

géométriques; aucune formule n'est notée, le signe f n'est même pas employé; de plus le langage de Pascal est exactement celui de Cavalieri, c'est-à-dire qu'il supprime toujours dans tous ses énoncés les facteurs infiniment petits et ne conserve que les sommes infinies des abscisses, des ordonnées, des arcs, etc. Pour cela, quand il doit introduire dans un même énoncé plusieurs sommes, il a toujours soin de supposer égaux entre eux les infiniment petits, ce qui lui permet de les supprimer comme facteur commun. »

C. H.

MÉLANGES.

783 p. 4
TANNERY, P.
1885

SUR L'ARITHMÉTIQUE PYTHAGORICIENNE;

(3)

PAR M. PAUL TANNERY.

I.

Dans mon étude sur *Domninos de Larissa* (1), j'ai dit que Jamblique avait eu à sa disposition des documents anciens sur l'arithmétique pythagoricienne, et que son *Traité* méritait un examen spécial, moins au point de vue mathématique (car il a été suffisamment analysé à cet égard par Nesselmann et M. Cantor) qu'en ce qui concerne les renseignements historiques qu'il renferme: cet examen est le but que je me propose; je ferai en même temps usage des quelques autres ouvrages qui nous ont conservé des traces des doctrines pythagoriciennes sur les nombres.

Le traité de Jamblique sur l'Arithmétique, édité d'une façon assez incorrecte par Tennulius (Arnheim, 1668), formait la quatrième Partie d'un Ouvrage intitulé: *Discours sur la secte pythagorique* et dont nous possédons également les trois premiers Livres, *Sur la Vie pythagorique*, *Exhortation à la Philosophie*, *Sur la science mathématique en général*, livres qui n'offrent

(1) *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*, p. 298, octobre 1884.

pour l'histoire des Mathématiques qu'un intérêt tout à fait secondaire. D'un scolie à la vérité incomplet, comme des passages où Jamblique annonce des développements ultérieurs, on a conclu que ce dernier avait dû aller jusqu'à la décade pythagorique et que nous aurions par suite perdu six Livres : *Sur la Physique, Sur l'Éthique, Sur la Théologie, Sur la Musique, Sur la Géométrie, Sur la Sphérique*. Il n'y a pas cependant de preuves décisives établissant que Jamblique avait complètement achevé son Ouvrage, et notamment rédigé les trois derniers *Discours*. Mais Syrianus, dans ses commentaires sur la Métaphysique d'Aristote (Venise, 1556), cite le V^e et le VII^e Livre de Jamblique, et ces citations semblent bien indiquer que ces Livres étaient respectivement consacrés, en fait, à la Physique et à la Théologie.

On peut trouver singulière cette intercalation de trois Livres qui rompent la série de l'exposition des quatre sciences mathématiques reconnues par les pythagoriciens ; mais il faut se rendre compte que, malgré l'apparence, ces trois Livres formaient la suite naturelle de l'Arithmétique, en traitant, conformément à la tradition pythagoricienne, du rôle des nombres dans la nature et de leurs propriétés mystiques, soit dans l'ordre humain, soit dans l'ordre divin. Les citations de Syrianus, qui touchent expressément les nombres, confirment l'exécution de ce plan, très nettement exposé par Jamblique à la fin de son IV^e Livre sur l'Arithmétique.

« Arrêtons ici l'introduction suivant le pythagoricien Nicomaque. Plus tard, si Dieu le permet, nous ferons plus complètement cette même introduction arithmétique, et nous te l'offrirons, puisque, par le moyen de celle-ci, tu seras déjà capable d'aller plus loin. Nous y comprendrons tous les autres *épanthèmes* relatifs aux nombres depuis l'unité jusqu'à la décade, et qui rentrent dans la Physique, dans l'Éthique et encore et surtout dans la Théologie ; ainsi il te sera plus facile et très simple de recevoir l'enseignement des trois introductions suivantes, je veux dire de la Musique, de la Géométrie et de la Sphérique. »

Ainsi Jamblique annonce, avant de passer aux trois autres sciences mathématiques, un *seul* Traité, que l'abondance des matières lui aura fait diviser en trois *Discours*, et qu'il considère comme faisant essentiellement partie de l'Arithmétique. On voit aussi qu'en dehors des considérations générales (qu'on peut croire,

étant donné Jamblique, avoir été passablement étendues, mais sans intérêt majeur), ce Traité devait surtout être constitué par des développements sur les propriétés, mystiques et autres, des dix premiers nombres, qu'au moins une partie de l'école, dès le temps d'Aristote, avait pris l'habitude de considérer exclusivement pour les spéculations de cet ordre.

La perte des trois Livres de Jamblique en question est compensée pour nous dans une certaine mesure par l'existence d'une petite compilation anonyme intitulée les *Théologoumènes de l'Arithmétique*, éditée en dernier lieu par Ast (Leipzig, 1817). La date de cette compilation ne peut guère être précisée; l'auteur le plus récent qu'elle cite est un Anatolius qui paraît avoir été un maître de Jamblique. On l'a attribuée à ce dernier et l'on a prétendu qu'elle représentait son Livre VII, mais cette opinion ne peut se défendre: ce n'est ni le style, ni les procédés de compilation de Jamblique; la citation faite par Syrianus ne peut s'y retrouver; enfin, et surtout, elle correspond non pas au Livre VII, mais bien aux Livres V, VI et VII de Jamblique. Elle expose, pour chacun des nombres de la décade pris successivement, à la fois les propriétés d'ordre physique, d'ordre éthique et d'ordre théologique; nous y voyons par exemple, pour le nombre 5, qu'il y a 5 éléments (propriété physique), que la pentade est au plus haut degré représentative de la justice (propriété éthique), qu'elle est appelée *Némésis*, etc. (propriété théologique).

