

Leo Amman

609
AMMAN, L.
1976

Oudst bekende wiskunde veel minder abstract

Over de ontdekking van de stelling van Pythagoras

In de rubriek, waarin we onze lezers zelf aan het woord laten, schrijft Leo Amman, die zich veel met problemen van landmeting heeft beziggehouden, over de ontdekking van de stelling van Pythagoras ($a^2 + b^2 = c^2$). Hij gaat er van uit, dat een aantal klassieke wiskundige verhoudingen (zoals de gulden snede, het getal π , de stelling van Pythagoras) niet op inwijdingsmysteriën berusten, maar door toeval ontdekt zijn (bv. aan mozaïekvloeren) en langs inductieve weg veralgemeend zijn, lang voordat er een deductief wiskundig bewijs voor gevonden was.

In het kader der symboolinterpretatie gaat het hier om een zeer belangrijk en belangwekkend inzicht. Vandaar dat we hem graag plaatsruimte verlenen en een volgende keer ook een bijdrage over de maat der pyramiden zullen plaatsen, waarin het nuchter verstand het opneemt tegen de vage mythevorming.

in: PRANA 4 (1976)

Iedereen die de mening is toegedaan dat de wiskunde in zijn geheel weinig of niet aan-

trekkelijk is, zal zijn houding niet zozeer trachten te rechtvaardigen door af te geven op de inhoud van de wiskundige beweringen die hij heeft moeten leren, maar veel meer door te wijzen op de voor zijn gevoel gekunstelde manier waarop deze stellingen bewezen worden.

Maar, ook al is het inderdaad waar dat de moderne wiskundige bewijsmethoden niet zelden erg abstract zijn, hieruit mag niet de conclusie getrokken worden dat deze bewijsmethoden alleen maar berusten op kunstgrepen.

Het zal duidelijk zijn, dat, naarmate de wetenschap vorderingen maakt, allerlei nieuwe onderzoeksmethoden hun intrede doen in de wereld van het reeds bekende. In verband hiermee is het begrijpelijk dat de belangstellende leek, in tegenstelling tot de ingewijde, de nieuwe wetenschappelijke methoden minder geestdriftig zal ontvangen.

Men moet echter wel bedenken dat vrijwel alle bewijsmethoden die op onze scholen in gebruik zijn, reeds vele honderden jaren oud en dus allerm minst modern zijn.

De "gekunstelde" bewijsmethoden uit de wiskunde¹⁾ zijn, voor zover bekend, voornamelijk ontstaan in het oude Griekenland, enkele eeuwen vóór het begin van onze jaartelling.

Van de aard en de omvang van de wiskunde in nog vroegere tijden is betrekkelijk weinig bekend, hoewel, vooral in de twintigste eeuw, wel is komen vast te staan dat de oudst bekende wiskunde veel minder abstract en gekunsteld was dan de Griekse. Van de Griekse wiskunde kan men zeggen dat ze axiomatisch van aard was, terwijl dit van de

1) De hogere wiskunde wordt buiten beschouwing gelaten.

oudere wiskunde beslist niet gezegd kan worden.

Hiermede ben ik in zekere zin teruggekomen op de controverse die aan het begin van dit artikel geschetst werd.

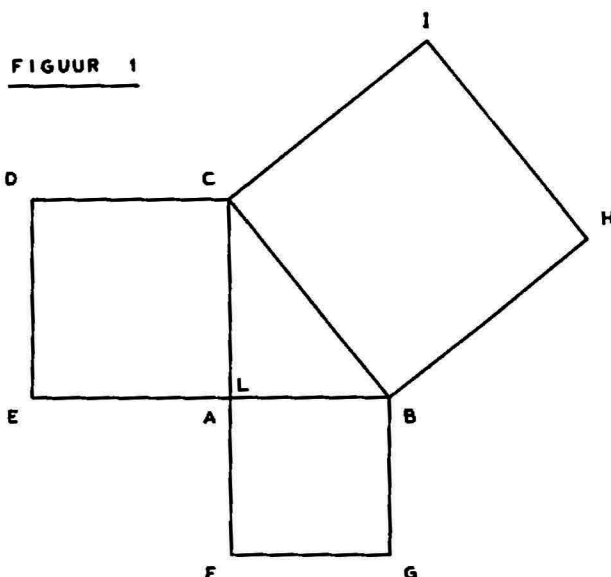
In verband met het voorgaande komt bij mij een vraag op, die ik nu tot onderwerp van gesprek wil maken.

