

Pythagoras in der Schmiede

aus Wikipedia, der freien Enzyklopädie

Pythagoras in der Schmiede ist eine Legende, in der beschrieben wird, wie Pythagoras von Samos in einer Schmiede den Wohlklang von zusammenklingenden Hämmern entdeckt hätte, deren Gewichte in bestimmten ganzzahligen Verhältnissen standen.

Diese Beobachtung hätte die Grundlage für die musiktheoretische Beschreibung von Intervallen dargestellt und die Entwicklung des Monochords angeregt. Pythagoras wird schon seit der Antike in der Literatur daher auch häufig als *Erfinder der Musik* bezeichnet.^[1]

Die ursprünglichen Quellen aus dem antiken Griechenland sind verloren gegangen, und nach naturwissenschaftlicher Analyse ergibt sich, dass die tradierten Sachverhalte zumindest in mehreren Aspekten nicht zutreffend sein können.

Inhaltsverzeichnis

- 1 Beschreibung
 - 1.1 Grundlage der Musiktheorie
 - 1.1.1 Bedeutung für die spätere Weiterentwicklung der Tonsysteme
- 2 Ursprung
- 3 Rezeption
 - 3.1 Boëthius
 - 3.2 Guido von Arezzo
 - 3.3 Später
- 4 Widerlegung
 - 4.1 Tonhöhe von Hämmern
 - 4.2 Tonhöhe / Hammergewicht
 - 4.3 Tonhöhe / Saitenspannung
- 5 Physikalische Betrachtungen
 - 5.1 Longitudinale Schwingungen von Festkörpern
 - 5.1.1 Eigenfrequenz von Hämmern
 - 5.1.2 Eigenfrequenz von Ambossen
 - 5.1.3 Eigenfrequenz von Metallstäben
 - 5.2 Schwingungen von Saiten
- 6 Literatur
- 7 Einzelnachweise

Beschreibung

Pythagoras hätte im 6. vorchristlichen Jahrhundert in einer Schmiede, wo fünf Handwerker mit Hämmern bei der Arbeit waren, bemerkt, dass die einzelnen Schläge Töne unterschiedlicher Tonhöhe hervorrufen. Er ließ die Schmiede die Hämmer tauschen und hatte festgestellt, dass die Tonhöhen nicht von den Händen der Schmiede bestimmt waren. Es wurde überliefert, dass er die Tonhöhen jedoch den Gewichten der Hämmer zuordnen konnte und dass ein Wohlklang entstand, wenn ein bestimmter Hammer nicht geschlagen wurde. Dieser eine dissonant klingende Hammer hätte nicht in einem ganzzahligen Verhältnis zu den anderen Hämmern gestanden, die anderen aber im Verhältnis 6 zu 8 zu 9 und zu 12.

Bei weiteren häuslichen Untersuchungen hätte Pythagoras dann festgestellt, dass er diese Beobachtung auch auf Becher und Schalen mit verschiedenen Gewichtsverhältnissen und auf Saiten mit verschiedenen Längenverhältnissen übertragen konnte. Mit der Erfindung des Monochords zur Untersuchung und Demonstration von Tonhöhen von Saitenpaaren mit verschiedenen ganzzahligen Längenverhältnissen hätte er schließlich die Grundlage der Musiktheorie gelegt.

Grundlage der Musiktheorie



Pytagoras (philoso)phus (deutsch: Pythagoras der Philosoph). Illustration aus der Schedel'schen Weltchronik, Blatt 61v, von 1493

Pythagoras in der Schmiede



aus Wikipedia, der freien Enzyklopädie

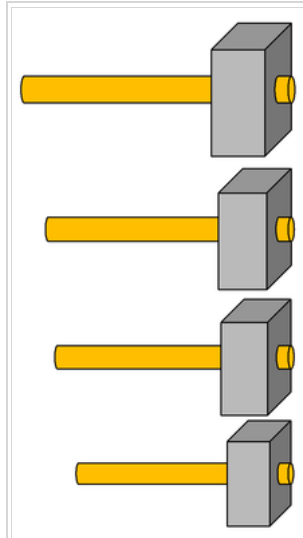
Pythagoras in der Schmiede ist eine antike Legende, in der beschrieben wird, wie Pythagoras von Samos in einer Schmiede den Wohlklang von zusammenklingenden Hämmern entdeckte, deren Gewichte in bestimmten ganzzahligen Verhältnissen standen. Diese Beobachtung habe den Ausgangspunkt für Experimente gebildet, welche zur Grundlage für die musiktheoretische Beschreibung von Intervallen wurden. Mit den auf diesem Weg gewonnenen Erkenntnissen habe Pythagoras die Musiktheorie begründet. Die Legende hatte zur Folge, dass Pythagoras in der römischen Kaiserzeit und im Mittelalter pauschal als Erfinder "der Musik" bezeichnet wurde, womit die Musiktheorie gemeint war.

Die ältesten griechischen Quellen zu der Legende, die erst in der römischen Kaiserzeit bezeugt ist, sind verloren gegangen. Im Laufe der Jahrhunderte wurde die Erzählung abgewandelt. Erst in der Neuzeit konnte dank neuer Erkenntnisse über die Akustik gezeigt werden, dass die Angaben der Legende physikalisch falsch sind. Nach heutigem Forschungsstand ist die Legende reine Erfindung. Die musiktheoretischen Ergebnisse, zu denen die Beobachtung in der Schmiede angeblich geführt hat, sind jedoch korrekt.

Unabhängig von der Frage, wie und durch wen die Pythagoras zugeschriebene Entdeckung von musikalischen Zahlenverhältnissen tatsächlich erfolgt ist, handelt es sich bei der Formulierung dieser Zahlenverhältnisse um die erste überlieferte korrekte, experimentell gesicherte mathematische Beschreibung eines physikalischen Sachverhalts.^[1]

Inhaltsverzeichnis

- 1 Inhalt der Legende
- 2 Weitere Überlieferungen
- 3 Interpretation der Legende
- 4 Grundlage der Musiktheorie
- 5 Bedeutung für die spätere Weiterentwicklung der Tonsysteme
- 6 Rezeption
 - 6.1 Antike
 - 6.2 Mittelalter
 - 6.3 Neuzeit
- 7 Widerlegung
- 8 Physikalische Betrachtungen
 - 8.1 Konsonanz
 - 8.1.1 Ganzzahlige Frequenzverhältnisse
 - 8.1.2 Rationale Frequenzverhältnisse
 - 8.2 Longitudinale Schwingungen und Eigenfrequenz von Festkörpern
 - 8.2.1 Hämmer
 - 8.2.2 Ambosse
 - 8.2.3 Metallstäbe
 - 8.3 Saitenschwingungen
- 9 Quellen
- 10 Literatur
- 11 Anmerkungen