Évidemment l'auteur a puisé aux mêmes sources que Jamblique; certains passages se retrouvent exactement comme fond, et sous une forme au moins très voisine, par exemple dans le Traité arithmétique de Jamblique; mais la confusion qui règne, à l'intérieur du Chapitre consacré à chaque nombre, entre les propriétés de divers ordres, semble assez prouver que le compilateur n'a pas profité du travail opéré par Jamblique pour distinguer ces propriétés d'après leur caractère, et que par suite il a dû écrire vers la même époque, mais avant la publication des trois Livres V à VII. Sa compilation doit donc nous représenter, encore plus fidèlement que ne le feraient ces trois Livres perdus, l'état de la tradition avant Jamblique.

Nous devons en tout cas retenir ceci, que pour ce dernier, d'après cette tradition, le plan d'une arithmétique pythagori-

cienne comprenait, après l'exposé des propriétés générales des nombres conformément à la marche suivie par Nicomaque, l'exposé des propriétés d'ordre mystique spécialement reconnues aux dix premiers nombres.

Il est certain que cette tradition est très antérieure à Jamblique ; nous savons que Nicomaque avait composé lui-même des *Théologoumènes arithmétiques*, qui, d'après les détails que nous donne Photius, étaient tout à fait composés sur le même plan que l'Ouvrage anonyme que nous possédons, et dont nous retrouvons, dans ce dernier, de nombreux extraits. Nous possédons encore, d'autre part, le Livre de Théon de Smyrne, *Ce qui en Mathématiques est utile pour la lecture de Platon* (Bouilleau, 1644), dont l'auteur traite d'abord de l'Arithmétique, puis de la Musique, où il comprend la théorie des rapports et des proportions, ce en quoi il suit évidemment la tradition antique ; viennent ensuite, passablement développées, les propriétés mystiques de la décade, puis quelques mots sur la Géométrie, la Stéréométrie, et les médiétés, après quoi Théon passe à l'Astronomie (partie publiée par Th. H. Martin, Paris, 1849).

Il serait intéressant de déterminer jusqu'à quel point on doit considérer comme fidèle, en ce qui concerne l'ancienne école pythagorique, cette tradition ainsi bien constatée à partir du premier siècle de l'ère chrétienne et au moins de l'époque des maîtres et précurseurs immédiats de Nicomaque, comme Modératus de Gades. Il est évidemment impossible de faire le départ entre les rêveries mystiques dues aux néopythagoriciens, et celles dont l'ancienne école leur avait donné l'exemple ; mais il ne me paraît pas douteux que le plan général d'Arithmétique, avec les développements finaux sur la décade, tel que l'ont conçu Nicomaque, Théon de Smyrne et Jamblique, ne remonte en réalité au v^e siècle avant notre ère, car c'est en fait le même programme qu'avait déjà suivi Speusippe, le neveu de Platon, dans son *Traité Des nombres pythagoriques* (1).

(1) Voir, sur le fragment de Speusippe conservé dans les *Théologoumènes*, mon étude dans les *Annales de la Faculté des Lettres de Bordeaux*, t. V, p. 375 ; 1883. Tout au plus peut-on dire que les tendances mystiques y sont beaucoup moins accusées que dans les écrits néopythagoriciens, et qu'il n'est pas clair que Speusippe se soit étendu sur les propriétés spéciales des nombres autres que 10.

On a cependant besoin de preuves particulières, relatives aux développements que pouvaient déjà présenter, dans l'ordre d'idées mystique, les écrits des anciens pythagoriciens, et il convient, à cet égard, d'examiner les citations expresses d'auteurs déterminés que nous rencontrons dans Nicomaque, dans Théon de Smyrne, dans Jamblique et dans les *Théologoumènes*. J'écarterai de ces citations celles dont la tendance est seulement philosophique, comme celles qui se rapportent au rôle des idées d'unité et de dualité, et j'étudierai en second lieu celles dont le caractère est plus purement scientifique, et qui nous seront surtout fournies par Jamblique.

II.

Quand on parle de citations d'anciens pythagoriciens, on ne peut ajouter foi à celles qui remontent à une époque antérieure à celle de Philolaos, puisque la tradition constante de l'antiquité est qu'il fut le premier qui, dans son ouvrage *Sur la Nature*, exposa les doctrines de l'Ecole, jusque-là réservées au cercle des initiés, et que, d'autre part, il est certain que, dans cette exposition, il s'écarta singulièrement des conceptions primitives. Il est toutefois à remarquer que la tradition attribue soit à Pythagore, soit à ses disciples immédiats, la rédaction de poèmes mis sous le nom d'Orphée, et que l'ensemble de ces poèmes, en écartant les interpolations et falsifications de date récente, et dues surtout à des gnostiques chrétiens, remonte incontestablement aux ^{vi}^e et ^v^e siècles avant J.-C.