Van de wiskundige bewering, die bekend is onder de naam "Stelling van Pythagoras", is sedert geruime tijd komen vast te staan dat ze reeds bekend was bij de Babyloniërs; de stelling blijkt ouder te zijn dan Pythagoras en dus kunnen wij de ontdekking ervan moeilijk nog langer aan Pythagoras toeschrijven.

De lezer moet hieruit niet zonder meer de conclusie trekken dat de stelling wèl ontdekt is door de Babyloniërs. Wie de ontdekker is, is niet bekend.

Zonder mij er verder om te bekommeren wie de ontdekker van de stelling van "Pythagoras" is, wil ik trachten een antwoord te geven op de vraag hoe de stelling ontdekt is en of daarbij van een bewijs sprake geweest is en zo ja, wat voor een bewijs dit dan wel geweest kan zijn.

De stelling van Pythagoras (afgezien van de vraag hoe de juistheid van de stelling aangetoond kan worden), kan zo eenvoudig worden uitgedrukt, dat iedereen die over een gezond verstand beschikt, haar betekenis zonder enige moeite kan doorzien.



De bewering luidt als volgt:

Als wij op de drie zijden van een rechthoekige driehoek ABC op de in fig. 1 aangegeven wijze, een vierkant tekenen dan is de oppervlakte van het grootste vierkant gelijk aan de som van de oppervlakten van de twee kleinste vierkanten.

In formule:

$$\text{Oppervlakte BCIH} = \text{Oppervlakte AEDC} + \text{Oppervlakte ABFG} \quad (1).$$

Honderd bewijzen

Dat deze eenvoudige bewering uit de vlakke meetkunde de bijzondere aandacht heeft weten te trekken van vele wiskundigen en leken, mag blijken uit het feit dat wij tegenwoordig over ongeveer honderd verschillende bewijzen voor deze stelling beschikken. Het ligt allerm minst in mijn bedoeling hier op deze bewijzen in te gaan; het gaat mij voornamelijk om de oorsprong van bovengenoemde stelling.

Alvorens mijn gedachtengang weer te geven, wil ik opmerken dat de stelling op nog andere (niet minder duidelijke) manieren kan worden geformuleerd. De in dit verband belangrijkste formulering is gebaseerd op het bekende feit dat de oppervlakte van een rechthoek gelijk is aan "lengte maal breedte". Omdat een vierkant óók een rechthoek is, maar dan één waarvan alle zijden even lang zijn, is de oppervlakte ervan "zijde maal zijde" of, zoals men ook wel zegt, "zijde in het kwadraat".

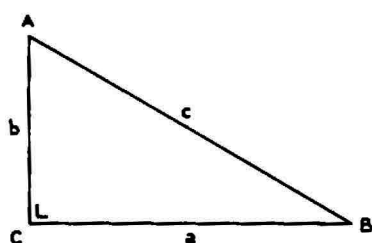
De betekenis van deze uitspraak is, dat wij de zijde van het vierkant met een zekere lengte-eenheid (bv. de centimeter of de inch) meten, om daarna aan te kunnen geven met hoeveel vierkante lengte-eenheden het vierkant gelijkwaardig is. Het behoeft geen nader betoog dat het, wiskundig gezien, niet ter zake doet welk lijnstuk als lengte-eenheid gekozen wordt.