Pythagoreische Hämmer im Gewichtsverhältnis 12 : 9 : 8 : 6

Inhalt der Legende

Der ältesten überlieferten Version^[2] der Legende zufolge hat Pythagoras, der im 6. Jahrhundert v. Chr. lebte, ein Hilfsmittel gesucht, mit dem akustische Wahrnehmungen gemessen werden können so wie geometrische Größen mit dem Zirkel oder Gewichte mit der Waage. Als er an einer Schmiede vorbeikam, wo vier (nach einer späteren Version fünf) Handwerker mit Hämmern bei der Arbeit waren, bemerkte er, dass die einzelnen Schläge Töne unterschiedlicher Tonhöhe hervorriefen, die paarweise Harmonien ergaben. Dabei konnte er Oktave, Quinte und Quarte unterscheiden. Nur ein Paar, welches das Intervall zwischen Quarte und Quinte (große Sekunde) ergab, empfand er als dissonant. Darauf lief er freudig in die Schmiede, um Versuche anzustellen. Dabei fand er heraus, dass der Unterschied in der Tonhöhe weder von der Gestalt des Hammers noch von der Lage des geschlagenen Eisens oder der Kraft des Schlags abhängt. Vielmehr konnte er die Tonhöhen den Gewichten der Hämmer zuordnen, die er genau maß. Darauf kehrte er nach Hause zurück, um dort die Experimente fortzusetzen.

An einem Pflock, der schräg über die Ecke an den Wänden befestigt war, hängte er der Reihe nach vier gleich lange, gleich starke und gleich gedrehte Saiten auf, die er unten durch Anbinden unterschiedlicher Gewichte beschwerte. Dann schlug er die Saiten paarweise an, wobei die gleichen Harmonien erklangen wie in der Schmiede. Die mit zwölf Gewichtseinheiten am stärksten beschwerte Saite ergab mit der am geringsten belasteten, an der sechs Gewichtseinheiten hingen, eine Oktave. So zeigte sich, dass die Oktave auf dem Verhältnis 12 : 6, also 2 : 1 beruht. Die gespannteste Saite ergab mit der zweitlockersten (acht Gewichtseinheiten) eine Quinte, mit der zweittraffsten (neun Gewichtseinheiten) eine Quarte. Daraus folgte, dass die Quinte auf dem Verhältnis 12 : 8, also 3 : 2 beruht, die Quarte auf dem Verhältnis 12 : 9, also 4 : 3. Für das Verhältnis der zweittraffsten Saite zur lockersten ergab sich wiederum mit 9 : 6, also 3 : 2, eine Quinte, für das der zweitlockersten zur lockersten mit 8 : 6, also 4 : 3, eine Quarte. Für das dissonante Intervall zwischen Quinte und Quarte zeigte sich, dass es auf dem Verhältnis 9 : 8 beruht, was mit den schon in der Schmiede durchgeführten Gewichtsmessungen übereinstimmte. Die Oktave erwies sich als das Produkt von Quinte und Quarte:

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{12}{6}$$

Dann dehnte Pythagoras den Versuch auf verschiedene Instrumente aus, experimentierte mit Gefäßen, Flöten, Triangeln, dem Monochord usw.; dabei fand er immer die gleichen Zahlenverhältnisse. Schließlich führte er die seither geläufigen Benennungen für die relativen Tonhöhen ein.

Weitere Überlieferungen

Mit der Erfindung des Monochords zur Untersuchung und Demonstration der Zusammenklänge von Saitenpaaren mit verschiedenen ganzzahligen Längenverhältnissen soll Pythagoras ein bequemes Mittel zum Aufzeigen der von ihm entdeckten mathematischen Grundlage der Musiktheorie eingeführt haben. Das Monochord – altgriechisch *kanón*, lateinisch *regula* genannt – ist ein Resonanzkasten, über den eine Saite gespannt ist. Auf dem Kasten ist eine Maßeinteilung angebracht. Das Gerät ist mit einem verschiebbaren Steg ausgestattet, durch dessen Verschiebung man die schwingende Länge der Saite teilen kann; anhand der Maßeinteilung lässt sich die Teilung genau bestimmen. Damit wird eine Messung der Intervalle möglich. Trotz des Namens "Monochord", der "einsaitig" bedeutet, gab es auch mehrsaitige Monochorde, mit denen man die Intervalle simultan zum Klingen bringen konnte. Allerdings ist unklar, wann das Monochord erfunden wurde. Walter Burkert datiert diese Errungenschaft erst nach der Zeit des Aristoteles, der das Gerät anscheinend noch nicht kannte; demnach wurde es erst lange nach Pythagoras' Tod

eingeführt.^[3] Leonid Zhmud hingegen meint, dass Pythagoras sein Experiment, das zur Entdeckung der Zahlenverhältnisse führte, wahrscheinlich mit dem Monochord durchgeführt hat.^[4]

Hippasos von Metapont, ein Pythagoreer der Frühzeit (spätes 6. und frühes 5. Jahrhundert v. Chr.), hat quantitative Untersuchungen zu musikalischen Intervallen durchgeführt. Das Hippasos zugeschriebene Experiment mit verschieden dicken frei schwingenden Kreisplatten ist im Gegensatz zu den angeblichen Versuchen des Pythagoras physikalisch korrekt. Ob Archytas von Tarent, ein bedeutender Pythagoreer des 5./4. Jahrhunderts v. Chr., einschlägige Experimente durchgeführt hat, ist unklar. Vermutlich war er in der Musik eher Theoretiker als Praktiker, doch nahm er auf akustische Beobachtungen seiner Vorgänger Bezug. Die musikalischen Beispiele, die er zur Stützung seiner akustischen Theorie anführt, betreffen Blasinstrumente; Versuche mit Saiteninstrumenten oder einzelnen Saiten führt er nicht an. Archytas ging von der falschen Hypothese aus, dass die Tonhöhe von der Verbreitungsgeschwindigkeit des Schalls und der Wucht des Stoßes auf den Klangkörper abhängt; in Wirklichkeit ist die Schallgeschwindigkeit in einem gegebenen Medium konstant und die Wucht beeinflusst nur die Lautstärke.^[5]