On ne peut donc négliger absolument les citations des *Théologoumènes* (VI et IX), d'après lesquelles :

1° Les pythagoriciens, suivant les traces d'Orphée, appelaient l'hexade *holomélie*, ce qui paraît se rapporter à la propriété du nombre 6, en tant que parfait, d'être égal à la somme de ses parties aliquotes ;

2° Orphée et Pythagore ont particulièrement appelé l'ennéade *Kourétide*, *Hypérion*, *Terpsichore*. Ici nous sommes en plein mysticisme, et nous rencontrons cette synonymie singulière, qui se trouvait déjà si développée, pour tous les nombres de la décade, à l'époque de Nicomaque.

J'attache relativement moins d'importance aux citations du pythagoricien Aristée de Crotone, successeur immédiat de Pythagore, suivant la tradition. Jamblique (p. 168) rapporte qu'il avait parlé de la proportion

$$6:8::9:12,$$

enseignée à Pythagore par les Babyloniens, et les *Théologoumènes* (VI) disent qu'il avait montré que, dans la décade, il n'est pas possible de trouver un autre nombre que 6 susceptible de tous les rapports de l'harmonie psychique, c'est-à-dire sans doute, pouvant servir de point de départ à une pareille proportion.

Les citations de Philolaos ont plus d'importance, d'autant qu'elles proviennent d'un Ouvrage bien déterminé, dont l'authenticité n'est guère contestable, et qui existait certainement encore au temps de Jamblique. On a de cet Ouvrage de nombreux fragments, conservés surtout par Stobée, et dont plusieurs ont un caractère mystique très accusé; mais je crois inutile de m'appuyer sur eux, et je me borne aux citations tirées des quatre Ouvrages que j'examine.

Il semble résulter du texte de Nicomaque (II, 26) que Philolaos avait appelé le cube *harmonie géométrique*, parce que dans les nombres des faces, des arêtes et des sommets de ce polyèdre, il retrouvait la proportion harmonique : 6 . 8 . 12.

Il est à remarquer que, d'après le commentaire inédit d'Asclépius sur Nicomaque, cette appellation du cube aurait été mentionnée par Aristote dans son Traité *De l'âme*, tandis que, dans le texte que nous possédons de ce Traité, cette mention ne se retrouve pas; néanmoins une tendance mystique peut être attribuée à cette dénomination, car on sait de reste que Philolaos définissait l'âme comme une harmonie, ce qu'on peut rapprocher de la citation d'Aristée qui précède. En tout cas, nous avons d'autres témoignages un peu plus précis.

Théon (*Mus.* 49) dit que Philolaos s'était longuement étendu sur les propriétés de la *décade*, et les *Théologoumènes* (X), que d'après lui on l'a appelée *foi*; toutefois le texte ne permet pas de décider s'il lui avait en réalité donné ce nom, ou si quelque néopythagoricien avait trouvé dans son langage un motif suffisant pour adopter cette synonymie.

Les *Théologoumènes* (IV) citent encore un fragment du Livre *De la Nature*, d'après lequel Philolaos distinguait dans l'homme quatre parties primordiales, le cerveau, le cœur, le nombril, les organes génitaux. Ici nous rencontrons dans ce quaternaire, un type d'énumérations semblables des choses qui sont au nombre de trois, quatre, cinq, etc., énumérations fréquentes dans les divers documents relatifs aux pythagoriciens. C'est principalement sous cette forme qu'ils présentaient les propriétés des nombres relativement à la Physique; on doit y voir surtout un procédé mnémotechnique pour le classement des connaissances de toute sorte, mais l'emploi systématique de ce procédé conduisit naturellement à attribuer aux nombres des propriétés mystiques. On peut remarquer au reste que le même procédé se retrouve chez les peuples les plus différents (¹), et que, chez les Hindous, il a été l'origine de la synonymie employée pour le système de numération suivi dans les *slokas* de Brahme Gupta.

D'après Théon (*Mus*, 49), Archytas aurait écrit un Livre spécial *Sur la décade*; après lui, les *Théologoumènes* (VII) citent un Livre *Sur l'hebdomade* du pythagoricien Proros. D'après Jamblique (*Sur la vie pythagorique*), ce dernier était de Cyrène et particulièrement lié avec Clinias de Tarente, lequel doit avoir vécu au temps de Platon, puisque Aristoxène (dans Diogène Laërce) prétend qu'il aurait empêché le disciple de Socrate de brûler les œuvres de Démocrite. Proros aurait dit que les Pythagoriciens disaient *σεντάς* pour désigner le nombre 7; ce témoignage est curieux en ce qu'il indique au sein de l'École une certaine influence exercée au moins par le langage des populations italiotes voisines de la Grande-Grèce.

Les *Théologoumènes* (V) citent enfin un fragment du Livre *Sur les nombres* d'un certain Mégillos; on s'y trouve en pleine synonymie mystique; mais l'époque où vivait ce pythagoricien ne peut être déterminée, et, comme il ne figure pas sur les listes de Jamblique, il est très probablement postérieur au IV^e siècle avant J.-C.

Les conclusions à tirer de ce relevé me paraissent les suivantes.

(¹) Par exemple, dans les *Proverbes* de Salomon, dans les *Triades* des bardes cambriens, etc.

Le plan général d'une Arithmétique traitant d'abord des propriétés mathématiques de tous les nombres, puis des propriétés de toute sorte spéciales aux dix premiers nombres, ce plan que nous retrouvons chez les néopythagoriciens, paraît bien conforme à la tradition de l'ancienne école. Dans la seconde Partie, les deux ordres de synonymie, l'un proprement mnémotechnique, l'autre purement mystique, sont également anciens, le second remontant aux poèmes orphiques; mais leur développement, surtout pour le second ordre, paraît postérieur au iv^e siècle, tout en restant antérieur à l'ère chrétienne.

