἀμετρήσιμα ἀπὸ τοῦ ἀπείρου.

2. Voir la proposition introduite dans les *Éléments* d'Euclide (X, 117) apud Heiberg, X, App. 26, t. III. Leipzig, 1880, p. 408.

De cette crise il demeure un témoin, Zénon d'Elée. Quelle qu'en ait été l'intention, quelle que soit la base positive qu'elles recouvrent¹, les *apories* de Zénon d'Elée ont signifié pour l'antiquité grecque l'impossibilité de faire coïncider la pluralité discontinue, pluralité pythagoricienne des points arithmétiques ou encore pluralité démocritéenne des atomes étendus, avec la donnée concrète, avec la réalité continue de l'espace où les choses se déplacent; elles ont marqué l'échec de la science telle que la mathématique paraissait en avoir jusque-là fixé le modèle; elles ont provoqué une conception nouvelle de la connaissance et de la vérité.

26. — A travers les *Dialogues* de Platon, plus d'un indice vient témoigner que la découverte des irrationnelles n'est pas étrangère à la doctrine platonicienne de la science. Dans l'introduction du *Théétète*, dialogue destiné à marquer les premiers degrés de l'analyse qui remonte de l'apparence sensible à la vérité, Platon rappelle les écrits de son maître Théodore, qui établit l'irrationalité de $\sqrt{3}$, de $\sqrt{7}$ et poursuit jusqu'à $\sqrt{17}$ la recherche des racines carrées irrationnelles². Au VII^e livre des *Lois*, il se plaint, comme d'un crime contre la patrie, qu'on laisse ignorer aux jeunes Hellènes, qu'on lui ait laissé longtemps ignorer à lui-même, la distinction des grandeurs commensurables entre elles et des grandeurs incommensurables³, distinction dont il fait la base des « humanités ». Surtout il convient d'insister sur l'exemple du *Ménon* : le problème, l'un des plus simples qui pouvaient se présenter après la découverte de l'incommensurabilité, consiste à déterminer la longueur du côté d'un carré qui serait double d'un autre carré ayant quatre pieds de surface. Ce qui est significatif, c'est le but auquel cet exemple est destiné : il s'agit de prouver la thèse de la *réminiscence*. Le Socrate platonicien fait introduire un esclave auquel, sans rien apprendre directement, par le seul effet de la lumière naturelle qui se révèle à elle-même, il prétend faire retrouver la véritable solution du problème⁴. Les premières réponses de l'esclave sont empruntées aux cadres de l'arithmétique pure : Le carré de surface double paraît avoir un côté de longueur

1. Vide infra, § 95.

2. *Théétète*, 147 D. Voir l'étude de Zeuthen : *Sur la constitution des livres arithmétiques des Éléments d'Euclide et leur rapport à la question de l'irrationalité*. Académie Royale des Sciences et des Lettres de Danemark, 1910; p. 393 et suiv.

3. 820 C : Τὰ τῶν μετρητῶν τε καὶ ἀμέτρων πρὸς ἄλληλα, ἥτιν φύσει γίγνεται.

4. 82 B. Ἰπρόσχει δὲ τὸν νοῦν, ὅποτερ' ἂν σοὶ φαίνεται, ἢ ἀναμνησκόμενος ἢ μανθάνων παρ' ἐμοῦ.

double. — Mais la longueur double est 4, la surface double est 16. — Le côté du carré sera donc plus grand que 2, plus petit que 4, c'est-à-dire 3. — Mais cette réponse, qui épuise en quelque sorte les ressources de l'imagination proprement numérique, est encore inexacte; le carré de trois pieds de côté aurait une surface de neuf pieds. — Socrate suggère alors une considération exclusivement géométrique. Soit le carré $ABCD$ (fig. 3), nous pouvons lui juxtaposer trois carrés égaux de façon à obtenir la surface quadruple $AEGF$. En prenant les diagonales BC , CI , IH , HB , nous coupons en deux chacune des quatre surfaces égales au carré primitif. Le carré $BCIH$ est donc double du carré primitif; le côté, dont la longueur serait égale à $\sqrt{8}$, est la ligne que les Sophistes appellent *diamètre* : c'est du diamètre que se forme donc la surface double².

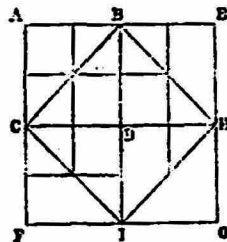


Fig. 3.

SECTION B. — La méthode platonicienne.

LA RÉGRESSION ANALYTIQUE

27. — Reconnaître que ce qui est au delà du nombre n'est plus au delà de l'intelligibilité, faire une place à la solution exacte de la géométrie là même où cette solution ne peut se ramener à la forme simple d'un rapport arithmétique, c'est élargir la base de la science, et c'est en transformer la notion. Il est devenu impossible de maintenir dans toute sa rigueur, dans toute sa naïveté, l'identification que le pythagorisme avait affirmée entre les nombres et les choses; mais, il est également impossible d'accepter dans toute sa simplicité, dans toute sa crudité, l'opposition établie par Parménide entre le monde de l'être ou de la vérité et le monde de l'apparence ou de l'opinion. Sans rien relâcher de la sévérité dialectique avec laquelle les Éléates avaient manié le principe de contradiction, la philosophie platonicienne se proposera de reconstituer le système organique où toutes les sciences trouveront désormais leur harmonie et leur unité. Elle commencera donc par suivre à

1. Cf. Cantor, I^{er}, p. 217.

2. Καλοῦσι δὲ ταύτην διάμετρον οἱ σοφισταί, ὡς' εἰ ταύτην διάμετρον ὄνομα, ἀπὸ τῆς διαμέτρου αὐτῆς ὡς σὺ φῆς, ὡ καὶ Μένωνος, γίγνεται ἂν τὸ διπλάσιον χωρίον. 85 B.

IN: LES ÉTAPES DE LA PHILOSOPHIE MATHÉMATIQUE III (1922)