

Ἀνακοινώσεις

Θέματα

Ἄρθρα

926

ΣΤΑΜΑΤΙΣ, Ε. Σ.

1971

ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ὑπὸ τοῦ

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

Μέλους τῆς Διεθνoῦς Ἀκαδημίας τῆς Ἱστορίας τῶν Ἐπιστημῶν

ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ ΚΑΙ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΙ

29. Εἰς τὴν ἀρχαίαν Ἑλλάδα ἀριθμητικὴ ὠνομάζετο, ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον ἡμεῖς σήμερον λέγομεν θεωρίαν τῶν ἀριθμῶν. Ἡ πρακτικὴ ἀριθμητικὴ ὠνομάζετο τότε λογιστικὴ. Ὁ σχολιαστὴς τῶν ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους Εὐτόκιος (6ος αἰὼν) μνημονεύει βιβλίον λογιστικῆς τοῦ μαθηματικοῦ Μάγνου, τὸ ὁποῖον ὅμως δὲν ἐσώθη (Ἀρχιμήδους Ἄπαντα τομ. III, σελ. 238, 31, Heiberg). Πράξεις τῆς πρακτικῆς ἀριθμητικῆς διεσώθησαν ὑπὸ τοῦ Ἡρώδους, διευθυντοῦ τοῦ ἐλληνικοῦ Πολυτεχνείου Ἀλεξανδρείας (πρῶτος αἰὼν ἀπὸ Χριστοῦ), ὑπὸ τοῦ Θέωνος τοῦ Ἀλεξανδρέως, (4ος αἰ. μ. Χ.) διευθυντοῦ τοῦ ἐλληνικοῦ Πανεπιστημίου Ἀλεξανδρείας, εἰς τὰ σχόλια αὐτοῦ εἰς τὴν Μαθηματικὴν Σύνταξιν τοῦ Πτολεμαίου, (τὴν λεγομένην ὑπὸ τῶν νεωτέρων, ἐκ τοῦ ἀραβικοῦ ὀνόματος, Ἀλμαγέστην), καὶ ὑπὸ τοῦ Εὐτοκίου εἰς τὰ σχόλια αὐτοῦ εἰς τὴν πραγματείαν τοῦ Ἀρχιμήδους Κύκλου μέτρησης. Θὰ ὑπῆρχον βεβαίως καὶ κατὰ τὴν ἀρχαιότητα βιβλία πρακτικῆς ἀριθμητικῆς, τὰ ὁποῖα προωρίζοντο διὰ τὴν διδασκαλίαν εἰς τὰ δημοτικὰ Σχολεῖα καὶ διὰ τὴν χρῆσιν τῶν ἐμπορευομένων. Δὲν διεσώθη ὅμως τίποτε ἐξ αὐτῶν, ἐκτὸς ὀλίγων ἑκατοντάδων προβλημάτων ἐκδόσεως τοῦ 14ου καὶ 15ου αἰῶνος. Ἐκ τούτων ἐδημοσιεύθησαν εἰς τὴν Βιέννην κατὰ τὰ ἔτη 1963 καὶ 1968 περίπου 200. Τὸ πρῶτον ἐκ τῶν 2 βιβλίων τούτων ἐξεδόθη κατόπιν συνεργασίας τοῦ βυζαντινολόγου καθηγητοῦ τοῦ Πανεπιστημίου τῆς Βιέννης καὶ Γραμματέως τῆς Ἀκαδημίας τῶν Ἐπιστημῶν τῆς Αὐστρίας κ. Χέρμπερτ Χοῦνγκερ (Herbert Hunger) καὶ τοῦ καθηγητοῦ τῆς Ἱστορίας τῶν Μαθηματικῶν τοῦ Πανεπιστημίου τοῦ Μονάχου καὶ μέλους τῆς Ἀκαδημίας τῶν Ἐπιστημῶν τῆς Βαυαρίας κ. Κούρτ Φόγγελ (Kurt Vogel), ἐν ᾧ τὸ δεύτερον ἐξεδόθη ὑπὸ μόνου τοῦ κ. Φόγγελ. Κατὰ τὰ γραφόμενα τοῦ κ. Χοῦνγκερ ὑπάρχουν ἀκόμη εἰς τὰ Ἀρχεῖα τῆς Βιέννης πολλὰ ἀνέκδοτα προβλήματα, τῆς ἐποχῆς τῶν τελευταίων χρόνων τῆς Βυζαντινῆς Αὐτοκρατορίας καὶ τῆς ἐποχῆς τῶν πρώτων δεκαετιῶν ἀπὸ τῆς ἀλώσεως τῆς Κωνσταντινουπόλεως ὑπὸ τῶν Τούρκων.