Interpretation der Legende

Walter Burkert ist der Ansicht, dass die Legende trotz der physikalischen Unmöglichkeit nicht als willkürliche Erfindung zu betrachten sei, sondern einen Sinn habe, der in der griechischen Mythologie zu finden sei. Die Idäischen Daktylen, die mythischen Erfinder der Schmiedekunst, waren einem Mythos zufolge auch die Erfinder der Musik. Von einem Zusammenhang zwischen Schmiedekunst und Musik ging somit offenbar schon eine sehr alten Überlieferung aus, in der die mythischen Schmiede als Kenner des Geheimnisses der magischen Musik dargestellt wurden. Burkert meint, die Legende von Pythagoras in der Schmiede sei eine späte Umformung und Rationalisierung des uralten Daktylen-Mythos: In der Pythagoras-Legende erscheinen die Schmiede nicht mehr als Besitzer alten magischen Wissens, sondern sie werden ohne es zu wollen zu (unwissenden) "Lehrmeistern" des Pythagoras. Im Frühmittelalter bezeichnete Isidor von Sevilla den biblischen Schmied Tubal als den Erfinder der Musik; darin folgten ihm spätere Autoren. In dieser Überlieferung zeigt sich wiederum die Vorstellung einer Beziehung zwischen Schmiedekunst und Musik, die auch in außereuropäischen Mythen und Sagen vorkommt.^[6]

Eine andere Erklärung schlägt Jørgen Raasted vor, dem Leonid Zhmud folgt. Raasteds Hypothese besagt, dass der Ausgangspunkt der Legendenbildung ein Bericht über Experimente des Hippasos gewesen sei. Hippasos verwendete Gefäße, die *sphairai* genannt wurden. Dieses Wort sei durch ein Schreiberversehen mit *sphyrai* (Hämmer) verwechselt worden, und statt Hippasos' Namen sei der des Pythagoras als Urheber der Versuche eingesetzt worden. Daraus sei dann die Schmiedelegende entstanden.^[7]

Grundlage der Musiktheorie

Die ganzen Zahlen 6, 8, 9 und 12 entsprechen bezogen auf den tiefsten Ton (Zahl 12) den reinen Intervallen Quarte (Zahl 9), Quinte (Zahl 8) und Oktave (Zahl 6) nach oben:

Ganze Zahl	Verhältnis zur größten Zahl 12	Verhältnis, gekürzt	Verhältniszahl	Intervallbezeichnung
12	12:12	1:1	1,000	Prime
9	9:12	3:4	0,750	Quarte
8	8:12	2:3	0,667	Quinte
6	6:12	1:2	0,500	Oktave

In Notenschrift kann dies zum Beispiel mit der Tonfolge c' - f' - g' - c'' ausgedrückt werden:



Die Tonfolge c' - f' - g' - c''



Wird diese Tonfolge nicht vom tiefsten, sondern vom höchsten Ton (Zahl 6) aus betrachtet, ergeben sich ebenfalls eine Quarte (Zahl 8), eine Quinte (Zahl 9) und eine Oktave (Zahl 12) – in diesem Fall allerdings nach unten:

Ganze Zahl	Verhältnis zur kleinsten Zahl 6	Verhältnis, gekürzt	Verhältniszahl	Intervallbezeichnung
6	6:6	1:1	1,000	Prime
8	8:6	4:3	1,333	Quarte
9	9:6	3:2	1,500	Quinte
12	12:6	2:1	2,000	Oktave

Die Quinte und die Oktave tauchen in Bezug auf den Grundton zwar auch bei Naturtonreihen auf, nicht jedoch die Quarte oder deren Oktavierungen. Dieser Quartton kommt bei den schon in der Antike bekannten ventillosen Blechblasinstrumenten und bei Flageoletttönen von Saiteninstrumenten nicht vor; seine Entdeckung war eine Neuerung.

In der Musik spielen diese vier harmonischen Töne in der Pentatonik, besonders auf der ersten, vierten, fünften und achten Tonstufe von diatonischen Tonleitern (insbesondere bei Dur und Moll) und bei der Komposition von Kadenzen als Grundtöne von Tonika, Subdominante und Dominante eine herausragende Rolle. Diese Tonfolge tritt oft bei Schlusskadenzen mit den entsprechenden Akkorden auf:



■ Hörbeispiel[?]/ⁱ Vollkadenz in C-Dur mit der Stufenfolge: Tonika (C-Dur) - Subdominante (F-Dur) - Dominante (G-Dur) - Tonika (C-Dur)

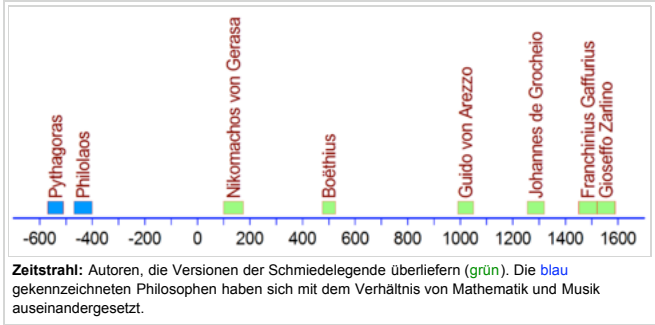
Diese Tonfolge taucht auch in vielen Kompositionen auf, wie zum Beispiel in der Passacaglia c-Moll von Johann Sebastian Bach. Das Thema besteht aus 15 Tönen, von denen insgesamt zehn Töne und insbesondere die letzten vier Töne aus diesen vier *Pythagoreischen Tönen* geschöpft wurden.

Bedeutung für die spätere Weiterentwicklung der Tonsysteme

Die weitere Untersuchung von Intervallen mit Tonhöhen mit ganzzahligen Verhältnissen führte schließlich von diatonischen Tonleitern mit sieben verschiedenen Tönen in Pythagoreischer Stimmung zu einer chromatischen Tonleiter mit zwölf verschiedenen Tönen, die zur Vermeidung der unangenehm klingenden, „heulenden“ Pythagoreischen Wolfsquinte zunächst in mitteltöniger und später in temperierter Stimmung gebraucht wurden. Beim Vergleich von sieben aufeinanderstehenden reinen Oktaven mit zwölf aufeinanderstehenden reinen Quinten kommt es zwischen dem jeweils ersten und letzten Ton nicht zu zwei identischen Intervallen, sondern zu einer Abweichung, dem sogenannten Pythagoreischen Komma.

In gleichstufiger Stimmung, in der nur Oktaven vollkommen rein klingen, stellt die zwölfstufige Tonskala die Grundlage für die Dodekaphonie dar. Diese gleichstufige Stimmung wird heute auch häufig zur Stimmung von Tasteninstrumenten, Idiophonen und Elektrophenen verwendet.

