

PYTHAGORAS I PYTHAGOREJCZYCY W DZIEJACH MATEMATYKI

Geometria, planimetria, stereometria i wiele innych słów, jakie spotykamy w matematyce, są pochodzenia greckiego. Pierwowzór naszej geometrii stworzył Grek Eukleides (III w. przed n.e.), Ale nie od niego rozpoczęła się geometria w Grecji. Historia matematyki wymienia tu cały szereg poprzedników Eukleidesa aż do VII stulecia przed n.e. Niezwykle ciekawą postacią spośród tych jest Pythagoras z Samos (VI w. przed n.e.), o którym historyk matematyki Eudemos z Rodos (IV w. przed n.e.) mówi: „On właśnie stworzył podstawy naukowe matematyki“.

Kim był ów twórca tej wiedzy i jakie są jego w tej dziedzinie osiągnięcia? Z całego mnóstwa legend i ustnych przekazów spisywanych o wiele później, gdyż niestety ani Pythagoras, ani jego uczniowie nie pozostawili żadnych pism, z trudem daje się odтворzyć przebieg życia i tok prac tego mędrca, którego imię należy do najbardziej popularnych na całym świecie. Bardzo wiele ciekawych, jakkolwiek nie dających się dokumentarnie stwierdzić wiadomości o Pythagorasie podaje Iamblichos, matematyk i historyk matematyki (IV w. n.e.). Z niego czerpiemy dane biograficzne o tej niezapomnianej w dziejach myśli ludzkiej postaci.

Pythagoras urodzony w r. 569 p. n. e. jako syn osiadłego na wyspie Samos kupca Mnesarchosa towarzyszył aż do ukończenia 18 roku życia wraz z matką Pythaidą ojcu w jego kupieckich podróżach. Rozbudzona w tych podróżach żądza wiedzy kieruje go na naukę do uczonego Pherekidesa na wyspie Lesbos, a w dwa lata później do Miletu, do 90-letniego słynnego już wówczas mędrca starożytnego świata, Thalesa. Wraz z elementami „ziemiomiernictwa“ (książka wydana w r. 1774 przez matematyka polskiego, pijara Patrycego Skaradkiewicza nosi też tytuł: *Geometrya czyli nauka o ziemiomiernictwie...*) roztacza Thales przed oczyma Pythagorasa wizję tajemnej wiedzy kapłanów egipskich. Pythagoras postanawia poznać tę wiedzę u jej źródła: W r. 547 ląduje w Naukratis w Egipcie i niebawem wstępuje do szkoły kapłanów. W około 20 lat później zostaje wywieziony wraz z innymi kapłanami do Babilonu na rozkaz króla Persów Kambyseja. Po 12 latach niewoli, w czasie których nie omieszkał zapoznać się z osiągnięciami matematyki i astronomii babilońskiej, wraca na wyspę Samos, gdzie rozpoczyna pracę nauczycielską, ale nie przebywa tu długo, gdyż w r. 510 udaje się do Krotonu, kolonii greckiej w Italii południowej. Tu zbiera dokoła siebie ludzi uprawiających filozofię i matematykę. W ten sposób powstał związek, który wraz z Pythagorasem przenosi się w r. 490 do Tarentu.

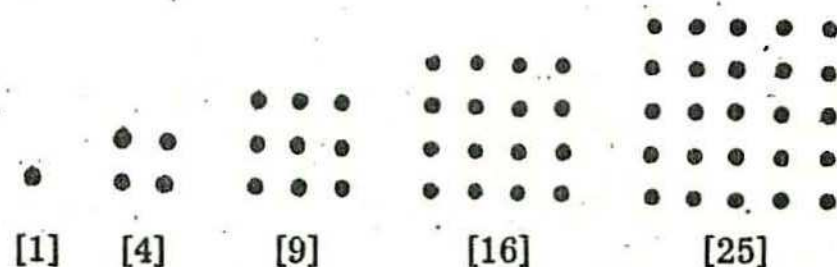
Ze względu na zamknięty charakter związku, do którego garnęli się ludzie zamożni, stał się on wkrótce — tak jak i jego twórca Pythagoras — przedmiotem nienawiści ludu. To było powodem przenoszenia się stowarzyszenia z miejsca na miejsce. Mimo śmierci mistrza (417 r.) w Metaponcie związek przetrwał i wykazywał jeszcze przez co najmniej sto lat ożywioną działalność. W historii nadano mu nazwę szkoły pythagorejskiej.