Τὰ στοιχεῖα τῆς θεωρίας τῶν ἀριθμῶν, (ἀποκλειστικὴ δημιουργία τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων) μοναδικὰ εἰς τὸν κόσμον τῶν ἀρχαίων πολιτισμῶν, διέσωσεν ὁ Εὐκλείδης εἰς τὰ βιβλία 7, 8, 9 τῶν Στοιχείων του. Ἄλλο βιβλίον τῆς θεωρίας τῶν ἀριθμῶν ἐξεδόθη, κατὰ πᾶσαν πιθανότητα εἰς τὴν Ἀλεξανδρινῇ,

ὕπο τοῦ ἐκ τῆς πόλεως Γέρασα τῆς Παλαιστίνης καταγομένου Ἑλληνο μαθηματικοῦ Νικομάχου (2ος αἰ μ.Χ.) τοῦ καλουμένου, ἐκ τοῦ ὀνόματος τῆς πόλεως οὗτος ἐγεννήθη, Γερασσηνοῦ. Τὸ βιβλίον τοῦτο φέρει τὸν τίτλον Ἀριθμητικὴ Εἰσαγωγή καὶ περιέχει ἐρμηνευτικὰ σχόλια εἰς τινὰς ὁρισμοὺς καὶ θεωρήματα τῆς θεωρίας τῶν ἀριθμῶν τοῦ Εὐκλείδου, ὡς ἐπίσης σχόλια ἐρμηνευτικὰ εἰς τὴν θεωρίαν τῆς μουσικῆς καὶ τὴν ἀστρονομίαν τοῦ Εὐκλείδου. Ἐν τινι μέτρῳ παρόμοιον περιεχόμενον περιλαμβάνει καὶ τὸ βιβλίον τοῦ Θέωνος τοῦ Σμυρναίου, ἐπίσης τοῦ 2ου αἰ μ.Χ. Τὸ βιβλίον τοῦτο ἐγράφη διὰ νὰ ἐρμηνεύσῃ τὰ μαθηματικά, τὰ ὁποῖα ἔχει κατασπείρει ὁ Πλάτων εἰς τοὺς διαλόγους του, ἔχει ὅμως διασώσει μερικὸς περιφύμους γνώσεις τῆς θεωρίας τῶν ἀριθμῶν, ἐκ τῶν ὁποίων συμπεραίνομεν περίπου τὴν μεγάλην ἀξίαν ἐκείνων, τὰ ὁποῖα ἀπωλέσθησαν. Ἄλλο βιβλίον ἀριθμητικῆς, ὑπὸ τὸν τίτλον Ἀριθμητικά, εἶναι τὸ ἐκδοθὲν ὑπὸ τοῦ διασήμου Ἀλεξανδρέως μοθηματικοῦ Διοφάντου, ἀκμάσαντος περὶ τὸ 250 μ.Χ. Τὸ βιβλίον ὅμως τοῦτο περιέχει ὑπὸ ἀριθμητικὸν ἐνδυμα ὕλην μαθηματικὴν, τὴν ὁποῖαν σήμερον κατατάσσομεν εἰς τὴν ἀλγεβραν.

Αἱ ἀρχαὶ τῆς θεωρίας τῶν ἀριθμῶν τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων ἀποδίδονται εἰς τὸν Πυθαγόραν καὶ τοὺς Πυθαγορείους, δηλ. τοὺς μαθητὰς του καὶ τοὺς διαδόχους αὐτῶν.