Ces conclusions diffèrent des idées admises en général, en ce que l'on considère plutôt le développement mystique comme s'effectuant à partir de la renaissance du pythagorisme, et comme influencé par les idées orientales; à la vérité, Jamblique est imbu de ces idées, et l'on en trouve des traces dans les *Théologoumènes* (par exemple le mot d'*anges*); mais la synonymie mystique, déjà complètement développée au temps de Nicomaque, a un caractère exclusivement hellène. Il faut d'ailleurs remarquer que la renaissance du pythagorisme a eu lieu non pas à Alexandrie, mais bien à Rome, au premier siècle avant l'ère chrétienne; le chef en est un certain Sextius (Sextus de Jamblique), qui mélange déjà sans doute aux éléments traditionnels de nouvelles formules, mais les emprunte surtout aux stoïciens; ses disciples ont, comme lui, reçu la culture grecque, mais ce sont de purs Romains ou des Occidentaux, comme Modératus, auquel se rattache immédiatement Nicomaque.

Jamblique admet que Sextus a recueilli directement (κατὰ διὰ δόχην) la tradition pythagoricienne. Le fait est-il si improbable? Après Aristote, l'École disparaît dans la Grèce propre, et elle ne prend pas pied dans les États fondés par les successeurs d'Alexandre; vers la même époque, la conquête romaine s'étend sur le foyer originaire du pythagorisme, la Grande-Grèce, bientôt après sur la Sicile, et rompt la plus grande partie des liens qui rattachaient ces pays à l'Hellade. La prétendue extinction complète du pythagorisme dans la Grande Grèce est une légende dont les détails ne supportent pas l'examen. Est-il absurde de supposer qu'il s'y soit perpétué obscurément pendant quatre ou cinq générations sous la domination romaine, avant de former (la première de toutes les

sectes philosophiques grecques) parmi les nouveaux maîtres des élèves qui lui donnent une nouvelle vie? On pourrait placer dans cette période le nom de Megillos et aussi ceux de Myonide et d'Euphranor, que nous rencontrerons plus loin.

Il convient de remarquer que, lorsque Nicomaque (II, 14) cite des écrits *théorétiques* où l'on rencontre la mention de nombres *pyramides colures* (sommés de polygones ne commençant pas à l'unité), Asclépius et Philopon sont d'accord, sous des termes différents, pour reconnaître dans ces écrits, non pas des ouvrages *théoriques* sur l'Arithmétique, où il aurait été traité *ex professo* des nombres pyramides, etc. mais bien des *Théologoumènes*, analogues à ceux composés par Nicomaque lui-même. Asclépius dit que *théorétique* est opposé à *éthique*, pour désigner le caractère propre de ces traités pythagoriciens, dont nous recherchons les traces en ce moment; on sait qu'il nous reste de l'École de nombreux fragments *éthiques*; certains, au moins, pourraient être rapportés à l'époque obscure que nous admettons pour les *Traité théorétiques*.

III.

J'aborde maintenant les citations de pythagoriciens qui présentent un intérêt plus proprement scientifique.

Pour Pythagore lui-même, il suffit de mentionner: 1° le fragment de l'écrit *Sur les Dieux* (*Théolog.*, IV), relatif à la distinction des quatre sciences mathématiques, fragment certainement apocryphe, mais conforme à la tradition; 2° la définition du nombre, attribuée au Maître par Jamblique (p. 11) et qui, évidemment postérieure aux stoïciens, n'offre d'ailleurs aucun intérêt; 3° les affirmations qu'il connaissait le triangle rectangle en nombres (*Théolog.*, I), la propriété des nombres *amis*, 284 et 220 (*Jambl.*, p. 47), les trois proportions arithmétique, géométrique et harmonique (*Nicomaque* II, 22), ainsi que la proportion

$$:6:8:9:12,$$

et l'application des rapports de ces derniers nombres dans la théorie de la musique, ce en quoi il aurait été seulement suivi par

Aristée, Timée de Locres, Philolaos et Archytas (Jamblique, p. 168).

Dans l'ordre des temps, nous rencontrons ensuite Hippiasos, que la tradition représente comme ayant formé secte au sein de l'École; ses disciples, les *Acousmatiques*, paraissent se distinguer des *Mathématiciens*, surtout comme observant scrupuleusement nombre de préceptes symboliques dont ils n'ont pas le véritable sens; leur maître aurait été châtié par les dieux d'une révélation de la doctrine relative au dodécaèdre régulier. Les définitions du nombre que Jamblique (p. 11) attribue aux *Acousmatiques* n'ont pas plus d'authenticité ni d'intérêt que celle qu'il rapporte à Pythagore, et les témoignages qui méritent le plus de confiance s'accordent pour reconnaître comme supposés les écrits qui circulaient anciennement sous le nom d'Hippiasos. Théon (*Mus.*, 12) dit assez vaguement qu'il avait fait des recherches expérimentales sur l'acoustique, mais il est surtout à remarquer que Jamblique (p. 141, 159, 163) le lie constamment à Archytas, quand il parle de ce dernier à propos des proportions.