Deze oppervlakteberekening is wel zeer eenvoudig wanneer wij ons beperken tot rechthoeken waarvan elke zijde een geheel aantal malen de lengte-eenheid is; immers, wanneer wij een vierkant hebben waarvan de zijde bv. 3 lengte-eenheden lang is, dan zien wij direkt in dat de oppervlakte van het betreffende vierkant bestaat uit $9 = 3 \times 3$

vierkante lengte-eenheden.

Voor het hierna volgende is het niet van belang na te gaan of de hierboven geschetste procedure voor het berekenen van oppervlakten ook juist is, als de zijden van het vierkant niet gelijk zijn aan een geheel aantal malen de lengte-eenheid. Om misverstand te voorkomen merk ik hier alleen op dat de procedure inderdaad algemeen geldig is.

Deze meetkundige omschrijving van de stelling, kan nu vertaald worden in een meer algebraïsche taal. Ik wil deze vertaling niet tot in bijzonderheden bespreken, maar volstaan met de vermelding van het resultaat.



FIGUUR 2

Als (zie fig. 2) in de rechthoekige driehoek ABC de zijden AB, BC en CA respectievelijk c , a en b lengte-eenheden lang zijn, dan geldt de betrekking

$$c^2 = a^2 + b^2$$

(2).

Het merkwaardige van deze formule is, dat ze qua vorm meer met algebra dan met meetkunde te maken schijnt te hebben.

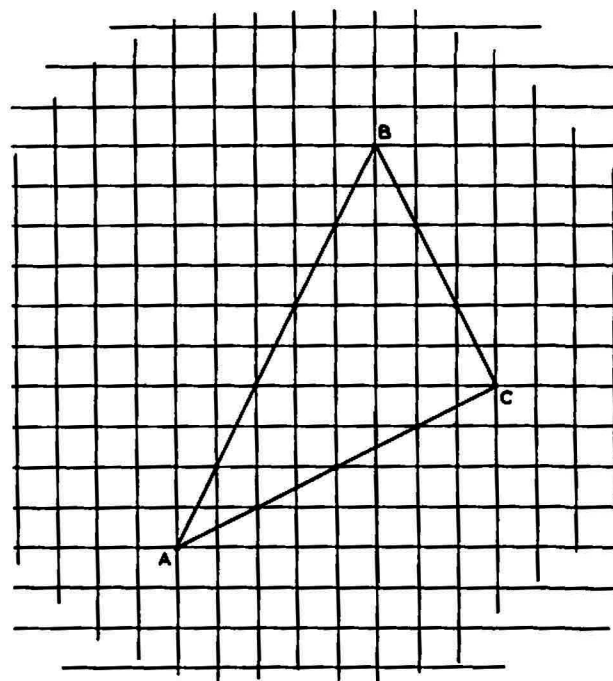
Nu stel ik de vraag:

”Welke der formuleringen (vergelijk de formules (1) en (2)), beantwoordt het meest aan de oorspronkelijke vorm van de stelling van Pythagoras?”

Om deze vraag te kunnen beantwoorden geef ik eerst een zeer eenvoudig bewijs van de stelling, dat in een rechthoekige driehoek, waarvan de rechthoekszijden respectievelijk 3 en 4 lengte-eenheden lang zijn, de lengte van de derde zijde 5 lengte-eenheden bedraagt. De bedoeling hiervan is te laten zien dat het mogelijk is dit bijzondere geval

van de stelling van Pythagoras aanschouwelijk te bewijzen, zonder gebruik te maken van een of andere algemene wiskundige theorie.

Hiertoe kan men gebruik maken van een vel zogenaamd millimeter-papier, waarvan men overigens alleen de verdeling in vierkante centimeters nodig zal hebben.