Rezeption



Die älteste überlieferte Version der Legende präsentiert – Jahrhunderte nach der Zeit des Pythagoras – der Neupythagoreer Nikomachos von Gerasa, der im 1. oder 2. Jahrhundert n. Chr. die Geschichte in seinem *Harmonikon encheiridion* („Handbuch der Harmonielehre“) festgehalten hat. Er beruft sich für seine Darstellung der Zahlenverhältnisse in der Harmonielehre auf den Philosophen Philolaos, einen Pythagoreer des 5. Jahrhunderts v. Chr.^[9]

Der berühmte Mathematiker und Musiktheoretiker Ptolemaios (2. Jahrhundert) kannte die von der Legende überlieferte Gewichtsmethode und lehnte sie ab; er hatte allerdings nicht die Falschheit der Gewichtsexperimente erkannt, sondern bemängelte nur ihre Ungenauigkeiten im Vergleich mit den genauen Messungen am Monochord.^[10] Wahrscheinlich bezog er seine Kenntnis der legendenhaften Überlieferung nicht von Nikomachos, sondern aus einer älteren, heute verlorenen Quelle.^[11]

Der chronologisch schwer einzuordnende kaiserzeitliche Musiktheoretiker Gaudentios schilderte in seiner *Harmoniké eisaggé* („Einführung in die Harmonie“) die Legende in einer Fassung, die etwas kürzer ist als die des Nikomachos. Der Neuplatoniker Iamblichos, der im späten 3. und frühen 4. Jahrhundert als Philosophielehrer tätig war, verfasste eine Pythagoras-Biographie mit dem Titel *Über das pythagoreische Leben*, worin er die Schmiedelegende in der Version des Nikomachos wiedergab.

In der ersten Hälfte des 5. Jahrhunderts ging der Schriftsteller Macrobius in seinem Kommentar zu Ciceros *Somnium Scipionis* ausführlich auf die Schmiedelegende ein, die er ähnlich wie Nikomachos schilderte.^[12]

Die stärkste Nachwirkung unter den antiken Musiktheoretikern, welche die Erzählung aufgriffen, erzielte Boethius mit seinem im frühen 6. Jahrhundert verfassten Lehrbuch *De institutione musica* („Einführung in die Musik“), in dem er die Erkenntnisbemühungen des Pythagoras zunächst in der Schmiede und dann zu Hause schildert.^[13] Ob er dabei von der Darstellung des Nikomachos oder von einer anderen Quelle ausging, ist unklar. Im Unterschied zur gesamten älteren Überlieferung berichtet er von fünf Hämmern, statt wie die früheren Autoren vier Hämmer anzunehmen. Er behauptet, den fünften Hammer habe Pythagoras verworfen, weil er mit allen anderen Hämmern eine Dissonanz ergeben habe. Nach Boethius' Darstellung (wie schon bei Macrobius) überprüfte Pythagoras seine erste Vermutung, der Klangunterschied beruhe auf unterschiedlicher Kraft in den Armen der Männer, indem er die Schmiede die Hämmer tauschen ließ, was zur Widerlegung führte. Über die Versuche im Hause des Pythagoras schreibt Boethius, der Philosoph habe zuerst an die Saiten gleich schwere Gewichte gehängt wie die der Hämmer in der Schmiede und dann mit Rohren und Bechern experimentiert, wobei alle Versuche zu denselben Ergebnissen geführt hätten wie die ersten mit den Hämmern. Anhand der Legende thematisiert Boethius die wissenschafts- und erkenntnistheoretische Frage nach der Zuverlässigkeit von Sinneswahrnehmungen. Wesentlich ist dabei der Umstand, dass Pythagoras zunächst durch Sinneswahrnehmung zu seiner Fragestellung und zur Hypothesenbildung angeregt wurde und durch empirische Überprüfung von Hypothesen zu unumstößlicher Gewissheit gelangte. Der Erkenntnisweg führte von der Sinneswahrnehmung zur ersten Hypothese, die sich als irrig erwies, dann zur Bildung einer richtigen Meinung und schließlich zu deren Verifizierung. Boethius anerkennt die Notwendigkeit und den Wert der Sinneswahrnehmung und der Meinungsbildung auf dem Weg zur Einsicht, obwohl er als Platoniker der Sinneswahrnehmung wegen ihrer Irrtumsanfälligkeit prinzipiell misstraut. Wirkliches Wissen ergibt sich für ihn erst, wenn die Gesetzmäßigkeit erfasst ist, womit der Forscher sich von seiner anfänglichen Abhängigkeit von der unzuverlässigen Sinneswahrnehmung emanzipiert. Das Urteil des Forschers darf nicht bloß als Sinnesurteil auf der empirischen Erfahrung beruhen, sondern es darf erst gefällt werden, wenn er durch Überlegungen eine Regel gefunden hat, die es ihm ermöglicht, sich jenseits des Bereichs möglicher Sinnestäuschung zu positionieren.^[14]

Im 6. Jahrhundert schrieb der Gelehrte Cassiodor in seinen *Institutiones*, Gaudentios habe in seinem Bericht über die Schmiedelegende die Anfänge "der Musik" auf Pythagoras zurückgeführt. Gemeint war die Musiktheorie, wie schon bei Iamblichos, der ebenfalls mit Bezug auf die Schmiedeerzählung und die dort beschriebenen Experimente Pythagoras als Erfinder "der Musik" bezeichnet hatte.^[15]

Mittelalter

Im Frühmittelalter erwähnte Isidor von Sevilla in seinen *Etymologien*, die zu einem maßgeblichen Nachschlagewerk der mittelalterlichen Gebildeten wurden, die Schmiedelegende kurz, wobei er Cassiodors Formulierung übernahm und ebenfalls

Antike

Die früheste Erwähnung von Pythagoras' Entdeckung der mathematischen Grundlage der musikalischen Intervalle findet sich bei dem Platoniker Xenokrates (4. Jahrhundert v. Chr.); da es sich nur um ein Zitat aus einem verlorenen Werk dieses Denkers handelt, ist unklar, ob er die Schmiedelegende kannte.^[8] Im 4. Jahrhundert v. Chr. wurde auch schon – allerdings ohne Bezugnahme auf die Pythagoras-Legende – Kritik an der pythagoreischen Zahlentheorie der Intervalle geäußert; der Philosoph und Musiktheoretiker Aristoxenos hielt sie für falsch.