Κατὰ τὸν Εὐκλείδην, ὅστις συνεχίζει τὴν Πυθαγόρειον παράδοσιν, «μονὰς ἐστίν, καθ' ἣν ἕκαστον τῶν ὄντων ἓν λέγεται. Ἀριθμὸς δὲ τὸ ἐκ μοιᾶδων συγκείμενον πλῆθος». (Ὅρισμοι 1 καὶ 2 τοῦ 7ου βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου). Ὅπως βλέπομεν ἐδῶ ἡ μονὰς δὲν περιλαμβάνεται εἰς τοὺς ἀριθμοὺς, ἐν ᾧ ὡς ἀριθμὸς νοεῖται πᾶς ἀκέραιος ἀριθμὸς. Ὁ Νικόμαχος ὁ Γερασσηνὸς εἰς τὸ βιβλίον του Ἀριθμητικὴ Εἰσαγωγή, λέγει, «ὅτι ἀριθμὸς εἶναι πλῆθος ὀρισμένον ἢ μοιᾶδων σύστημα ἢ ποσότητος χύμα ἐκ μοιᾶδων συγκείμενον» (Νικόμαχος Ἀριθμ. Εἰσαγωγή, ἔκδ. R. Hoebe, Λειψία 1864 σελίς 13, 7). Ὁ Θέων ὁ Σμυρναῖος ὀρίζει τὸν ἀριθμὸν ὡς ἐξῆς: «Ἀριθμὸς ἐστὶ σύστημα μονάδων, ἢ προποδισμὸς πλῆθους ἀπὸ μονάδος ἀρχόμενος καὶ ἀναποδισμὸς εἰς μονάδα καταλήγων, μονὰς δὲ ἐστὶ περαίνουσα ποσότης [ἀρχὴ καὶ στοιχεῖον τῶν ἀριθμῶν], ἣτις μειουμένου τοῦ πλῆθους κατὰ τὴν ὑφαίρεσιν τοῦ παντὸς ἀριθμοῦ στερηθεῖσα μονὴν τε καὶ στάσιν λαμβάνει». Δηλαδή, ἀριθμὸς εἶναι σύστημα μονάδων, ἢ σχηματισμὸς διὰ προσθέσεως πλῆθους, ἀρχίζων ἀπὸ τὴν μονάδα καὶ ἐπάνοδος δι' ἀντιστροφῆς τοῦ σχηματισμοῦ καταλήγων εἰς τὴν μονάδα. Μονὰς δὲ εἶναι περαίνουσα ποσότης, ἀρχὴ καὶ στοιχεῖον τῶν ἀριθμῶν, ἢ ὁποῖα, ἀφοῦ ἐλαττώνεται τὸ πλῆθος τῶν μονάδων, κατὰ τὴν διαδοχικὴν ἀφαίρεσιν, στερηθεῖσα τῆς ἐννοίας τοῦ ἀκεραίου ἀριθμοῦ, λαμβάνει μονὴν καὶ στάσιν, (δηλ. ἀπομένει καὶ στέκεται μόνη της). Ὁ Θέων παρέχει ἐδῶ καὶ τὴν εἰςυμολογίαν τῆς λέξεως μονὰς λέγων, «ὅτι ὅτι ἂν ἔκ τινος ἀκεραίου ἀφαιρῶμεν συνεχῶς μονάδα εἰς τὸ τέλος θὰ παραμείνῃ μία μοιὰς. Ἄν π.χ. ἔχωμεν σωρὸν μῆλων καὶ ἀφαιρῶμεν συνεχῶς ἓν μῆλον τέλος θὰ παραμείνῃ ἓν μῆλον μόνον του, καὶ ἐκ τῶν λέξεων «παραμείνῃ» καὶ «μόνοι» τοῦ σχηματίζεται ἡ λέξις μοιὰς. (Θέων Σμυρναῖος, Περί τῶν κατὰ το μαθηματικὸν χρησίμων εἰς τὴν Πλάτωνος ἀνάγνωσιν, ἔκδ. E. Hiller, Λειψία 1878, σελίς 18, 3). Κατὰ τὸν Ἡρώνα τὸν Ἀλεξανδρέα «τὴν μονάδα λέγουσι (νοεῖ, οἱ Πυθαγόρειοι) στιγμὴν ἄθετον, τὴν δὲ στιγμὴν (νοεῖ τὸ σημεῖον εἰς τὴν γεωμετρίαν) θέσιν ἔχουσαν». Ἡρώνας Ἀλεξανδρέως Ἀπαντα, τόμος 4ος ἔκδ. I. L. Heiberg, Λειψία 1912, σελίς 124, 211.