Charakterystyczną i dla nas do pewnego stopnia mało zrozumiałą dziś cechą Pythagorasa i jego uczniów było to, że osiągnięcia swoje zachowywali w tajemnicy, nie notując ich nigdzie ani nie rozpowszechniając ustnie. To, co wiemy o ich odkryciach, zwłaszcza w matematyce — a są one bardzo wybitne — doszło do nas z ostatnich nieledwie lat istnienia szkoły, gdy jej uczniowie rozeszli się po Grecji, a utrata wzajemnego kontaktu rozluźniła nieco tradycyjny nakaz milczenia.

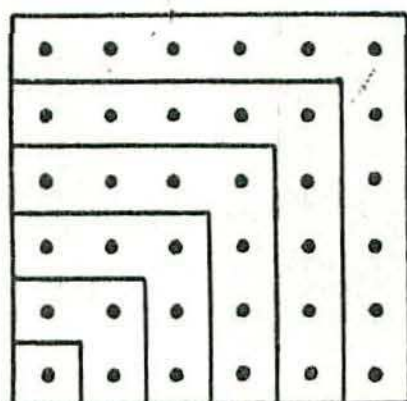
Matematykę pythagorejską traktujemy jako całość nie wymieniając poszczególnych twórców, gdyż najczęściej nie wiemy, od którego z pythagorejczyków dane odkrycie pochodzi. Oni sami przypisywali większość odkrytych twierdzeń Pythagorasowi.

Pythagorejczycy podali przede wszystkim wiele niezwykle ciekawych własności liczb całkowitych, posługując się przy tym wyłącznie metodą geo-

metryczną. Nadając niektórym liczbom postać np. kwadratów.



doszli do takiego układu:



Pythagorejska liczba kwadratowa jest — jak widzimy — zupełnym kwadratem:

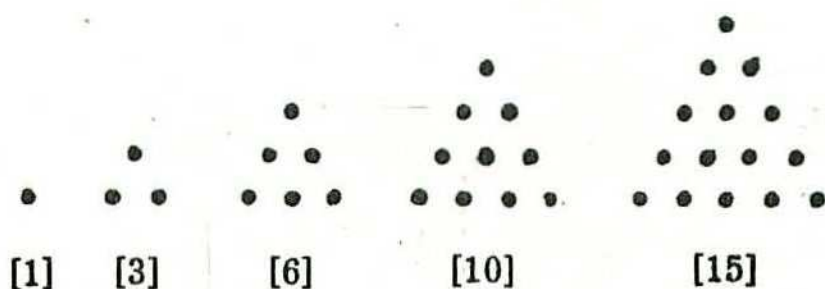
$$1^2 = 1 \quad 2^2 = 4 \quad 3^2 = 9 \quad 4^2 = 16 \quad 5^2 = 25 \text{ itd.}$$

Chcąc przejść od jednej liczby kwadratowej n^2 do następnej $(n+1)^2$ należy do n^2 dodać *gnomon*, tj. figurę składającą się z dwóch prostokątów o długości równej n i z kwadratu o boku $= 1$ czyli $2n + 1$. Istotnie

$$n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2.$$

W podobny sposób nadając liczbom kształt bądź trójkątów bądź prostokątów otrzymywali związki,

które w naszej symbolice wyrażają ciekawe twierdzenia. Np. ze struktury liczb trójkątnych:



da się wysnuć twierdzenie:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

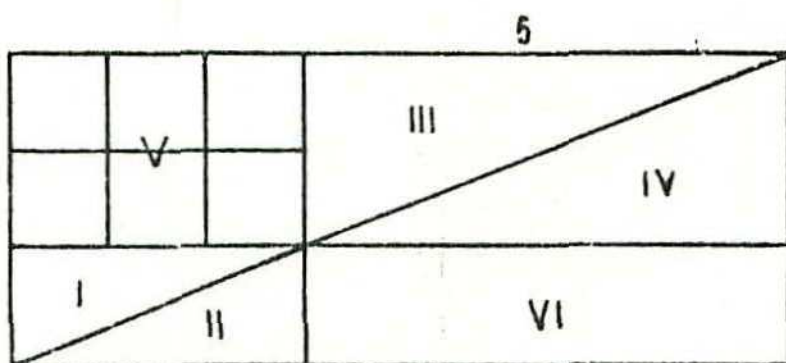
Wzór ten wypowiadamy dzisiaj w oparciu o własności postępu arytmetycznego, ale i postęp arytmetyczny był znany pythagorejczykom, chociaż nie w dzisiejszej postaci. Zнали proporcję różnicową w postaci $a - b = b - c$, skąd wyprowadzali średnią arytmetyczną $b = \frac{a+c}{2}$. Postępem arytmetycznym dziś nazywamy ciąg liczb $a, b, c, d, e, \dots$, w którym $a - b = b - c = c - d = d - e = \dots$. To, co nazywamy postępem geometrycznym tkwi w geometrycznej proporcji pythagorejczyków $a : b = b : c$, skąd $b^2 = a \cdot c$.

b^2 jest polem kwadratu o boku b , $a \cdot c$ polem prostokąta o bokach a i c . A więc pythagorejska średnica geometryczna jest szczególnym przypadkiem zagadnienia równoważności prostokątów i kwadratu.

Dla jednego kwadratu może istnieć kilka równoważnych prostokątów o całkowitych liczbach:

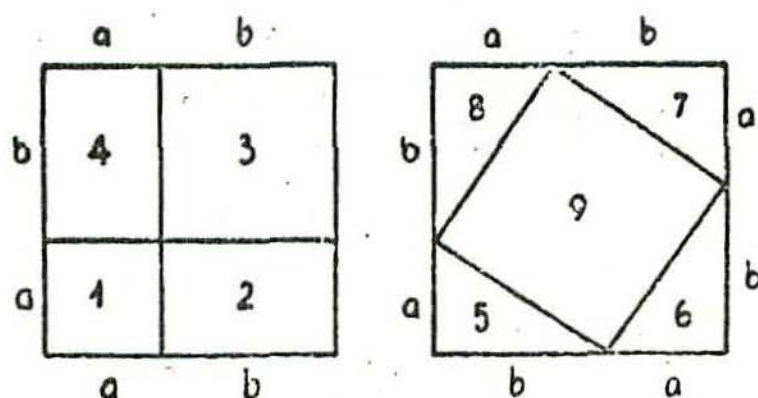
$$6^2 = 1 \cdot 36 = 2 \cdot 18 = 3 \cdot 12 = 4 \cdot 9$$

Z równoważności samych prostokątów korzystali pythagorejczycy przy dzieleniu liczb całkowitych. Pokażemy to na przykładzie dzielenia 6 przez 5:



Ponieważ $6 = 2 \cdot 3$, więc budujemy prostokąt o bokach 2 i 3. Bok długości powiększamy o 5, jak na rysunku. Uzupełniamy figurę do prostokąta. Ponieważ przekątna połowi prostokąt, więc trójkąt I = trójkątowi II, trójkąt III = trójkątowi IV, prostokąt V = prostokątowi VI, a więc $2 \cdot 3 = 5 \cdot x$ czyli bok prostokąta VI, tj. $x = \frac{2 \cdot 3}{5} = \frac{6}{5}$

Czy średnią geometryczną wykorzystywali pythagorejczycy do dowodu słynnego 'twierdzenia Phytagorasa' tak jak my to dziś robimy — nie wiadomo. Phytagorasowi przypisuje się geometryczny dowód tego twierdzenia, który tak wygląda:



Dwa kwadraty równe o boku $a + b$, tj. równym sumie obu przyprostokątnych, dzielimy w dwojaki sposób, jak wskazuje rysunek.

Ponieważ figury:

$$\begin{array}{r} \triangle 5 + \triangle 6 = \square 2 \\ \triangle 7 + \triangle 8 = \square 4 \\ \hline \text{więc } \square 1 + \square 3 = \square 9 \end{array}$$