Nikomachos von Gerasa in einer mittelalterlichen Darstellung aus dem 12. Jahrhundert, Universitätsbibliothek Cambridge, Ms. II.3.12, fol. 61 v



Boethius (links) im Wettstreit mit Pythagoras (rechts, mit Abakus). Darstellung von Gregor Reisch mit einer allegorischen weiblichen Figur, die zwei Bücher und den Schriftzug *Typus arithmeticae* trägt, *Margarita philosophica*, 1508

Pythagoras als Erfinder der Musik bezeichnete.^[16] Da Cassiodor und Isidor im Mittelalter erstrangige Autoritäten waren, verbreitete sich die Vorstellung, Pythagoras habe das Grundgesetz der Musik entdeckt und sei somit deren Begründer gewesen. Trotz solcher pauschaler Formulierungen gingen die mittelalterlichen Musiktheoretiker aber davon aus, dass es Musik schon vor Pythagoras gegeben hatte und dass mit der "Erfindung der Musik" die Entdeckung ihrer Prinzipien gemeint war.^[17]

Im 9. Jahrhundert berichtete der Musikwissenschaftler Aurelian von Réomé in seiner *Musica disciplina* („Musiklehre“) von der Legende. Aurelians Darstellung folgte im 10. Jahrhundert Regino von Prüm in seiner Schrift *De harmonica institutione* („Einführung in die Harmonielehre“). Beide legten Wert auf die Feststellung, dass Pythagoras durch eine göttliche Fügung die Gelegenheit erhalten habe, in der Schmiede seine Entdeckung zu machen.^[18] Schon in der Antike hatten Nikomachos und Iamblichos von einer daimonischen Fügung gesprochen, Boethius hatte daraus einen göttlichen Ratschluss gemacht.

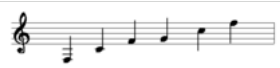
In der ersten Hälfte des 11. Jahrhunderts erzählte Guido von Arezzo, der berühmteste Musiktheoretiker des Mittelalters, im letzten Kapitel seines *Micrologus* die Schmiedelegende, wobei er von der Version des Boethius, den er namentlich nannte, ausging. Einleitend bemerkte Guido: *Auch würde wohl niemals ein Mensch etwas Bestimmtes über diese Kunst (die Musik) erforscht haben, wenn nicht schließlich die göttliche Güte auf ihren Wink das nachfolgende Ereignis herbeigeführt hätte.* Dass die Hämmer 12, 9, 8 und 6 Gewichtseinheiten wogen und so den Wohlklang erzeugten, führte er auf Gottes Fügung zurück.^[19] Er erwähnte auch, dass Pythagoras von seiner Entdeckung ausgehend das Monochord erfunden habe, ging aber dabei nicht näher auf dessen Eigenschaften ein.

Zu den mittelalterlichen Musiktheoretikern, welche die Schmiedelegende nach der Version des Boethius erzählten, gehören ferner der im späten 13. und frühen 14. Jahrhundert tätige Juan Gil de Zamora (Johannes Aegidius von Zamora), im 14. Jahrhundert Johannes de Muris und Simon Tunstede, im 15. Jahrhundert an der Schwelle zur Neuzeit Adam von Fulda.

Als Gegner der pythagoreischen Auffassung, wonach die Konsonanzen auf bestimmten Zahlenverhältnissen beruhen, trat im 13. Jahrhundert Johannes de Grocheio hervor, der von einer aristotelischen Sichtweise ausging. Er stellte zwar ausdrücklich fest, dass Pythagoras die Prinzipien der Musik entdeckt habe, und erzählte die Schmiedelegende mit Berufung auf Boethius, den er für vertrauenswürdig hielt, doch verwarf er die pythagoreische Konsonanzlehre, die er auf eine bloß metaphorische Redeweise reduzieren wollte.^[20]

Neuzeit

Franchino Gaffurio veröffentlichte 1480 in Neapel sein Werk *Theoricum opus musice discipline* („Theoretische Musiklehre“), das 1492 in einer überarbeiteten Fassung unter dem Titel *Theorica musice* („Musiktheorie“) erschien. Darin präsentierte er eine Version der Schmiedelegende, die an Ausführlichkeit alle früheren Darstellungen übertraf. Er ging von der Fassung des Boethius aus und fügte einen sechsten Hammer hinzu, um möglichst alle Töne der Oktave in der Erzählung unterzubringen. In vier bildlichen Darstellungen präsentierte er Musikinstrumente bzw. Klangerzeuger mit jeweils sechs harmonischen Tönen und gab dazu die den Tönen zugeordneten Zahlen 4, 6, 8, 9, 12 und 16 in der Beschriftung an. Den vier traditionellen Verhältniszahl der Legende (6, 8, 9 und 12) fügte er die 4 und die 16 hinzu, die einen Ton um eine Quinte tiefer und einen weiteren Ton um eine Quarte höher repräsentieren. Die gesamte Tonfolge erstreckt sich also nun nicht nur über eine, sondern über zwei Oktaven. Diese Zahlen entsprechen zum Beispiel den Tönen f - c' - f' - g' - c'' - f'':



Die Tonfolge f - c' - f' - g' - c'' - f''



Auch Gioseffo Zarlino erzählte die Legende in seiner Schrift *Le istitutioni harmoniche* („Die Grundlagen der Harmonie“), die er im Jahr 1558 publizierte; dabei legte er wie Gaffurio die Darstellung des Boethius zugrunde.^[21]

Der Musiktheoretiker Vincenzo Galilei, der Vater von Galileo Galilei, veröffentlichte 1589 seine Streitschrift *Discorso intorno all'opere di messer Gioseffo Zarlino* („Abhandlung über die Werke des Herrn Gioseffo Zarlino“), die gegen die Ansichten seines Lehrers Zarlino gerichtet war. Darin wies er darauf hin, dass die Angaben der Legende über die Belastung von Saiten mit Gewichten nicht zutreffen.^[22] Definitiv geklärt wurde der Sachverhalt im 17. Jahrhundert, nachdem Galileo Galilei und Marin Mersenne die Gesetze für die Schwingungen von Saiten entdeckt hatten. Mersenne veröffentlichte 1636 seine *Harmonie universelle*, in der er den physikalischen Fehler in der Legende darlegte: Die Tonhöhe ist nicht zur Spannkraft, sondern zu deren Quadratwurzel proportional.

Dennoch ist noch im 19. Jahrhundert Hegel in seinen Vorlesungen über die Geschichte der Philosophie von der physikalischen Richtigkeit der angeblichen Messungen, die in der Pythagoras-Legende mitgeteilt werden, ausgegangen.^[23] Auch heute werden Darstellungen veröffentlicht, in denen die Legende unkritisch wiedergegeben wird, ohne Hinweis auf ihre physikalische und historische Falschheit.^[24]

Werner Heisenberg betonte in einem erstmals 1937 veröffentlichten Aufsatz, die pythagoreische „Entdeckung der mathematischen Bedingtheit der Harmonie“ beruhe auf „dem Gedanken an die sinngebende Kraft mathematischer Strukturen“, einem „Grundgedanken, den die exakte Naturwissenschaft unserer Zeit aus der Antike übernommen hat“; die Pythagoras zugeschriebene Entdeckung gehöre „zu den stärksten Impulsen menschlicher Wissenschaft überhaupt“.^[25]

Widerlegung

Absolute Tonhöhe von Hämmern

Die Eigenfrequenz von Stahlhämmern, die von Menschenhand bewegt werden können, ist meist im Ultraschallbereich und somit unhörbar. Pythagoras kann diese Töne nicht wahrgenommen haben, insbesondere wenn die Hämmer in der Tonhöhe einen Unterschied von einer Oktave aufwiesen.