Οἱ προτασσόμενοι ὁρισμοὶ τῆς θεωρίας τῶν ἀριθμῶν καὶ τὰ σπουδαιότερα θεωρήματα αὐτῆς θὰ ἐκτεθῶσιν εἰς τὸ οἰκεῖον κεφάλαιον περὶ Εὐκλείδου. Ἐνταῦθα παραθέτομεν τὰς πληροφορίας ἐκεῖνας, αἱ ὁποῖαι δὲν ἀναφέρονται εἰς τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου ἢ ἀναφέρονται ἐκεῖ ἐν πολλῇ συντομίᾳ. Αἱ κυριώτεραι πηγαί, τὰς ὁποίας χρησιμοποιοῦμεν, εἶναι ὁ Ἡρώων ὁ Ἀλεξανδρεὺς, ὁ Θέων ὁ Σμυρναῖος, ὁ Νικόμαχος ὁ Γερρασηνός, ὁ Ἰάμβλιχος, ὁ Διόφαντος, ὁ Πάππος.

Κατὰ τὸν Νικόμαχον καὶ τὸν Θέωνα τὸν Σμυρναῖον οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ διακρίνονται εἰς τετραγώνους, ἑτερομήκεις, προμήκεις, ἑλλιπείς, ὑπερτελείους, τελείους, τριγώνους καὶ πολυγώνους (Νικόμαχος Ἀριθμ. Εἰσ. σελίς 86, 9—119, 18. Θέων Σμυρν. σελ. 26, 21—46, 19). Τετραγῶνοι ἀριθμοὶ εἶναι οἱ ἀναλυόμενοι εἰς γινόμενον δύο ἴσων παραγόντων (ὡς ὀρίζει τοῦτο ὁ Εὐκλείδης). Ἐτερομήκεις εἶναι οἱ ἀναλυόμενοι εἰς δύο παράγοντας, τῶν ὁποίων ὁ εἰς εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ἄλλου κατὰ μονάδα, $(n+1)$. Προμήκεις ἀριθμοὶ εἶναι οἱ ἀναλυόμενοι εἰς δύο παράγοντας, τῶν ὁποίων ὁ εἰς εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ἄλλου κατὰ μίαν ἢ περισσότερας μονάδας. Ὡστε ἡ ἔννοια προμήκης ἀριθμὸς περιλαμβάνει τὴν ἔννοιαν ἑτερομήκης. Ὁ Πλάτων χρησιμοποιοῖ τὰς λέξεις ἑτερομήκης καὶ προμήκης ὑπὸ τὴν αὐτὴν ἔννοιαν, ὡς θὰ γίνῃ τοῦτο φανερόν εἰς τὸ Κεφάλαιον περὶ Πλάτωνος (Πλάτων, Θεαίτητος 147 d—148 b). Ἑλλιπὴς ἀριθμὸς εἶναι ἐκεῖνος τοῦ ὁποῦ τοῦ ἄθροισμα ὧν τῶν δυνατῶν διαιρετῶν αὐτοῦ (πλὴν τῆς μονάδος) εἶναι μικρότερον τοῦ ἀριθμοῦ. Ὁ ἀριθμὸς 10 π.χ. εἶναι ἑλλιπὴς, διότι $10:10=1$, $10:5=2$, $10:2=5$, καὶ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν διαιρετῶν $1+2+5 < 10$. Ὁ ἀριθμὸς 12 εἶναι ὑπερτελής, διότι $12:12=1$, $12:6=2$, $12:4=3$, $12:3=4$, $12:2=6$, καὶ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν διαιρετῶν $1+2+3+4+6 > 12$. Τέλειος ἀριθμὸς κατὰ τὸν Εὐκλείδην (Στοιχείων βιβλ. 7 ἀριθμὸς 23) εἶναι ὁ ἴσος πρὸς τὰ μέρη του, ἥτοι ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν διαιρετῶν του διδῇ τὸν ἀριθμόν. Ὁ 6 π.χ. εἶναι τέλειος, διότι $6:6=1$, $6:3=2$, $6:2=3$ καὶ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν διαιρετῶν του $1+2+3=6$, ἥτοι αὐτὸς ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς. Ἀπὸ 1—10 ὑπάρχει εἰς μόνον τέλειος ἀριθμὸς ὁ 6. Ὁ 28 εἶναι ἐπίσης τέλειος, διότι $28:28=1$, $28:14=2$, $28:7=4$, $28:4=7$, $28:2=14$, καὶ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν διαιρετῶν του $1+2+4+7+14=28$. Ἀπὸ τοῦ 11 μέχρι τοῦ 100 ὑπάρχει εἰς μόνον τέλειος ἀριθμὸς ὁ 28. Ὁ ἀριθμὸς 496 εἶναι τέλειος, διότι τὸ ἄθροισμα τῶν διαιρετῶν του $1+2+4+8+16+31+62+124+248=496$. Ἀπὸ τοῦ 101 μέχρι τοῦ 1000 ὑπάρχει μόνον εἰς τέλειος ἀριθμὸς ὁ 496. Ἀπὸ τοῦ 1001 μέχρι τοῦ 10000 ὑπάρχει μόνον εἰς τέλειος ἀριθμὸς ὁ 8128. Ὁ Ἰάμβλιχος, ἑκατὸν ἔτη περίπου μεταγενέστερος τοῦ Νικομάχου καὶ τοῦ Θέωνος τοῦ Σμυρναίου, ὁμιλῶν διὰ τοῦς τελείους ἀριθμοὺς λέγει, ὅτι, ἐὰν τυχὸν ἀναζητήσωμεν περαιτέρω τέλειον ἀριθμόν θὰ εὑρωμεν μεταξὺ ¹10000 καὶ ²10000 μόνον ἓνα τέλειον ἀριθμόν, καὶ μεταξὺ ²10000 καὶ ³10000 θὰ εὑρωμεν πάλιν ἓνα μόνον τέλειον ἀριθμόν, καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς ἐπ' ἀπειρον. (καὶ εἰ τύχοι ἐν πρώτῳ βαθμῷ μυριάδων ὁμοίως μόνον ἓνα, καὶ δευτέρῳ βαθμῷ πάλιν ἓνα, καὶ τὸ τοιοῦτον ἐπ' ἀπειρον). (Ἰάμβλιχος, εἰς Νικομάχου Ἀριθμ. Εἰγαγωγὴν, σελίς 33, 20. Pistelli). Ἡ πληροφορία αὕτη τοῦ Ἰαμβλίχου δὲν συμπίπτει πρὸς τὰ πράγματα. Ἐκ τοῦ Ἰαμβλίχου συνάγεται ὅτι οἱ ἀρχαῖοι

