

IL CONCETTO DI NUMERO SECONDO LA DOTTRINA DEI PITAGORICI

La scuola pitagorica, quel movimento matematico-filosofico che sorse agli inizi del sesto secolo nella Magna Grecia e si diffuse, per opera di Pitagora di Samo, sulle coste della Calabria e della Sicilia durante l'intero secolo quinto e gran parte del quarto secolo av. Cr., si occupò a lungo di questioni aritmetiche e geometriche.

Nel suo fiorire, durato ben più di due secoli, questa scuola compì la evoluzione propria di tutto il pensiero greco antico e la dottrina professata si sviluppò secondo le più diverse concezioni.

Purtroppo i documenti pervenutici sono scarsi e per lo più frammentari, però, grazie alle numerose testimonianze soprattutto di Aristotele, nei suoi libri di Fisica e Metafisica, è ormai accertato che il termine *μαθηματικά* (la matematica), nel senso di scienza razionale, trova la sua prima applicazione proprio nella dottrina pitagorica.

Questa scienza razionale, precisa e rigorosa, si fonda sul concetto di *ἀριθμός* (numero), inteso come elemento generatore di tutte le cose esistenti, principio fondamentale di tutto l'universo, anzi l'universo intero è dai Pitagorici considerato *ἀριθμός καὶ ἁρμονία* (numero e armonia), ed essi stessi compongono il cielo con i numeri, come ci tramanda Aristotele in un famoso passo della Metafisica.

Queste affermazioni possono sembrare strane, qualora si pensi al numero pitagorico, intendendolo nel significato moderno. Il concetto primitivo di numero deve essere inteso, invece, come un aggregato di corpuscoli, uguali tra loro, come una pluralità di unità (*πλῆθος μονάδων*), come una riunione di nomadi, in senso concreto, come cose reali. I primi Pitagorici, infatti, identificarono l'uno e la monade, chiamando indifferentemente «l'uno anche monade e la monade anche uno».

La distinzione tra monade e uno è successiva e risale all'epoca platonica, quando si affermò il concetto di numero-idea e di numero-ente matematico, entrambi astratti e separati dalle cose sensibili, mentre i Pitagorici, ammettendo i numeri come principio delle cose, affermarono l'esistenza di una sola specie di numeri, non già separati dalle cose, ma insiti e connaturati con le

cose stesse. Tali numeri concreti vennero rappresentati mediante pietruzze da calcolo, allineate, o sassolini (*ψηφοὶ πεσσοί*), non fissati nella loro posizione, disposti in modo ordinato, tale da costituire delle figure geometriche.

Questo procedimento di figurazione, mediante sassolini a cui saranno poi sostituiti dei punti, cioè unità fissate nella loro posizione (*στιγμή*) ciascuno dei quali indicava una monade, una unità, fu tratto dall'esperienza sensibile, giacché tutto il sapere pitagorico proviene dalla esperienza sensibile. Esso diede origine a una aritmetica visiva, molto semplice ed elementare, detta aritmo-geometria, che però non ha ancora nulla a che fare con la geometria intesa in senso moderno.

Da questa rappresentazione empirica dei numeri mediante punti, che implicava la considerazione dei soli numeri interi e per di più molto piccoli, i Pitagorici ricavarono le prime elementari proprietà numeriche.

Furono infatti queste rappresentazioni aritmo-geometriche a suggerire i concetti elementari di pari e dispari, (*περσός- ἄρτιος*), a cui poi si collegherà l'antitesi termine-interminato, finito-infinito (*πέρας-ἄπειρον*).

Abbiamo infatti delle testimonianze ben precise che ci inducono a sostenere che mediante questo procedimento operativo con sassolini, detto *ψηφορία* Pitagora e i suoi discepoli elaborarono tutta una teoria aritmetica del pari e dispari.

Infatti dalla osservazione che i numeri pari sono quelli che si dividono in parti uguali (*τῶν ἀριθμῶν ἄρτιοι μὲν εἰσιν οἱ εἰς ἴσα διαιρούμενοι*), mentre i dispari sono quelli che si dividono in parti disuguali ed hanno un termine medio, (*περσσοὶ δὲ οἱ εἰς ἄνισα καὶ μέσον ἔχοντες*) nacque subito il concetto di dicotomia di un numero dispari in cui si oppone l'ostacolo di un termine medio, cioè di un *μέσον*.

