

Tracce della matematica pitagorica  
e del pensiero matematico di Eudosso di Cnido  
negli 'Elementi' di Euclide

Se confrontiamo la teoria delle proporzioni sviluppata nel V libro degli *Elementi* di Euclide con il contenuto dei cosiddetti libri aritmetici degli *Elementi* (1), possiamo facilmente accorgerci della profonda diversità — che peraltro non implica alcuna incompatibilità logica — tra il concetto di proporzione che sta alla base della anzidetta teoria delle proporzioni contenuta nel V libro degli *Elementi*, con il concetto di proporzione, che costituisce il tacito presupposto della analoga trattazione che viene condotta nei libri aritmetici degli *Elementi*. Nel V libro la proporzione, in generale, viene definita in maniera tale che essa possa risultare valida tanto nel caso in cui tutti o soltanto alcuni dei termini che si vogliono porre in proporzione siano grandezze commensurabili quanto nel caso in cui i termini della proporzione siano tutti quanti grandezze commensurabili (2). Invece alla base della trattazione di tutti quei vari tipi di proporzione che sono presi in considerazione nei libri aritmetici degli *Elementi* c'è un concetto di proporzione, che è applicabile soltanto a quei casi in cui i termini della proporzione siano tutti quanti grandezze commensurabili.

L'origine del concetto di proporzione contenuto nel V libro molto probabilmente va fatta risalire storicamente ad Eudosso di Cnido — a

(1) Cioè i libri VII, VIII e IX.

(2) EUCLIDIS *Elementa*, vol. II, libri V-IX cum appendice post I. L. Heiberg edidit E. S. Stamatis, Leipzig, Teubner, 1970, p. 1, 10-15: 'Εν τῇ αὐτῇ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι πρῶτον πρὸς δευτέρου καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, διὰ τὰ τοῦ πρῶτου καὶ τρίτου ἰσάκως πολλαπλάσια τῶν τοῦ δευτέρου καὶ τέταρτον ἰσάκως πολλαπλάσιον καθ' ὅποιον οὖν πολλαπλασιασμοὶν ἑκάτερον ἑκάτερον ἢ ἅμα ὑπερέχει ἢ ἅμα ἰσά ἢ ἅμα ἐλλείπει ληφθέντα κατάλληλα. (« Si dice che quattro grandezze sono nello stesso rapporto, la prima rispetto alla seconda e la terza rispetto alla quarta, quando gli equimultipli della prima e della terza rispetto agli equimultipli della seconda e della quarta sono, secondo un multiplo qualsiasi, gli uni degli altri, o tutti e due maggiori o tutti e due eguali o tutti e due minori, se presi nell'ordine rispettivo »).

cui Proclo nel suo cosiddetto *Riassunto storico* (3) attribuisce — di avere per primo aumentato il numero dei teoremi generali (4) —, perché in due scolii anonimi al V libro degli *Elementi* di Euclide è attestato che alcuni dicevano che il contenuto del V libro degli *Elementi* di Euclide sarebbe opera di Eudosso (5). Pertanto, tenuto conto che l'attività di Eudosso in campo matematico è stata preceduta dalla attività di altri matematici, vissuti in epoche anteriori (6), il cui pensiero sta a rappresentare molto verosimilmente una fase di sviluppo del pensiero matematico greco meno complessa e raffinata dell'opera matematica di Eudosso, la anzidetta diversità esistente tra la trattazione che della proporzione e delle sue varie forme viene fatta nel V libro e la analoga trattazione condotta nei libri VII, VIII e IX degli stessi *Elementi*, non può

(3) Si intende per *Riassunto storico* di Proclo quella sommaria esposizione della storia della matematica dalle origini sino ad Euclide che fa parte dell'introduzione premessa da Proclo al suo commento al primo libro degli *Elementi* di Euclide. Nella edizione teubneriana, curata dal Friedlein dell'anzidetto commento di Proclo (*PROCLI diadochi in primum Euclidis Elementorum librum commentarii*, Lipsia, Teubner, 1873), il *Riassunto storico* va da p. 64, 16 a p. 70, 18.

(4) *PROCLI diadochi in primum Euclidis Elementorum librum commentarii*, ed. cit., p. 67, 2-5: Εὐδόξος δὲ ὁ Κνίδιος, Λέοντος μὲν ὀλίγῳ νεώτερος, Σταίρου δὲ τῶν περὶ Πλάτωνα γενόμενος, ῥῶτος τῶν καθόλου καλουμένων θεωρημάτων τὸ πλῆθος ᾗ ἔζησεν. (« Eudosso di Cnido, di poco più giovane di Leone e compagno dei discepoli di Platone, per primo accrebbe il numero dei cosiddetti teoremi generali »).