Comme les écrits authentiques d'Archytas, en particulier son traité de l'*Harmonique*, dont Nicomaque (I, 3) cite le début ⁽¹⁾, devaient subsister au temps de Jamblique, à côté des écrits apocryphes qui pouvaient porter aussi le nom de l'ancien pythagoricien ⁽²⁾, le fait a une certaine importance, parce qu'il est très possible qu'Archytas y ait cité nommément Hippiasos et se soit appuyé sur lui. Lorsque Jamblique notamment rapporte que la proportion harmonique avait d'abord été appelée *sous-contraire*, et que son nom fut changé plus tard d'après Archytas et Hippiasos, on peut bien faire remonter au dernier cette appellation, que devait déjà avoir adoptée Philolaos, antérieur à Archytas. Quant à l'invention des trois *médiétés* sous-contraires, il ne semble pas au contraire qu'il faille la faire remonter en tout cas au delà d'Archytas, d'autant que Jamblique se contredit sur cette question;

(¹) Au sujet de la parenté des quatre sciences. Dans cette citation, Hoche aurait dû conserver τοι (pour οί) devant περί τὰ μαθήματα; Archytas désigne ainsi les *mathématiciens* de l'école de Pythagore.

(²) En particulier ceux qui en feraient l'inventeur des dix catégories d'Aristote.

dans deux passages, il la donne à Archytas et Hippiasos, dans un troisième (p. 142) à Eudoxe, disciple d'Archytas, ainsi que le fait également Proclus d'après Eudème; quant aux quatre dernières *médiétés*, Jamblique donne expressément leurs inventeurs, Myonide (1) et Euphranor, comme postérieurs à Eratosthène; ils seraient donc au plus tôt du 11^e siècle avant J.-C.

Les citations de Timée de Locres par Jamblique se rapportent à l'ouvrage apocryphe calqué sur le dialogue de Platon qui porte le nom du pythagoricien; il n'y a donc pas à s'y arrêter; et si nous arrivons aux témoignages plus authentiques concernant Philolaos et Archytas, ils n'offrent en réalité qu'un intérêt médiocre, en dehors de ceux que nous avons déjà vus pour le second.

Du premier, Jamblique ne cite que des formules philosophiques sur l'infini et le fini et une prétendue définition du nombre qui présente le même caractère, et qui ne reproduit probablement pas exactement le texte de Philolaos; au reste, le livre *Sur la Nature* n'avait nullement une portée mathématique, et la valeur scientifique de ce Livre consistait surtout dans sa partie physique et astronomique.

Théon (*Arith.*, 3) remarque que Philolaos et Archytas disent indifféremment l'un ou l'unité, c'est-à-dire qu'ils ne distinguent pas entre le nombre un et l'idée platonicienne de l'unité. Il cite d'Archytas (*Arith.*, 5) un fragment probablement emprunté au Livre *De la décade*, et sur lequel nous reviendrons; enfin (*Mus.*, 13), il dit, probablement d'après le Traité sur l'*Harmonique*, qu'Archytas (il ajoute Eudoxe) avait reconnu que les sons les plus hauts correspondaient aux vibrations les plus rapides, et que les rapports numériques correspondant aux accords musicaux devaient exister entre les vitesses des mouvements.

Comme nous savons d'ailleurs qu'Archytas avait introduit d'autres nombres que les quatre premiers dans les rapports musicaux, il est possible que ce soit à cette occasion qu'il ait recherché d'autres *médiétés* que l'harmonique, et que les recherches de Myonide et d'Euphranor se relient au même ordre d'idées, que

(1) La leçon περί τε Μυωνίδην me paraît plus probable que celle suivie par Tennulius : περί Τεμνωνίδην.

l'occasion qui leur a donné naissance soit donc plutôt une question de musique qu'une question d'Arithmétique.

Les *Théologoumènes* (IV) citent Clinias de Tarente à propos de la distinction des quatre sciences mathématiques. C'était, nous l'avons dit, un contemporain de Platon.

Nous arrivons enfin aux citations de Jamblique relatives à Thymaridas; à la différence de tous ceux que nous avons rencontrés jusqu'à présent, ce dernier paraît avoir composé un Ouvrage réellement arithmétique, renfermant en particulier une proposition intéressante pour l'histoire de l'Algèbre, et à laquelle Jamblique donne le nom d'*épanthème*.

Cette proposition peut s'exprimer comme suit dans le langage moderne.

Si l'on a, entre n inconnues, les n équations

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = S,$$

$$x_1 + x_2 = a_1,$$

$$x_1 + x_3 = a_2,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$x_1 + x_n = a_{n-1},$$

on a

$$x_1 = \frac{\sum_1^{n-1} a_p - S}{n-2},$$

d'où l'on tire immédiatement les autres inconnues.

Jamblique applique cette proportion à la solution en nombres entiers minimi des systèmes d'équations indéterminés :

$$(1) \quad x_1 + x_2 = 2(x_3 + x_4), \quad x_1 + x_3 = 3(x_2 + x_4), \quad x_1 + x_4 = 4(x_2 + x_3)$$

et

$$(2) \quad x_1 + x_2 = \frac{3}{2}(x_3 + x_4), \quad x_1 + x_3 = \frac{4}{3}(x_2 + x_4), \quad x_1 + x_4 = \frac{5}{4}(x_2 + x_3)$$

La solution, d'ailleurs très élégante en fait, se rapproche singulièrement des procédés de Diophante pour des systèmes analogues, et doit, comme principe au moins, remonter à l'époque de l'*épanthème*.

Il y a certainement un grand intérêt historique à déterminer l'âge auquel il faut rapporter Thymaridas; j'ai déjà discuté ailleurs

la question (1) et montré que l'argument de Th.-H. Martin, pour le placer après Théon de Smyrne, se retourne contre son opinion.