Per accorciare le distanze tra questi due concetti opposti, i Pitagorici stabilirono tutta una serie di concetti intermedi, quali numeri parimenti pari, parimpari, imparipari, e numeri disparimenti dispari, numeri dispari primi e numeri dispari composti. Chiamarono infatti numeri parimenti pari (*ἀρτιάκις ἄρτιος*) quei numeri divisibili per due fino all'unità, come ad esempio il 16 (8,2, sono i suoi divisori) e ricavarono questa proprietà mediante dimezzamenti successivi di sassolini.

Così definirono parimpari (*ἀρτιοπέριπτον*) quel numero che non è più divisibile per due subito dopo la prima dicotomia, come ad esempio il 10 che si divide in 5 e 5, e imparipari (*περίσσειον*) quello che può essere diviso per due più volte, ma non fino all'unità, come ad esempio il 24 (12,6,3, sono i suoi divisori).

I numeri dispari vennero distinti in disparimenti dispari (*περσσοί*) quando divisi da un numero dispari danno ancora un numero di-

spari come ad esempio il 15 (5 e 3 sono i suoi divisori), in primi ($\pi\rho\omega\tau\omicron\iota$) quando sono divisi solo dall'unità, come il 7 o il 3, e in composti ($\sigma\acute{\upsilon}\nu\theta\epsilon\tau\omicron\iota$) quando ammettono altri divisori oltre all'unità.

A questo punto si deve aggiungere la peculiare proprietà dell'unità, che partecipa della natura di entrambi, pari e dispari, perchè aggiunta a un pari forma un dispari e aggiunta a un dispari forma un pari, cosa che non potrebbe fare se non partecipasse delle due nature.

Quindi l'uno viene definito parimpari ($\acute{\alpha}\rho\tau\iota\sigma\pi\acute{\epsilon}\rho\iota\tau\tau\omicron\nu$).

Tutte queste gradazioni tra, il pari e il dispari mediante le posizioni intermedie ora dette, vanno collegate alle prime scoperte delle quantità irrazionali. Infatti dall'ammettere contemporaneamente la dottrina monadica sopra esposta, e i risultati a cui giunse Pitagora col suo famoso teorema, si giunse alla originaria dimostrazione della incommensurabilità della diagonale del quadrato, che fu ricavata dai Pitagorici proprio con un procedimento diadico di

$\psi\eta\phi\phi\omicron\rho\iota\alpha$.

Se il lato del quadrato fosse commensurabile con la diagonale, si avrebbe un quadrato intero rappresentabile mediante $\psi\eta\phi\omicron\iota$ D, che sarebbe il doppio di un altro quadrato intero S; si avrebbero allora le relazioni:

$$S = s.s \text{ e } D = 2.S, \text{ ossia } d.d = 2s.s.$$

Mediante dimezzamenti successivi dovrebbero sussistere le uguaglianze di $d_i = 2s_i.s_i$, per tutti gli indici i finchè si può continuare il dimezzamento. Ora si verificano solo queste due possibilità. Si perviene prima, dividendo successivamente per due o a un numero dispari $d_i = u$, maggiore di uno, o prima a un numero dispari $s_i + v$, maggiore di uno; allora nel primo caso $D_i = u.u$ diventa un numero disparimenti dispari, cioè un numero dispari con divisori dispari. Si ha allora nell'uguaglianza $D_i = 2S_i$ a sinistra un numero dispari e a destra un numero pari, il che è impossibile.

Nel secondo caso si ha, a destra $2v.v$, cioè un numero che ha una metà dispari e quindi $v.v$ è disparimenti dispari, mentre a sinistra c'è un quadrato, cioè un numero parimenti pari, il che è impossibile.

Queste semplici considerazioni, ricavate dalle configurazioni del sassolini, misero in crisi la filosofia pitagorica, secondo la quale era possibile dominare con i numeri tutta la realtà, ma aprirono la strada alla geometria, una dottrina ben più generale e potente dell'aritmetica.