Tonhöhe in Abhängigkeit vom Hammergewicht

Die Tonhöhe eines longitudinal frei schwingenden Festkörpers ist in der Regel nicht proportional zu seinem Gewicht beziehungsweise seinem Volumen, wohl aber proportional zur Länge, die sich bei ähnlicher Geometrie nur mit der Kubikwurzel des Volumens ändert.

Für die pythagoreischen Hämmer gelten bei ähnlicher Geometrie also die folgenden Verhältniszahlen (Angaben in willkürlichen Maßeinheiten):



Gewicht / Volumen	Verhältniszahl zum größten Hammer	Hammerkopflänge / Tonhöhe	Verhältniszahl zum größten Hammer
12	1,000	2,289	1,000
9	0,750	2,080	0,909
8	0,667	2,000	0,874
6	0,500	1,817	0,794

Tonhöhe in Abhängigkeit von der Saitenspannung

Die Annahme, dass die Tonhöhe einer Saite proportional zur Spannkraft ist, trifft nicht zu, vielmehr ist die Tonhöhe proportional zur Quadratwurzel der Spannkraft. Um die Tonhöhe zu verdoppeln, muss also eine vierfache Zugkraft ausgeübt und somit ein viermal so schweres Gewicht an eine Saite gehängt werden.

Physikalische Betrachtungen

Konsonanz

Ganzzahlige Frequenzverhältnisse

Die Tatsache, dass ein Ton mit der Grundfrequenz f_1 in Konsonanz zu einem zweiten Ton mit einem ganzzahligen Vielfachen n (mit $n \in \mathbb{N}$ und $n > 1$) dieser Grundfrequenz $f_2 = n \cdot f_1$ steht, ergibt sich zwar schon unmittelbar daraus, dass die Maxima und Minima der Tonschwingungen zeitlich synchron sind, kann aber auch folgendermaßen erklärt werden:

Die Schwebungsfrequenz f_S der beiden gleichzeitig klingenden Töne ergibt sich rechnerisch aus der Differenz der Frequenzen dieser beiden Töne und ist als sogenannter Kombinationston hörbar:
 $f_S = f_2 - f_1$ (siehe Mathematische Beschreibung der Schwebung)
Diese Differenz steht ihrerseits in einem ganzzahligen Verhältnis zur Grundfrequenz f_1 :

$$f_S = n \cdot f_1 - f_1 = (n - 1) \cdot f_1$$

Für alle ganzzahligen Vielfachen der Grundfrequenz beim zweiten Ton ergeben sich auch ganzzahlige Vielfache für die Schwebungsfrequenz (siehe nebenstehende Tabelle), so dass alle Töne konsonant klingen.

Rationale Frequenzverhältnisse

Auch für zwei Töne, deren Frequenzen in einem rationalen Verhältnis von $(n + 1)$ zu n stehen, gibt es eine Konsonanz. Die Frequenz des zweiten Tones ergibt sich hierbei nach:

$$f_2 = \frac{n + 1}{n} \cdot f_1$$

Demzufolge ergibt sich für die Schwebungsfrequenz der beiden gleichzeitig klingenden Töne:

$$f_S = \frac{n + 1}{n} \cdot f_1 - f_1$$

Daraus folgt:

$$n \cdot f_S = f_1$$

Die Grundfrequenz ist also unter dieser Bedingung immer ein ganzzahliges Vielfaches der Schwebungsfrequenz (siehe nebenstehende Tabelle). Daher entsteht ebenfalls keine Dissonanz.

Longitudinale Schwingungen und Eigenfrequenz von Festkörpern

Zur Abschätzung eines Metallklotzes möge ein homogener Quader mit einer maximalen Länge l und aus einem Material mit der Schallgeschwindigkeit v betrachtet werden. Dieser hat für den Schwingungsmodus entlang seiner längsten Seite (Longitudinalschwingung) mit Schwingungsbäuchen an den beiden Enden und einem Schwingungsknoten in der Mitte die tiefste Eigenfrequenz f von^[26]

$$f = \frac{v}{2 \cdot l}$$

Die Tonhöhe ist also unabhängig von der Masse und der Querschnittsfläche des Quaders, die Querschnittsfläche darf sogar variieren. Ferner spielen auch die Kraft und die Geschwindigkeit beim Anschlagen des Körpers keine Rolle. Zumindest dieser Sachverhalt deckt sich mit der Pythagoras zugeschriebenen Beobachtung, dass die Tonhöhe nicht von den Händen (und somit den Kräften) der Schmiede abhängig gewesen sei.

Körper mit komplizierterer Geometrie, wie zum Beispiel Glocken, Becher oder Schalen, die eventuell sogar noch mit Flüssigkeiten gefüllt sind, haben Tonhöhen, deren physikalische Beschreibung erheblich aufwendiger ist, da hier nicht nur die Form, sondern auch die Wanddicke oder sogar der Ort des Anschlagens mit berücksichtigt werden müssen. Hierbei werden unter Umständen auch Transversalschwingungen angeregt und hörbar.

Hämmer

Ein sehr großer Vorschlaghammer aus Eisen (ungefähre Schallgeschwindigkeit $v = 5000$ Meter pro Sekunde) mit einer Hammerkopflänge $l = 0,2$ Meter hat also eine Eigenfrequenz von 12,5 Kilohertz. Bei einer quadratischen Querschnittsfläche von 0,1 Meter mal 0,1 Meter hätte er bei der Dichte von Eisen von 7,874 g/cm³ eine Masse von fast 16 Kilogramm. Bereits Frequenzen oberhalb von etwa 15 Kilohertz können von vielen Menschen nicht mehr wahrgenommen werden (siehe Hörfläche); daher ist die Eigenfrequenz selbst eines solch großen Hammers kaum hörbar. Kleinere Hämmer und Hämmer aus Stahl haben noch deutlich höhere Eigenfrequenzen, die daher keinesfalls hörbar sind.

Ambosse

Ein großer Amboss aus Eisen mit einer Seitenlänge $l = 0,5$ Meter hat eine Eigenfrequenz von nur 5 Kilohertz und ist somit gut hörbar.