FIGUUR 3

Op een horizontale lijn (zie fig. 3) kiezen wij een roosterpunt A; vanuit A gaan wij 8 cm naar rechts en daarna 4 cm omhoog om in punt C aan te komen; vanuit C gaan wij 3 cm naar links en 6 cm naar boven om in punt B terecht te komen. Kiezen wij nu de diagonaal van een rechthoek van 1 bij 2 cm als lengte-eenheid, dan is AC 4, CB 3, en BA 5 lengte-eenheden lang zoals direct uit de figuur is af te lezen. Bovendien ziet men onmiddellijk dat de hoek bij het punt C precies 90° is.

Hiermee is dan het (aanschouwelijke) bewijs geleverd.

Proefondervindelijk

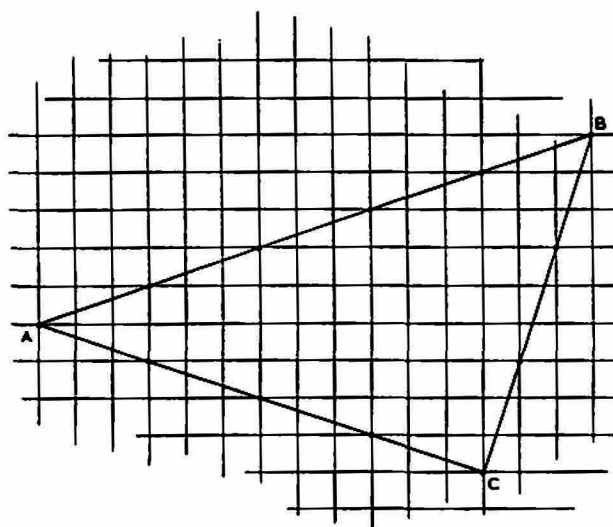
Deze bewijstrant acht ik karakteristiek voor de oudheid. In de eerste plaats omdat het bewijs zeer aanschouwelijk is en in de tweede plaats omdat het bewijs geleverd wordt voor een speciaal geval.

Het is allerm minst ondenkbaar dat bijvoorbeeld de Chinezen of de Babyloniërs op de hierboven geschetste wijze hebben ontdekt dat er rechthoekige driehoeken bestaan waarvan elke zijde een geheel aantal malen een zekere lengte-eenheid bevat.

Dat ik hier van een ontdekking spreek lijkt misschien enigszins overdreven. Wanneer wij evenwel driehoek ABC uit fig. 3 op ongelinieerd papier hadden getekend dan zou de stelling (althans op het eerste gezicht) geen enkel spoor van trivialiteit vertoond hebben.

Dat men in de oudheid niet over "ruitjespapier" beschikte is duidelijk, maar men had dit ook niet nodig omdat men wel de beschikking had over pleinen die met vierkante tegels belegd waren; en meer had men nauwelijks nodig om het bovenstaande constructieve bewijs te leveren.

Ter illustratie geef ik hier nog een ander (overigens soortgelijk) bewijs van dezelfde stelling.



FIGUUR 4

Op een horizontale lijn (zie fig. 4) kiezen wij weer een roosterpunt A; vanuit A gaan wij 12 cm naar rechts en 4 cm naar beneden; dit levert punt C. Vanuit C gaan wij 3 cm naar rechts en 9 cm naar boven; hiermee zijn wij in punt B aangekomen. Kiezen wij nu de diagonaal van een rechthoek van 1 bij 3 cm als lengte-eenheid dan blijkt op dezelfde wijze als hierboven de juistheid van de bewering.

Op soortgelijke wijze kan men aantonen dat

in een driehoek waarvan de zijden respectievelijk 5, 12 en 13 lengte-eenheden lang zijn, de hoek tussen de twee kleinste zijden precies 90° is.

Het staat vast dat deze speciale gevallen van de stelling "van Pythagoras" bekend waren lang vóórdat Pythagoras leefde. Men is het er tegenwoordig wel over eens dat de kennis van Pythagoras niet geheel onafhankelijk van wat de Babyloniërs eeuwen tevoren reeds hadden gepresteerd, tot stand is gekomen.