A questo primo stadio dell'aritmetica «diadica», che culmina nella dimostrazione sopra citata, si collegano ancora i numeri figurati, cioè quei numeri dell'antica aritmetica pitagorica rappresentati con schemi già più simili alle nostre figure geometriche. Sono cioè i numeri quadrati ($\tau\epsilon\tau\rho\acute{\alpha}\gamma\omega\nu\omicron\iota$) la cui serie si ottiene sommando successivamente i numeri dispari (ossia $1+3 = 4$ è il primo numero quadrato, $1+3+5=9$ è il secondo numero quadrato e così via); i numeri rettangolari o eteromechi ($\acute{\epsilon}\tau\epsilon\rho\omicron\mu\acute{\eta}\chi\omicron\iota$) che si ottengono som-

mando successivamente i termini pari (es. $2+4=6$ 3.2; $2+4+6=12=3.4$), i numeri triangolari risultanti dalla somma di successivi numeri interi (es. $1+2=3$; $1+2+3=6$), gli esagonali, gli ottagonali e in genere tutti i poligonal.

Questi numeri furono rappresentati graficamente dai primi Pitagorici.

Mediante questa elementare aritmetica monadica si potevano rappresentare tutti i numeri interi; se infatti dopo il primo punto o monade, che rappresenta l'unità, vengono collocati opportunamente altri sassolini o gnomoni, cioè allineamenti di punti contigui, a forma di squadra, si ottengono tutti quanti i numeri interi.

Le loro proprietà furono poi ricavate proprio da queste composizioni spaziali. Dall'osservazione di queste figure geometriche i Pitagorici infatti avevano ricavato la proprietà secondo la quale un numero quadrato non può scomporsi che in due numeri triangolari diversi, mentre un numero rettangolare può scomporsi solo in numeri triangolari uguali.

Infine anche il concetto di numero piano ($\acute{\epsilon}\pi\acute{\iota}\pi\epsilon\delta\omicron\varsigma$); ottenuto dal prodotto di due fattori deriva dalla rappresentazione monadica del numero ottenuto mediante un allineamento di punti secondo file (ciascuna avente tante unità quante costituiscono il primo fattore) e secondo colonne (ciascuna avente tante unità quante quelle del secondo fattore).

E' implicito in questa definizione che la moltiplicazione non è altro che una notazione più pratica per indicare molte aggiunte successive di termini tutti uguali; è cioè una addizione abbreviata come la intendiamo ancora oggi.

A seconda delle diverse grandezze dei fattori, venivano fatte dell'e distinzioni ben precise. Se per esempio, nel numero solido ($\sigma\tau\epsilon\rho\epsilon\delta\omicron\varsigma$) ottenuto dal prodotto di tre fattori, i tre numeri erano diversi tra loro il prodotto veniva definito come numero due volte diversamente diverso ($\acute{\alpha}\nu\iota\sigma\acute{\alpha}\chi\iota\sigma$ $\acute{\alpha}\nu\iota\sigma\acute{\alpha}\chi\iota\sigma$ $\acute{\alpha}\nu\iota\sigma\omicron\varsigma$) mentre se il terzo fattore era diverso dagli altri due uguali fra loro, il numero veniva definito altrettante volte uguale, diverso un numero inferiore di volte (come, ad esempio il prodotto 3.3.2), oppure altrettante volte uguale, diverso un numero maggiore di volte (come il prodotto 3.3.7), a seconda della grandezza dell'ultimo fattore.

Questo insistere così minuziosamente sulle differenze dei singoli fattori è un'altra conferma del fatto che i Pitagorici ricavarono le proprietà dei numeri esclusivamente da una aritmetica visiva.

Da tutte queste considerazioni risulta evidente che, accanto alle rappresentazioni dei numeri mediante punti, si andavano delineando quelle mediante semplici figure geometriche, e quindi dalla aritmo-geometria si passava alla geometria vera e propria, quella che si fonda sul famoso teorema di Pitagora, per il quale, egli stesso, scoprendo la celebre regola per la determinazione dei lati del triangolo rettangolo, avrebbe, secondo quanto ci tramandano gli storici greci, «sacrificato un bue».

DORIANA GALIGARIS