*Έλληνες ἐγνώριζον μόνον τοὺς πέντε πρώτους τέλειους ἀριθμούς. Διὰ πρῶτην δὲ φοράν, καθ' ὅσον γνωρίζομεν, βλέπομεν νὰ χρησιμοποιῇται ἡ λέξις βαθμὸς διὰ τὴν ἔκφρασιν τῆς τάξεως δυνάμεως ἀριθμοῦ τινος. Θεωροῦμεν ὁμῶς βέβαιον, ὅτι ἡ λέξις αὕτη εἶχε δημιουργηθῇ ὑπὸ τῶν Πυθαγορείων. Δὲν εἶναι βέβαιον πότε ἀνεκαλύφθη ὁ ἕκτος καὶ ὁ ἑβδομος τέλειος ἀριθμός. Ὁ ὄγδοος ἀνεκαλύφθη ὑπὸ τοῦ Jean Prestet (περὶ τὸ 1670), ὁ ἑνατος ὑπὸ τοῦ P. Seelhoff (Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1886, σελ. 174 καὶ ἐξῆς). Ὁ δέκατος τέλειος ἀριθμός ἀνεκαλύφθη ὑπὸ τοῦ Ἀμερικανοῦ R. E. Powers (Bulletin, American Mathem. Society, 1912 σελ. 162).