(5) *Scholia in Elementorum librum V* (in *Euclidis Elementa* edidit I. L. Heiberg, vol. V, Lipsia, Teubner, 1888), I, p. 280, 1-9: Σκοπὸς τῇ πεντῇ βιβλίῳ περὶ ἀναλογικῶν διαλαβεῖν κοινὸν γὰρ τοῦτο τὸ βιβλίον γεωμετρίας τε καὶ ἀριθμητικῆς καὶ μουσικῆς καὶ πάσης ἀπλῶς τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης, τὰ γὰρ ἐν αὐτῇ ἀποδεικνύμενα οὐ μόνον γεωμετρικοῖς ἀρμόζει θεωρήμασιν, ἀλλὰ καὶ πᾶσι τοῖς ὑπὸ μαθηματικῆν τεταγμένοις, ὥς προείρηται, ἐπιστήμην. ὁ μὲν οὖν σκοπὸς οὗτος, τὸ δὲ βιβλίον Εὐδόξου τινὲς εἴρεσιν εἶναι λέγουσι τοῦ Πλάτωνος διδασκάλου. (« Oggetto del quinto libro è la trattazione delle proporzioni. Questo libro infatti riguarda la geometria, l'aritmetica, la musica ed in generale ogni branca della scienza matematica, perché ciò che è dimostrato in tale libro non solo s'accorda con i teoremi della geometria ma altresì (come si è detto) con tutto ciò che rientri nell'ordine di studio della matematica. Questo è dunque l'oggetto del libro. Alcuni dicono che il libro è una scoperta di Eudosso, maestro di Platone ». *Idem*, 3, p. 282, 13-16: τοῦτο τὸ βιβλίον Εὐδόξου τοῦ Κνιδίου τοῦ μαθηματικοῦ τοῦ κατὰ τοὺς Πλάτωνα χρόνους γεγονότος εἶναι λέγεται, ἐπιγέγραπται δὲ ὅμως Εὐκλείδου, ἀλλ' οὐ κατὰ τινὰ φανερὴν ἐπιγραφὴν. (« Si dice che questo libro sia del matematico Eudosso di Cnido, che visse al tempo di Platone. Pur nondimeno non falsamente va sotto il nome di Euclide »).

Cfr. *Die Fragmente des Eudoxos von Knidos*, herausgegeben, übersetzt und kommentiert von François Lasserre, Berlin, De Gruyter, 1966, D 32-33. Vedi anche, nella medesima edizione, D 34-57.

(6) Vedi *PROCLI diadochi in primum Euclidis Elementorum librum commentarii*, ed. cit., pp. 65, 7-67, 1.

726  
COSENZA, P.  
1974  
5

non indurci a pensare che la diversità in questione sia testimonianza della diversità tra due diverse fasi dello sviluppo storico della matematica greca preeuclidea, di cui la più antica delle due si trovi riflessa nei libri VII, VIII e IX degli *Elementi* e l'altra invece si trovi rispecchiata nel V libro degli *Elementi*. Ora se si scorre l'elenco di definizioni con cui esordisce il VII libro degli *Elementi* — elenco che fa da premessa all'intera trattazione contenuta nell'insieme dei tre libri aritmetici — (7), si trovano in esso delle definizioni il cui contenuto richiama immediatamente alla mente alcuni dei concetti più caratteristici se non dell'intera matematica pitagorica, almeno di alcuni determinati momenti di sviluppo del pensiero matematico pitagorico. È ben noto che nell'ambito della scuola pitagorica è stata elaborata una ripartizione dell'intero campo dei numeri per la quale l'intero insieme dei numeri veniva diviso in due sottoclassi, di cui l'una comprendeva tutti i numeri pari e l'altra comprendeva tutti i numeri dispari (8). Questa ripartizione la troviamo ripresa in alcune delle definizioni del VII libro degli *Elementi*. Infatti Euclide, in questo libro (nel quale, come si è detto, egli prescinde totalmente dai rapporti intercorrenti tra grandezze che siano tra loro incommensurabili) non solo, all'ἄρτος VI (9), definisce il numero pari come quel numero che è divisibile in due parti uguali e, all'ἄρτος VII (10), definisce il numero dispari come quel numero che non è divisibile in due parti uguali (cioè, come egli anche dice nella medesima definizione VII, come quel numero che differisce di un'unità da un numero pari), ma altresì si avvale dell'anzidetta ripartizione in numeri pari e dispari, per poter costruire le definizioni di quelle specifiche oggettività numeriche che egli definisce rispettivamente come numero *parimenti pari* (ἀρτιάκις ἄρτιος) (11).