Je me contenterai donc de quelques remarques nouvelles, qui me paraissent d'ailleurs suffisantes pour trancher la question.

Pour Jamblique, Thymaridas est incontestablement plus ancien qu'Euclide, car il oppose (p. 11) sa définition de l'unité, *περαίνουσα ποσότης* (la quotité limite), à celle des auteurs plus récents, (*οἱ νεώτεροι*) (2) (ce suivant quoi chaque chose est dite une), qui n'est autre que celle d'Euclide.

La définition de Thymaridas, à côté d'une expression philosophique, en offre une autre qui paraît empruntée au langage de Platon; on peut donc la placer au IV^e siècle avant J.-C. Si d'ailleurs, d'après le témoignage de Jamblique (p. 36), Thymaridas appelait les nombres premiers *rectilinéaires*, et si l'expression de *linéaires* se retrouve évidemment avec le même sens, dans un fragment de Speusippe (*Théolog.*, X), on n'est pas en droit d'en conclure que Thymaridas ait été antérieur à Speusippe, car rien ne prouve qu'il ait été l'inventeur, ni de l'expression, ni du système de figuration auquel elle se rapporte.

Il convient de donner maintenant quelques explications sur le mot d'*épanthème* (littéralement : *surfloraison*). Ce mot n'appartient nullement à Thymaridas; Jamblique l'emploie en général pour désigner des additions à l'*Introduction* de Nicomaque, et l'on a pu voir qu'il s'en servait également pour parler des développements relatifs aux propriétés mystiques des nombres de la décade. Dans un passage d'ailleurs assez obscur (p. 53), il parle du procédé des « tableaux divinatoires (*τῶν μαντικῶν πλινθιδίων*)

(1) Voir *Annales de la Faculté des Lettres de Bordeaux*, t. III, p. 101; 1881, et aussi la préface des *Vorlesungen* de M. Cantor.

(2) La définition de Thymaridas est donnée d'ailleurs, sans nom d'auteur, par Théon de Smyrne. Dans cette définition, *περαίνουσα* est pris dans le sens que lui donne Philolaos; il faut entendre par *quotité* l'ensemble des nombres entiers, les fractions appartenant à la *πληρότης*, c'est-à-dire à l'ordre des grandeurs continues (comme nous le voyons dans Asclépius et Philopon); c'est ainsi une définition analogue à celle également attribuée aux pythagoriciens pour le nombre : l'intermédiaire entre l'unité et les fractions.

dont il est traité dans les *épanthèmes de l'Introduction arithmétique* » : ces tableaux doivent être ceux qui servaient au mode de divination dont j'ai parlé ici-même ⁽¹⁾, d'après S. Hippolyte, et qu'on retrouve dans des lettres apocryphes inédites de Pythagore à Télaugès, Laïs, Hélias (ces derniers noms sont des corruptions de celui de Télaugès) ⁽²⁾.

Voilà donc un second épanthème, consacré à ce que nous pouvons appeler le principe de la preuve par neuf, et qui, avec celui de Thymaridas et sans doute d'autres encore, forme, en dehors des épanthèmes des *Théologoumènes*, comme un recueil servant, à côté de l'*Introduction* de Nicomaque, à l'instruction des étudiants en philosophie; car c'est à ces étudiants que s'adressent et Nicomaque et Jamblique, et l'un et l'autre professent beaucoup moins réellement le pythagorisme qu'une philosophie éclectique, appropriée à l'enseignement général, et où l'on se préoccupe de Platon et d'Aristote autant que de Pythagore.

IV.

En dehors des pythagoriciens proprement dits, Jamblique nous fournit encore quelques citations qui peuvent donner l'occasion d'éclaircir l'histoire des concepts de l'unité et du nombre.

Nicomaque ne définit pas l'unité; après la définition de Thymaridas et celle d'Euclide, Jamblique rapporte (p. 12) celle de Chrysippe (école stoïcienne), la pluralité une ($\pi\lambda\tilde{\eta}\theta\omicron\varsigma \epsilon\nu$); et une autre qu'il donne comme pythagoricienne, l'intermédiaire entre l'unité et les fractions ⁽³⁾. Il rejette la définition de Chrysippe, comme contenant une contradiction *in adjecto*, puisque l'idée de pluralité est opposée à celle d'unité. Mais nous pouvons y voir une tentative sérieuse, celle de faire expressément rentrer

⁽¹⁾ Sur l'invention de la preuve par neuf (*Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*, t. VI; 1882).

⁽²⁾ Manuscrits de la Bibliothèque nationale de Paris, n^{os} 2256, 2009, 2419, etc.

⁽³⁾ Je ne m'arrête pas à une quatrième anonyme, et qui n'est qu'une formule philosophique.

le concept d'unité dans celui plus général de nombre, tandis que les autres définitions maintiennent plus ou moins l'exclusion des deux concepts.

Originellement, la pluralité ou le nombre ne commençait qu'à 3 ; 1 et 2 n'étaient que les principes de l'impair et du pair, jouissant en puissance, mais non en acte, suivant les termes d'Aristote, des propriétés du nombre. Cette conception, dont la source était dans les habitudes du langage, a été de bonne heure abandonnée pour le nombre 2, mais des traces s'en conservent encore dans Nicomaque, d'après lequel 2 n'est pas, à proprement parler, un nombre premier. Elle est très nette dans la définition pythagoricienne du nombre pair, celui qui peut se diviser à la fois en parties égales et en parties inégales ; l'exception faite par Nicomaque au sujet de la dyade, primordiale du pair, est évidemment une modification postérieure de la définition originaire.