Es gibt eine Vielzahl von Kompositionen, in denen der Komponist die Verwendung von Ambossen als Musikinstrument vorschreibt. Besonders bekannt sind die beiden Opern aus dem Musikdrama Der Ring des Nibelungen von Richard Wagner:

- Das Rheingold, Szene 3, 18 Ambosse in F in drei Oktaven
- Siegfried, 1. Aufzug, Siegfrieds Schmiedelied *Nothung! Nothung! Neidliches Schwert!*

Materialien mit geringerer Schallgeschwindigkeit als Eisen, wie zum Beispiel Granit oder Messing, erzeugen bei kongruenter

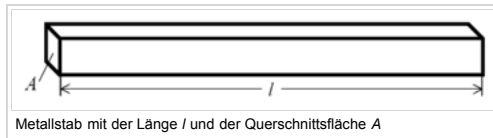
Vielfaches der Schwebungsfrequenz in Abhängigkeit vom ganzzahligen Verhältnis n zweier Frequenzen	
Vielfaches der Grundfrequenz n	Vielfaches der Schwebungsfrequenz n-1
2	1
3	2
4	3
5	4

Schwebungsfrequenz als Vielfaches der Grundfrequenz in Abhängigkeit vom rationalen Verhältnis zweier Frequenzen	
Rationales Verhältnis der Frequenzen (n+1) : n	Grundfrequenz als Vielfaches der Schwebungsfrequenz
2:1	1
3:2	2
4:3	3
5:4	4



Geometrie noch tiefere Frequenzen. Jedenfalls ist von den hörbaren Klängen der Ambosse in den überlieferten Versionen der Legende nicht die Rede, sondern die Klänge werden immer nur den Hämmern zugeschrieben.

Metallstäbe

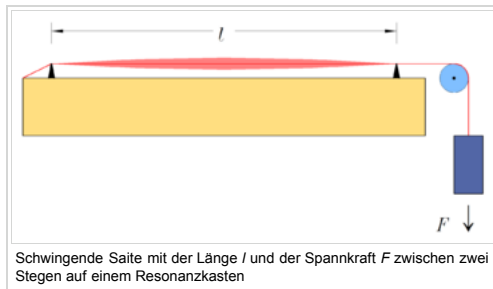


Es ist möglich, Metallstäbe zu vergleichen, wie zum Beispiel Meißel von Steinmetzen

oder Spaltkeile zum Steinbrechen, um auf eine ähnliche wie die Pythagoras zugeschriebene Beobachtung zu kommen, dass nämlich die Tonhöhe von Werkzeugen proportional zu deren Gewicht ist. Wenn die Metallstäbe unter der Vernachlässigung der spitz zulaufenden Werkzeugschneiden alle dieselbe gleichmäßige Querschnittsfläche A , aber verschiedene Längen l haben, ist ihr Gewicht proportional zur Länge und somit auch zur Tonhöhe, sofern die Metallstäbe durch Schläge entlang der Längsachse zu longitudinalen Schwingungen angeregt werden (Klangbeispiele siehe im Kasten rechts).

Für Biegeschwinger, wie zum Beispiel Stimmgabeln oder die Plättchen von Metallophonen, gelten allerdings andere Bedingungen und Gesetze; daher sind diese Überlegungen nicht auf sie anwendbar.

Saitenschwingungen



Saiten können an zwei Seiten auf jeweils einem Steg fixiert werden. Genau

andersherum als bei einem Festkörper mit longitudinalen Schwingungen stellen die beiden Stege die Randbedingungen für zwei Schwingungsknoten her; daher befindet sich der Schwingungsbauch in der Mitte.

Eigenfrequenz f und Tonhöhe von Saiten mit der Länge l sind nicht proportional zur Spannkraft F , sondern zur Quadratwurzel der Spannkraft. Außerdem nimmt die Frequenz bei höherem Zuggewicht und somit höherer Spannkraft zu und nicht ab.^[27]

$$f \propto \frac{\sqrt{F}}{l}$$

Nichtsdestoweniger ist die Tonhöhe bei konstanter Spannkraft streng umgekehrt proportional zur Länge der Saite, was mit dem – angeblich von Pythagoras erfundenen – Monochord direkt nachgewiesen werden kann.

Quellen

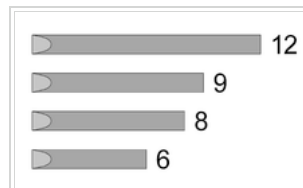
- Boethius: *Anicii Manlii Torquati Severini Boetii de institutione arithmetica libri duo, de institutione musica libri quinque*, hrsg. von Gottfried Friedlein, Minerva, Frankfurt am Main 1966 (Nachdruck der Ausgabe Leipzig 1867, online (<http://12koerbe.de/pan/boe-mus1.htm#X>)) ; deutsche Übersetzung online (<http://12koerbe.de/arche/boe-mu1.htm>))
- Franchino Gaffurio: *Theorica musice*, hrsg. von Ilde Illuminati und Fabio Bellissima, Edizioni del Galluzzo, Firenze 2005, ISBN 88-8450-161-X, S. 66–71 (lateinischer Text und italienische Übersetzung)
- Guido von Arezzo: *Micrologus*, übersetzt von Michael Hermesdorff, Trier 1876 (online (<http://www.lml.badw.de/info/guidomi.htm>))

Literatur

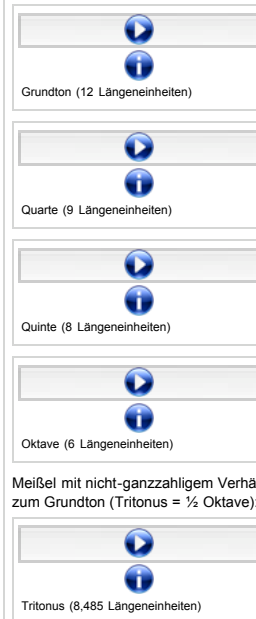
- Walter Burkert: *Weisheit und Wissenschaft. Studien zu Pythagoras, Philolaos und Platon*. Verlag Hans Carl, Nürnberg 1962 (*Erlanger Beiträge zur Sprach- und Kunstwissenschaft*. Band 10)
- Anja Heilmann: *Boethius' Musiktheorie und das Quadrivium. Eine Einführung in den neuplatonischen Hintergrund von "De institutione musica"*. Verlag Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 2007, ISBN 978-3-525-25268-0, S. 203–222 (online (<http://books.google.de/books?id=kdvxm-Z74VcC>))
- Werner Keil (Hrsg.): *Basistexte Musikästhetik und Musiktheorie*. Wilhelm Fink, Paderborn 2007, ISBN 978-3-8252-8359-9, S. 342–346 (online (<http://books.google.de/books?id=-EKzOY012MC>))
- Barbara Münxelhaus: *Pythagoras musicus. Zur Rezeption der pythagoreischen Musiktheorie als quadriviale Wissenschaft im lateinischen Mittelalter*. Verlag für systematische Musikwissenschaft, Bonn - Bad Godesberg 1976 (*Orpheus-Schriftenreihe zu Grundfragen der Musik*. Band 19)
- Jørgen Raasted: *A neglected version of the anecdote about Pythagoras's hammer experiment*. In: *Cahiers de l'Institut du Moyen-Âge grec et latin*. Band 31a, 1979, S. 1–9
- Leonid Zhmud: *Wissenschaft, Philosophie und Religion im frühen Pythagoreismus*. Akademie Verlag, Berlin 1997, ISBN 978-3-05-003090-6