Εἶναι δυσκολώτατον νὰ ἀνακαλυφθῇ πότε ἀριθμὸς τις εἶναι τέλειος, ὥς τοῦτο θὰ γίνῃ ἀντιληπτὸν ἀμέσως κατωτέρω. Ἐν ᾧ ἡ ἀπόφανσις, πότε ἀριθμὸς τις εἶναι ἐλλιπὴς ἢ ὑπερτελής εἶναι εὐκολωτάτη κατόπιν τῆς εὐρέσεως τοῦ ἀθροίσματος τῶν διαιρετῶν τοῦ ἀριθμοῦ καὶ τῆς συγκρίσεως τοῦ ἀθροίσματος τούτου πρὸς τὸν ἀριθμόν, διὰ τὴν εὐρεσιν τοῦ τέλειου ἀριθμοῦ ἰσχύουν ἄλλα κριτήρια.

Κατὰ τὸν Εὐκλείδην (Στοιχείων βιβλίον 9, θεώρ. 36), ἐὰν θεωρήσωμεν τὴν γεωμετρικὴν πρόοδον $1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, \dots, 2^{n-1}$ (1), καὶ σχηματίζωμεν διαδοχικῶς τὰ μερικὰ ἀθροίσματα αὐτῆς, ἐὰν μερικὸν τι ἀθροίσμα εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος, τὸ γινόμενον τοῦ τελευταίου ὅρου τοῦ ἀθροίσματος ἐπὶ τὸ μερικὸν τοῦτο ἀθροίσμα εἶναι ἀριθμὸς τέλειος,

*Ἐστῶσαν τὰ μερικὰ ἀθροίσματα:

$$\sigma_1 = 1$$

$$\sigma_2 = 1+2 = 3. \text{ Ὁ ἀριθμὸς } 3 \text{ εἶναι πρῶτος. Εἶναι ἄρα } 2^1 \times 3 = 6 \text{ ἀριθμὸς τέλειος.}$$

$$\sigma_3 = 1+2+2^2 = 7. \text{ Ὁ ἀριθμὸς } 7 \text{ εἶναι πρῶτος. Εἶναι ἄρα } 2^2 \times 7 = 28 \text{ ἀριθμὸς τέλειος.}$$

$$\sigma_4 = 1+2+2^2+2^3 = 15. \text{ Ὁ ἀριθμὸς } 15 \text{ δὲν εἶναι πρῶτος.}$$

$$\sigma_5 = 1+2+2^2+2^3+2^4 = 31. \text{ Ὁ ἀριθ. } 31 \text{ εἶναι πρῶτος. Εἶναι ἄρα } 2^4 \times 31 = 496 \text{ ἀριθμὸς τέλειος.}$$

$$\sigma_6 = 1+2+2^2+2^3+2^4+2^5 = 63 \text{ ὁ ἀριθμὸς } 63 \text{ δὲν εἶναι πρῶτος.}$$

$$\sigma_7 = 1+2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6 = 127. \text{ Ὁ ἀριθμὸς } 127 \text{ εἶναι πρῶτος. Εἶναι ἄρα } 2^6 \times 127 = 8128 \text{ ἀριθμὸς τέλειος.}$$

Τὸ ἀθροίσμα τῆς ἀνωτέρω γεωμετρικῆς προόδου (1) εἶναι $\Sigma = 2^n - 1$. Ἐὰν τὸ ἀθροίσμα τοῦτο εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος, τότε τὸ γινόμενον, τοῦ τελευταίου ὅρου τοῦ ἀθροίσματος τοῦ 2^n , ἐπὶ τὸ ἀθροίσμα $2^n - 1$ εἶναι ἀριθμὸς τέλειος. Ὡς ἐτονίσθη προηγουμένως, εἶναι δύσκολον νὰ εὐρεθῇ πότε ὁ ἀριθμὸς $2^n - 1$ εἶναι πρῶτος, ὅταν ὁ n εἶναι μεγάλος. Ἡ μέθοδος τοῦ Ἐρατοσθένους (τὸ κόσκινον τοῦ Ἐρατοσθένους) δὲν εὐκολύνει τὴν ἔρευναν διὰ μεγάλους ἀριθμούς. Ὁ Γάλλος δικηγόρος καὶ περίφημος ἐρευνητῆς μαθηματι-