Pour 1, au contraire, sa position en dehors du nombre resta toujours affirmée dans les définitions classiques, celles d'Euclide, et ne fut pas sérieusement contestée.

Cette conception entraîna une conséquence singulière ; d'après Aristote (Théon, *Arithm.*, 5), c'est une doctrine pythagoricienne que l'unité étant principe du nombre en général, aussi bien du pair que de l'impair, ne peut être regardée comme impaire, et qu'il faut l'appeler *paire impaire*. Mais l'autorité d'Aristote ne peut faire regarder cette conclusion comme généralement adoptée par l'École, et quoique Théon, qui d'ailleurs combat cette opinion, semble dire qu'Archytas s'y ralliait, le fragment qu'il cite ne peut être entendu que dans le sens opposé.

En opposition à cette tradition relative au nombre 1, il convient certainement de mentionner un passage, où Jamblique (p. 19) remarque au contraire « qu'il semble y avoir lieu de continuer la série du nombre au-dessous de l'unité par le zéro (τὸ οὐδέν), qui s'introduit souvent naturellement malgré nous dans la théorie ». Ainsi un nombre en général est la moitié de la somme de celui qui le précède et de celui qui le suit ; 1 sera la moitié de 2 et de l'οὐδέν.

Pour le nombre, Nicomaque donne trois définitions : l'une (un système d'unités) est attribuée par Jamblique à Thalès, qui l'aurait,

prétend-il, empruntée aux Égyptiens; une autre (une *pluralité déterminée*) serait celle d'Eudoxe; Jamblique ne parle pas de la troisième [*une réunion* ($\chiύμα$) *en quotité, composée d'unités*]; elle doit être postérieure à celle d'Euclide (une pluralité composée d'unités).

La définition de Thalès, qui s'applique exclusivement aux nombres entiers, en en distinguant d'ailleurs l'unité, est restée de fait classique à côté de celle d'Euclide, moins simple et ne disant guère plus. Celle d'Eudoxe témoigne, à mon sens, d'un progrès notable dans le concept du nombre; car une pluralité peut être composée, soit d'unités, soit de parties, et l'indétermination laissée par la définition est évidemment calculée; la notion du nombre, conçu comme indifféremment entier ou fractionnaire, doit donc remonter jusqu'à Eudoxe.

La définition d'Euclide, malgré l'apparence, ne constitue pas un pas en arrière; car, dans ses Livres arithmétiques, le géomètre traite des propriétés des nombres entiers, et il était naturel qu'il restreignît, dans sa définition, le concept déjà formé du nombre rationnel.

La troisième définition donnée par Nicomaque, et que l'on peut regarder comme stoïcienne, se distingue par la priorité donnée au concept de quotité ($ποσότης$) substitué à celui de *pluralité* ($πληθος$) qui, dans le langage ordinaire, ne se distinguait guère de celui du nombre entier; cette définition paraît donc conçue parallèlement à une autre applicable au nombre fractionnaire.

Les Éléments d'Euclide étant devenus classiques, le concept ne fit aucun progrès dans la période qui suit le commencement de l'ère chrétienne, et le langage ne devint nullement plus précis. Au début de son préambule, Diophante définit le nombre comme un composé d'unités, tandis que dans ses problèmes il entend comme nombre en général tout nombre rationnel, et spécifie l'entier comme $ἄλος$ (III, 13) ou $ἁλόκληρος$ (IV, 45).

On ne peut même dire, ce qu'on fait souvent, que la notion du nombre irrationnel ait été absolument étrangère aux Grecs; car on rencontre dans Diophante (par exemple IV, 10), des expressions comme : $καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς οὐ ῥητός$ (et l'inconnue devient non

rationnelle). Le fait que dans ses problèmes d'Analyse indéterminée Diophante ne s'occupe que des solutions rationnelles ne doit pas faire illusion; car l'origine de ces problèmes doit être cherchée dans l'idée qu'il est possible, au moins en certains cas, de trouver des relations rationnelles permettant des éliminations entre des équations de plusieurs inconnues de degré supérieur. Ainsi l'équation

$$x^2 + y^2 = z^2$$

peut être remplacée par le système

$$x = u^2 - v^2, \quad y = 2uv, \quad z = u^2 + v^2,$$

qui donne rationnellement x, y, z (les trois côtés du triangle rectangle en nombres) en fonction de deux inconnues auxiliaires.

Lorsque les concepts fondamentaux d'une science sont négligés, on peut assurer que le progrès de la Science se trouve enrayé. Le résultat de notre étude est d'ailleurs conforme à cette conclusion; on peut trouver dans Nicomaque, dans Théon et surtout dans Jamblique de nombreuses remarques de détail plus ou moins intéressantes; mais les théories qu'ils exposent leur sont très antérieures, et, somme toute, ils ont été loin de les améliorer. On ne peut leur attribuer aucune découverte importante (¹), ni quelque perfectionnement sérieux dans le mode d'exposition de ce qui était connu avant eux; bien au contraire, l'absence de toute démonstration réelle, l'appel constant à l'intuition ou à l'induction, sont des signes qui marquent que le niveau des études baisse au lieu de s'élever.