W każdym razie zauważyli pythagorejczycy, że iloraz średniej geometrycznej przez średnią arytmetyczną daje nową wielkość mającą zastosowanie m. in. w muzyce, a mianowicie średnią harmoniczną. Oznaczając: s_a średnia arytmetyczna, s_g średnia geometryczna, s_h średnia harmoniczna, a i b dwie dowolne liczby całkowite, moglibyśmy zapisać to tak:

$$s_h = \frac{s_g}{s_a} = \frac{\frac{ab}{2}}{\frac{a+b}{2}} = \frac{2ab}{a+b}$$

Pythagorejczycy umieszczali tę średnią w tzw. proporcji muzycznej

$$a : \frac{a+b}{2} = \frac{2ab}{a+b} : b.$$

Wiedzieli oni, że trzy struny o jednakowych własnościach i napięciu dają zgodny dźwięk: si sol mi, gdy ich długości mają się do siebie jak 15 : 12 : 10. Obierzmy odcinek o długości 15 jednostek i zaznaczmy na nim punkty 12 i 10:



Skoro

$$15 - 12 = 3$$

$$12 - 10 = 2$$

to

$$a : \frac{a+b}{2} = \frac{2ab}{a+b} : b,$$

a więc

$$3 : \frac{5}{2} = \frac{10}{5} : 2$$

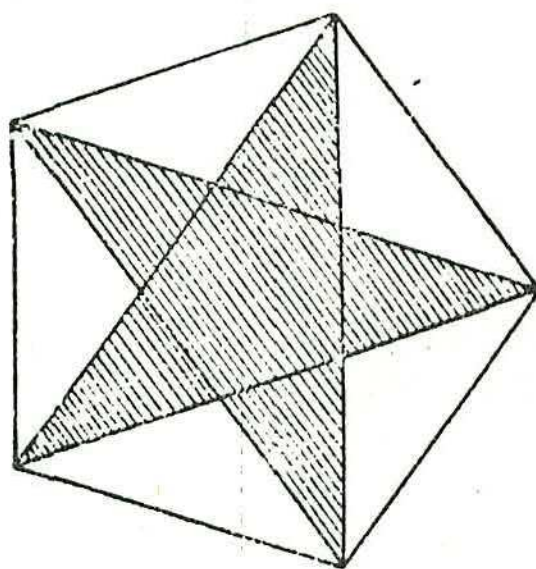
Średnią harmoniczną liczb 3 i 2 jest tu $\frac{12}{5}$. Jak łatwo widać

$$\frac{12}{5} = 2 + \frac{2}{5},$$

ale też

$$\frac{12}{5} = 3 - \frac{3}{5}.$$

Z geometrii umieli już udowodnić, że suma kątów wewnętrznych w trójkącie wynosi 180° , umieli też konstruować pięciokąt foremny, a gwiazda wyznaczona przez przekątne tego pięciokąta była ich znakiem rozpoznawczym.



Ta ostatnia konstrukcja nasuwa nam myśl, że znali też konstrukcję złotego podziału.

Czytelnik łatwo rozpozna, jak bardzo upraszcza śledzenie myśli pythagorejczyków nasza współczesna symbolika i znakowanie. Pythagorejczycy nie posiadali tak sprawnego narzędzia matematycznego, a mimo tego w tej swojej, jak ją dziś nazywamy 'algebrze konstrukcyjnej' doszli do najbardziej

podziwu godnych odkryć. Przecież mimo tego, że liczby oznaczali nie dającymi nic matematycznie literami swego alfabetu, odróżniali liczby proste i złożone, parzyste i nieparzyste, umieli wyszukiwać podzielniki liczb. Wprowadzili nawet pojęcie liczb doskonałych jako takich, które równe są sumie swoich podzielników mniejszych od nich. Jako takie liczby podali:

$$6 = 1 + 2 + 3, \quad 28 = 1 + 2 + 4 + 14$$

Co więcej wprowadzili pary liczb, z których jedna jest sumą podzielników mniejszych od niej drugiej liczby i na odwrót. Takie pary liczb nazwali 'zaprzyjaźnione'. A więc 220 i 284 są liczbami zaprzyjaźnionymi, gdyż

$220 = 1 + 2 + 4 + 71 + 142$ czyli jest sumą podzielników liczby 284.

$284 = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110$, a więc równa się sumie podzielników liczby 220. (Badaniem liczb doskonałych i zaprzyjaźnionych zajmował się w XVII wieku także nasz wybitny matematyk Jan Brożek).

Nie mogliśmy w ramach jednego artykułu przedstawić czytelnikom całości osiągnięć szkoły pythagorejskiej, ale i to, co opowiedzieliśmy, daje pojęcie o dużym jej rozmachu twórczym oraz podkreśla wielką rolę tych zdobyczy dla dalszego rozwoju matematyki.