(7) EUCLIDIS *Elementa*, vol. II, libri V-IX, ed. cit., pp. 1,1-3,23.

(8) Vedi ARISTOTLE'S, *Metaphysic*, Oxford, University Press, vol. I, 986 a 15-23. Vedi anche in *Die Fragmente der Vorsokratiker* von H. Diels, herausgegeben von W. Kranz, unveränderte Nachdrucke der 6. Auflage, Dublin-Zürich, Veidmann, vol. I, 1971, Philolaos (44), B, p. 408, 5.

(9) EUCLIDIS *Elementa*, vol. II, libri V-IX, ed. cit., p. 103,10: Ἄρτιος ἀριθμός ἐστιν ὁ διχα διαιρούμενος. (« Numero pari è quello che è divisibile in due parti [uguali] »).

(10) EUCLIDIS *Elementa*, vol. II, libri V-IX, ed. cit., p. 103, 11-12: Περισσός δὲ ὁ μὴ διαιρούμενος διχα ἢ μονάδι διαφέρων ἀρτίου ἀριθμοῦ. (« Numero dispari è quello che non è divisibile in due parti [uguali] ossia quello che differisce per un'unità da un numero pari »).

(11) EUCLIDIS *Elementa*, vol. II, libri V-IX, ed. cit., p. 103, 13-14: Ἀρτιάκις ἄρ-

numero *parimenti dispari* (ἀρτιάκις περισσός) (12), e numero *disparimenti dispari* (περισσάκις περισσός) (13). Ed un'ulteriore conferma della compresenza negli anzidetti libri aritmetici, di elementi provenienti storicamente dalla tradizione pitagorica è fornita dal fatto che Euclide per indicare quei numeri che sono rispettivamente gli uni il prodotto di due fattori tra loro eguali e gli altri il prodotto di tre fattori tra loro uguali, usa per i primi l'espressione *numero quadrato* (τετράγωνος ἀριθμός) (14) e per gli altri l'espressione *numero cubo* (κύβος ἀριθμός) (15), la cui origine storica va sicuramente trovata nella cosiddetta aritmogeometria pitagorica (16).

τιος ἀριθμός ἐστιν ὁ ἐπὶ ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρούμενος κατὰ ἀρτίον ἀριθμόν. (« Numero parimenti pari è quello che è misurato da un numero pari secondo un numero pari »).

(12) EUCLIDIS *Elementa*, vol. II, libri V-IX, ed. cit., p. 103, 15-16: Ἀρτιάκις δὲ περισσός ἐστιν ὁ ἐπὶ ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρούμενος κατὰ περισσόν ἀριθμόν. (« Numero parimenti dispari è quello che è misurato da un numero pari secondo un numero dispari »).

(13) EUCLIDIS *Elementa*, vol. II, libri V-IX, ed. cit., p. 101, 3-4: Περισσάκις δὲ περισσός ἀριθμός ἐστιν ὁ ἐπὶ περισσοῦ ἀριθμοῦ μετρούμενος κατὰ περισσόν ἀριθμόν. (« Numero disparimenti dispari è quello che è misurato da un numero dispari secondo un numero dispari »).

(14) EUCLIDIS *Elementa*, vol. II, libri V-IX, ed. cit., p. 104, 21-22: Τετράγωνος ἀριθμός ἐστιν ὁ ἰσῶς ἢ ἐπὶ δύο ἰσῶν ἀριθμῶν περιεχόμενος. (« Numero quadrato è quello che il prodotto di due numeri uguali ovvero che è contenuto da due numeri uguali »).

(15) EUCLIDIS *Elementa*, vol. II, libri V-IX, ed. cit., p. 104, 23-24: Κύβος δὲ ὁ ἰσῶς ἢ ἰσῶς ἢ ἐπὶ τριῶν ἰσῶν ἀριθμῶν περιεχόμενος. (« Numero cubo è quello che è il prodotto di tre numeri uguali ossia che è contenuto da tre numeri uguali »).