Pour être juste à leur égard, il convient de remarquer que sans doute ils n'avaient pas de modèle qui pût les guider, du moment où ils n'adoptaient pas la forme euclidienne, c'est-à-dire l'appareil

(¹) On a récemment prétendu que Nicomaque revendiquait, comme lui appartenant, l'invention de notre Table de multiplication à double entrée; rien n'est moins exact. Si d'ailleurs il s'étend longuement sur les relations des nombres de cette Table, il n'est nullement prouvé qu'elle ait été employée dans l'antiquité pour un but pédagogique; en tout cas, Nicomaque suppose le calcul connu de ses lecteurs.

géométrique pour la démonstration des propriétés des nombres. Cet appareil fut adopté dès la rédaction des plus anciens *Éléments arithmétiques* (bien antérieurs à Euclide) parce qu'il était déjà connu et familier, parce qu'on n'en avait pas d'autre. Thymaridas ouvrit une voie nouvelle, et quand on étudie dans Aristote le symbolisme des lettres employées pour représenter des objets de la pensée, on doit se dire qu'il ne fallait alors qu'un pas aux Grecs pour arriver à l'algorithme de Viète. Ce pas, c'était aux Pythagoriciens, semble-t-il, qu'il incombait de le faire; ils faillirent à leur rôle et usèrent leurs efforts dans des rêveries mystiques sans issue.

Si l'un d'eux était parvenu à composer un *Traité d'Arithmétique*, dont les propositions fussent rigoureusement démontrées sans recours à l'appareil géométrique, ce *Traité* serait sans aucun doute devenu classique et aurait fait oublier les *Livres arithmétiques* d'Euclide; des *Ouvrages* comme ceux de Nicomaque et de Jamblique n'auraient pas eu le succès qu'ils ont eu, bien plus ils n'auraient sans doute pas été écrits; enfin Diophante, au lieu de nous donner une compilation de problèmes, aurait peut-être pu s'élever jusqu'à l'exposition de méthodes plus ou moins générales, il aurait eu un modèle pour le guider.

Ce qui manque aux *Mathématiques grecques*, ce sont moins les méthodes (les grands géomètres en possédaient assez pour l'ordre des travaux qu'ils poursuivaient) que des formules propres à l'exposition des méthodes ⁽¹⁾; l'éducation purement géométrique éloignait du cercle d'idées indispensable pour constituer ces formules, elles ne pouvaient être établies tout d'abord que sur le terrain de l'Arithmétique proprement dite ou sur celui de la logistique qui donna naissance à l'Algèbre. Malheureusement la logistique (solution des problèmes numériques) fut, toujours sous

(1) L'incapacité d'exposer clairement une méthode générale sans recourir à des exemples particuliers, l'incapacité par suite de spéculer directement sur la méthode au lieu de spéculer sur les exemples, est ce qui distingue nettement les *Mathématiques* de l'antiquité et du moyen âge de celles des temps modernes. C'est aussi une des raisons qui peuvent expliquer le déclin rapide de la Science dans l'antiquité.

l'influence des doctrines pythagoriciennes, considérée comme une branche secondaire, rentrant à peine dans la Science, et ne produisit que des recueils d'exercices, utiles ou simplement curieux, qui disparurent devant celui de Diophante.

Ni les Hindous, ni les Arabes ne sont parvenus à combler la lacune qu'offrait l'enseignement mathématique des Grecs; il faut attendre jusqu'au xvii^e siècle.

Le rôle des Pythagoriciens dans l'histoire de la Science doit donc être jugé moins favorablement qu'il ne l'a souvent été; certes ils ont remué beaucoup d'idées, soulevé beaucoup de problèmes, ce qui est toujours utile, mais ils n'ont pas abouti à un résultat définitif, ils se sont détournés de la conquête à faire, si l'on fait abstraction de la théorie de la musique, qui restera l'immortel honneur de l'École. Certes Pythagore lui-même paraît avoir été un mathématicien des plus remarquables, on lui doit au moins d'avoir constitué un enseignement scientifique qui porta des fruits précieux; mais les grands progrès furent obtenus par des hommes en réalité étrangers à l'École ou qui s'en sont détachés après avoir reçu son enseignement, comme Eudoxe par exemple. La légende, admise par Jamblique, d'après laquelle les pythagoriciens seraient seuls restés possesseurs pendant longtemps des connaissances géométriques, est insoutenable. Si leur savoir excita la curiosité, c'est qu'à cette époque les Grecs en général étaient curieux de savoir (*φιλομαθεις* comme dit Platon), et cette curiosité ne s'explique que si elle avait déjà des moyens de se satisfaire dans une certaine mesure. OEnopide de Chios, son compatriote Hippocrate, Théodore de Cyrène, ne sont des pythagoriciens que pour Jamblique; Platon représente formellement son maître Théodore comme partageant, au point de vue philosophique, les doctrines de Protagoras, et il nous montre les sophistes, comme Hippias, enseignant les éléments des sciences en même temps que la rhétorique, parlant *de omni re scibili* et aussi du reste.

Les noms de nombreux mathématiciens, n'appartenant à aucune école définie, ont pu se perdre, mais le soin avec lequel Jamblique recueille toutes les traditions, fausses ou vraies, relatives au pythagorisme, ne permet pas de croire qu'il ait produit quelque savant dont le nom, perdu, aurait mérité d'être conservé; or de

tous les noms qui nous ont été laissés, deux seulement ont été portés par des hommes qui semblent avoir eu une réelle originalité; ce sont ceux d'Archytas et de Thymaridas, dont le dernier seul semble s'être sérieusement occupé de l'Arithmétique.