Anmerkungen

- Zhmud (1997) S. 193–196; vgl. Károly Simonyi: *Kulturgeschichte der Physik*, 3. Auflage, Frankfurt am Main 2001, S. 62.
- Nikomachos von Gerasa, *Handbuch der Harmonielehre* 6, übersetzt bei Heilmann (2007) S. 345–347, wörtlich zitiert bei Iamblichos von Chalkis, *Über das pythagoreische Leben* 115–121, übersetzt von Michael von Albrecht: *Jamblich. Pythagoras: Legende – Lehre – Lebensgestaltung*, Darmstadt 2002, S. 109–113.
- Burkert (1962) S. 353 und Anm. 28.
- Zhmud (1997) S. 193–196; vgl. Münxelhaus (1976) S. 28f.
- Burkert (1962) S. 362–364; Zhmud (1997) S. 196–199. Skepsis hinsichtlich akustischer Experimente des Archytas äußert Carl A. Huffman: *Archytas of Tarentum*, Cambridge 2005, S. 129–148; vgl. S. 473–475. Er weist darauf hin, dass sich Archytas hauptsächlich auf Angaben seiner Vorgänger und auf Alltagserfahrung beruft.
- Burkert (1962) S. 355; Münxelhaus (1976) S. 38f., 46.
- Raasted (1979) S. 6f.; Zhmud (1997) S. 192.



Klangbeispiele von Meißeln mit Tonhöhen, die in ganzzahligen Verhältnissen zueinander stehen:



8. Xenokrates Fragment 9 H.; siehe dazu Burkert (1962) S. 57 und Zhmud (1997) S. 193.
9. Diese Passage von Nikomachos' Werk ist herausgegeben, ins Englische übersetzt und kommentiert von Carl A. Huffman: *Philolaus of Croton*, Cambridge 1993, S. 145–165.
10. Münxelhaus (1976) S. 52.
11. Burkert (1962) S. 355.
12. Macrobius, *Commentarii in somnium Scipionis* 2,1,8–13.
13. Boethius, *De institutione musica* 1,10–11, übersetzt von Heilmann (2007) S. 342–345.
14. Zum wissenschafts- und erkenntnistheoretischen Hintergrund siehe Heilmann (2007) S. 205–218.
15. Cassiodor, *Institutiones* 2,5,1; vgl. Iamblichos, *De vita Pythagorica* 121.
16. Isidor, *Etymologiae* 3,16,1.
17. Münxelhaus (1976) S. 15–17.
18. Hans Martin Klinkenberg: *Der Verfall des Quadriviums im frühen Mittelalter*. In: Josef Koch (Hrsg.): *Artes liberales. Von der antiken Bildung zur Wissenschaft des Mittelalters*, Leiden 1976, S. 1–32, hier: 24f.
19. Guido von Arezzo, *Micrologus* 20 (deutsche Übersetzung online (<http://www.lml.badw.de/info/guidomi.htm>)).
20. Münxelhaus (1976) S. 16, 76; Frank Hentschel: *Sinnlichkeit und Vernunft in der mittelalterlichen Musiktheorie*, Stuttgart 2000, S. 148–150 (online (http://books.google.de/books?id=MB_FhdoRuMMC)).
21. Werner Keil (Hrsg.): *Basistexte Musikästhetik und Musiktheorie*, Paderborn 2007, S. 56 (Übersetzung von Zarlinos Text).
22. Vincenzo Galilei: *Discorso intorno all'opere di messer Gioseffo Zarlino* (online (<http://emc.elte.hu/~pinter/szoveg/Galilei.Discorso.pdf>)).
23. Werner Keil (Hrsg.): *Basistexte Musikästhetik und Musiktheorie*, Paderborn 2007, S. 343.
24. Arnold Keyserling: *Geschichte der Denkstile*, 3. *Das logische Denken* (online (<http://www.schuledesrades.org/palme/books/denkstil/?Q=1/1/3/0/0/1/39>)), abgerufen am 28. August 2010); Karl Sumereder: *Musik und Mathematik* (online (<http://www.genius.co.at/index.php?id=49>)), abgerufen am 16. Januar 2011); Arnold Keyserling: *Der neue Name Gottes. Die Weltformel und ihre Analogien in der Wirklichkeit*, Wien 2002, S. 71 (online (http://books.google.de/books?id=4HTSrLO3bGwC&pg=PA71&dq=pythagoras+schmiede&hl=de&ei=jG80Ta24Ml3wsgbkemrCg&sa=X&oi=book_result&ct=result&resnum=9&ved=0CFAQ6AEwCDgU#v=onepage&q=pythagoras%20schmiede)).
25. Werner Heisenberg: *Wandlungen in den Grundlagen der Naturwissenschaft*, 8. Auflage, Stuttgart 1949, S. 50.
26. Ludwig Bergmann, Clemens Schaefer: *Lehrbuch der Experimentalphysik*, Band 1, 9. Auflage, Berlin 1974, Kapitel 83: *Schallsender*, Abschnitt *Longitudinalschwingungen*.
27. Ludwig Bergmann, Clemens Schaefer: *Lehrbuch der Experimentalphysik*, Band 1, 9. Auflage, Berlin 1974, Kapitel 83: *Schallsender*, Abschnitt *Saite*.



Dieser Artikel wurde am 2. Februar 2011 in dieser Version (http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Pythagoras_in_der_Schmiede&oldid=84484303) in die Liste der lesenswerten Artikel aufgenommen.

Von „http://de.wikipedia.org/wiki/Pythagoras_in_der_Schmiede“

Kategorien: Wikipedia:Lesenswert | Tonlehre | Stimmung (Musik) | Musiktheoretische Literatur | Musikgeschichte | Überholte Theorie (Physik) | Körperschall

- Diese Seite wurde zuletzt am 19. Februar 2011 um 17:47 Uhr geändert.
 - Der Text ist unter der Lizenz „Creative Commons Attribution/Share Alike“ verfügbar; zusätzliche Bedingungen können anwendbar sein. Einzelheiten sind in den Nutzungsbedingungen beschrieben.
- Wikipedia® ist eine eingetragene Marke der Wikimedia Foundation Inc.