(16) Per la presenza nell'aritmogeometria pitagorica del concetto di *numero quadrato*, vedi ARISTOTLE'S, *Metaphysics*, ed. cit., p. 986 a 26. Per l'origine pitagorica del concetto di *numero cubo*, vedi *Theologumena arithmetica*, edidit V. De Falco, Lipsia, Teubner, 1922, p. 82, 10-83, 2: Ἔτι καὶ Σπεύσιππος ὁ Πρωτωνης μὲν υἱὸς τῆς τοῦ Πλάτωνος ἀδελφῆς, διάδοχος δὲ Ἀκαδημίας πρὸ Σενокράτου, ἐκ τῶν ἑξαίρετως σπουδασθεῖσων ἀπὸ Πυθαγορικῶν ἀκροάσεων, μάλιστα δὲ τῶν Φιλολάου συγγραμμάτων, βιβλιδίων τε συντάξας γλαυκῶν ἐπέγραψε μὲν αὐτὸ Περὶ Πυθαγορικῶν ἀριθμῶν, ἀπ' ἀρχῆς δὲ μέχρι ἡμισυς περὶ τῶν ἐν αὐτοῖς γραμμικῶν ἐμμελίστα διεξελθὼν πολυγωνίων τε καὶ παντοίων τῶν ἐν ἀριθμοῖς ἐπιπεδῶν ἅμα καὶ στερεῶν περὶ τῶν πέντε σχημάτων, ἃ τοῖς κοσμοῖς ἀποδοῖσθαι στοιχείοις, ἰδιότητος τε αὐτῶν καὶ πρὸς ἀλλήλα κοινότητος, περὶ ἀναλογίας τε καὶ ἀντακολουθίας, μετὰ ταῦτα λοιπὸν θάτερον τὸ τοῦ βιβλίου ἡμισυ περὶ δεκάδος ἀντικρυς ποιεῖται φυσικωτάτην αὐτῇ ἀποσαίνων καὶ τελεσιτωτάτην τῶν ὄντων. « Anche Speusippo, figlio di Potone sorella di Platone, e successore di Platone nell'Accademia, prima di Senocrate, dalle tradizioni orali dei Pitagorici sempre in particolar modo seriamente studiate e soprattutto dagli scritti di Filolao, compose un eccellente libretto che intitolò *Dei numeri pitagorici*. Dal principio fino alla metà egli tratta nel modo più appropriato dei numeri lineari, di quelli poligonali e dei numeri piani e solidi di ogni specie; poi delle cinque figure che sono attribuite agli elementi cosmici e delle loro proprietà particolari

Quanto finora detto, a proposito della questione della presenza negli *Elementi* euclidei, di formazioni concettuali provenienti storicamente dalla tradizione pitagorica (o almeno da certe fasi di sviluppo del pensiero matematico della scuola pitagorica) e dell'opera matematica di Eudosso, è sufficiente indizio del rapporto di storica dipendenza di una rilevante parte della trattazione contenuta negli *Elementi* di Euclide rispetto ad alcune delle principali fasi di sviluppo del pensiero matematico pre-euclideo, quali sono, per l'appunto, tra l'altro, la matematica pitagorica e il pensiero matematico di Eudosso. Pertanto possiamo concludere la breve discussione finora condotta, dicendo che gli *Elementi* di Euclide possono ben essere considerati come una fonte storica, utilizzabile per la ricostruzione di due momenti di fondamentale importanza nella storia della matematica pre-euclidea, quali sono rispettivamente la matematica pitagorica e quella teoria delle proporzioni di Eudosso di Cnido, per mezzo della quale — come è noto — fu, almeno per alcuni aspetti, definitivamente superata la crisi provocata, nell'ambito della matematica pitagorica, dalla scoperta dell'incommensurabile (17).

PAOLO COSENZA

COSENZA P., *Tracce della matematica pitagorica e del pensiero matematico di Eudosso di Cnido negli Elementi di Euclide*: AAN LXXXV 1974 422-426. | Le concept de proportion qui est à la base de la théorie développée dans le livre V des *Éléments* est essentiellement différent du concept que présupposent les livres arithmétiques. Le premier est tributaire d'Eudoxe, tandis que le second reflète quelques éléments de la mathématique pythagoricienne.

e di ciò che hanno di comune tra di loro; infine della proporzione continua e di quella discontinua. La seconda parte del libro tratta esclusivamente della decade. Speusippo dimostra che essa in sommo grado è conforme alla natura »).

(17) Sul significato matematico e l'importanza storica della teoria delle proporzioni di Eudosso di Cnido si veda tra l'altro:

— T. L. HEATH, *A history of Greek mathematics*, Oxford, Clarendon Press, 1921, vol. I, pp. 384-391;

— F. ENRIQUES e G. DE SANTILLANA, *Storia del pensiero scientifico*, vol. I, Bologna, Zanichelli, 1932, pp. 368-369;

— E. BORTOLOTTI, *Storia della matematica elementare*, pp. 583-584, 587-588, in *Enciclopedia delle matematiche elementari e complementi*, Milano, Hoepli, vol. III, parte II, 1954;

— L. GEYMONAT, *Storia della matematica*, pp. 337-338, in *Storia delle scienze*, Torino, UTET, 1965;

— A. FRAJESE, *Attraverso la storia della matematica*, Firenze, Le Monnier, 1971, pp. 148-177.