Het is evenwel altijd nog een open vraag hoe de stelling "van Pythagoras" ontdekt is. Uit verschillende oud-Babylonische teksten blijkt wel dat men de "Pythagoras" rekenprocedure kende en toepaste, maar van een rechtvaardiging van deze rekenwijze is geen spoor te vinden. Omtrent deze laatste kwestie wil ik nu het vermoeden uitspreken dat de eerste (bewezen!) voorbeelden van de stelling ontdekt zijn op de manier die ik hierboven omschreven heb.

Wanneer men eenmaal een aantal verwante verschijnselen in handen heeft, dan is het alleen nog maar een kwestie van zoeken naar het algemene principe; nu lijkt het mij niet zo verschrikkelijk moeilijk te ontdekken dat van drietallen zoals 3, 4, 5 en 5, 12, 13 de som van de kwadraten van twee kleinste getallen gelijk is aan het kwadraat van het derde.

$$(3^2 + 4^2 = 5^2 \text{ en } 5^2 + 12^2 = 13^2).$$

Hoe meer voorbeelden men in handen heeft, des te sterker zal het vermoeden worden dat voor elke Pythagorese driehoek met rechthoekszijden a en b en met schuine zijde c de relatie

$$a^2 + b^2 = c^2$$

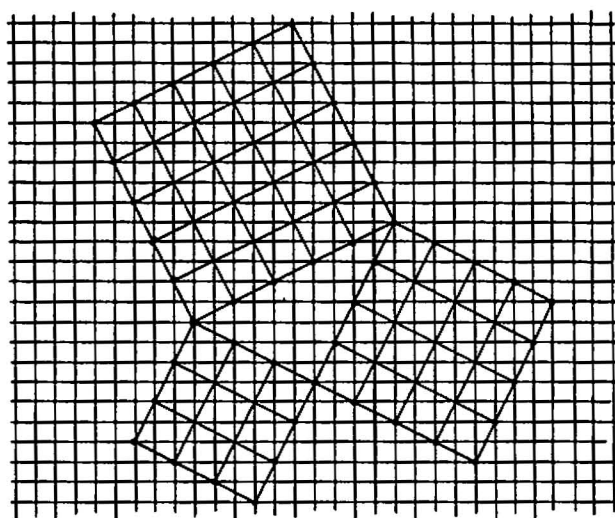
geldt. Dat er in de oudheid ooit een bewijs van de stelling in zijn algemene gedaante gegeven zou zijn, is mijns inziens hoogst onwaarschijnlijk. Het moet daarentegen meer waarschijnlijk geacht worden dat de algemene stelling "van Pythagoras" (die voor alle rechthoekige driehoeken geldt) langs deze inductieve weg "ontdekt" is.

Als dit vermoeden inderdaad juist is, dan zal de stelling in eerste instantie niet zozeer een

zuiver meetkundige interpretatie gehad hebben (vergelijk formule (1)), maar veel meer beschouwd zijn als een rekenkundige merkwaardigheid in verband met de zijden van een rechthoekige driehoek (vergelijk formule (2)).

De meetkundige interpretatie van de stelling, waarover ik aan het begin van dit artikel gesproken heb, ligt nu evenwel ook zeer voor de hand. Met betrekking tot dit punt meen ik te kunnen volstaan met een verwijzing naar fig. 5.

Tenslotte wil ik nog opmerken dat aange- toond kan worden dat de boven omschreven bewijsmethode niet alleen van toepassing is op de twee genoemde driehoeken, maar dat zij van toepassing is op alle rechthoekige driehoeken met geheeltallige zijden.



FIGUUR 5

Een tekening van ir. A.E. Bosman in diens boek Het wondere onderzoekingsveld der vlakke meetkunde, waarin hij artistiek en logisch voortbordurt op de stelling van Pythagoras.

