

1110
WASCHKIES, H.
1995
P. 91-153
AKAN V

Hans-Joachim Waschkies (Kiel)

**Die Prinzipien der griechischen Mathematik:
Platon, Aristoteles, Proklos und Euklids *Elemente***

Die Frage nach den Prinzipien, in denen die Mathematik der Griechen fundiert war, wird unter zwei verschiedenen Aspekten diskutiert. Zum einen kann man das mathematische Wissen, das uns in den Werken von Autoren wie Euklid und Archimedes oder Apollonios überliefert ist, zusammenstellen und im Anschluß daran untersuchen, wie es nach den Maßstäben der Mathematik (oder der Wissenschaftstheorie) von heute zu begründen wäre,¹ und zum andern ist von wissenschaftshistorischem Interesse, ob es in der Antike auch schon eine wissenschaftstheoretische Deutung samt einer daran orientierten Begründung der Mathematik gab, die dann natürlich keineswegs in allen Einzelheiten mit den entsprechenden Metatheorien unserer Tage konform sein muß.

Ich werde mich im folgenden nur mit dem zuletzt genannten Aspekt der eben aufgeworfenen Frage befassen, und da scheint mir geraten, meinen Ausführungen zu diesem Thema einige Bemerkungen über die Besonderheiten vorzuschicken, durch die sich die Mathematik der Griechen von der mathematischen Praxis der altorientalischen Völker unterscheidet. Die mathematischen Keilschrifttexte und Papyri² führen exemplarisch Methoden

¹ Als Beispiele dafür nenne ich F. Beckmanns Arbeit über Neue Gesichtspunkte zum 5. Buch Euklids, *Archive for History of Exact sciences*, 4 (1967-1968), 1-144, in der Beckmann ein Axiomensystem zusammengestellt hat, mit dem die allgemeine Proportionentheorie aus dem V. Buch der *Elemente* vollständig begründet werden kann, sowie Chr. M. Taisbaks Monographie *Division and logos. A theory of equivalent couples and sets of integers propounded by Euclid in the arithmetical books of the Elements*, Odense 1971, die eine axiomatische Begründung der arithmetischen Proportionentheorie aus den Büchern VII-IX der *Elemente* enthält; dazu verweise ich ergänzend auf H.-J. Waschkies, *Anfänge der Arithmetik im Alten Orient und bei den Griechen*, Amsterdam 1989, 46-54.

² Bis auf wenige Ausnahmen sind die überlieferten mathematischen Keilschrifttexte und Papyri in den nachstehend angeführten Monographien bzw. Sammelbänden ediert worden:

zur Lösung von Aufgaben eines bestimmten Typs ein. Dazu genügte noch die durch wenige Fachausdrücke der Handwerker und Schreiber ergänzte Umgangssprache von damals, während die Griechen vom 6. Jh. v. Chr. an nicht nur neue mathematische Termini prägten, sondern auch schon durch Definitionen festzulegen versuchten, was mit diesen Fachausdrücken bezeichnet werden soll. Im übrigen geschah die Einführung besonderer Begriffe zum Benennen von geometrischen Objekten, mit denen man in der mathematischen Praxis bereits seit langem gekonnt umzugehen wußte, zum Teil erstaunlich spät. Ein Beispiel dafür bietet der Terminus *Parallele*, der in den mathematischen Texten aus dem Alten Orient noch fehlt, obwohl die Schreiber jener Tage das Ziehen von parallelen Strecken durchaus schon als Mittel zum Lösen von Aufgaben zu nutzen wußten.³ Noch erstaunlicher ist jedoch, daß sich das Wort *παράλληλος* (ebenso wie der daraus abgeleitete Terminus *παράλληλόγραμμον*) im Griechischen auch erst in den Schriften des Aristoteles nachweisen läßt,⁴ obwohl die Anfänge der spezifisch griechischen

The Rhind mathematical papyrus. British Museum 100 57 and 100 58. I: Free translation and commentary by A. B. Chace with the assistance of H. P. Manning. Bibliography by R. C. Archibald; II: Photographs with a literal translation by A. B. Chace, L. Bull, H. P. Manning. Bibliography. Egyptian and Babylonian mathematics (Supplement) by R. C. Archibald. Mathematical leather roll in the British Museum. Ed. by S. R. K. Glanville, Oberlin (Ohio) 1927-1929.

Mathematischer Papyrus des Staatlichen Museums der schönen Künste in Moskau. Herausgegeben und kommentiert von W. W. Struve unter Benutzung einer hieroglyphischen Transkription von B. A. Turajeff, Würzburg 1973 [¹1930].

Mathematische Keilschrift-Texte. I-III. Herausgegeben und bearbeitet von O. Neugebauer, Berlin; New York; Heidelberg 1973 [¹1935-1937].

Mathematical cuneiform texts. Edited by O. Neugebauer and A. Sachs. With a chapter by A. Goetze, New Haven (Connecticut) 1945.

³ Siehe etwa O. Neugebauer, Zur Geschichte der babylonischen Mathematik, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik. Abt. B: Studien, 1 (1929-1931), 67-80, oder L. Brack-Bernsen und O. Schmidt, Bisectable trapezia in Babylonian mathematics, Centaurus 33 (1990), 1-38.

⁴ Siehe Ch. Mugler, Dictionnaire historique de la terminologie géométrique des grecs, Paris 1958, 328-331, und E. Neuenschwander, Die ersten vier Bücher der Elemente Euklids, Archive for History of Exact Sciences 9 (1972-1973), 325-380, dort 363-369.

Mathematik (spätestens) auf das erste Viertel des 5. Jhs. v. Chr. zu datieren sind.⁵

Seit dieser Zeit hatten die Griechen außerdem die Fähigkeit entwickelt, allgemeine Sätze zu formulieren.⁶ Aus diesem Grunde konnten sie ihr mathematisches Wissen weit präziser fixieren und überliefern als die Schreiber aus dem Alten Orient. Die mathematischen Keilschrifttexte und Papyri enthalten nämlich noch weitgehend vorbegrifflich formulierte Aufgaben, zu denen kommentarlos eine Lösung vorgerechnet wird, die exemplarisch in einen allgemeinen Fall einführen soll, von dem selbst nie die Rede ist. Dabei konnten diese zumeist extrem elliptisch formulierten Texte sicherlich bereits zur Zeit ihrer Niederschrift nicht von jedem Leser verstanden werden, der sie phonetisch korrekt abzulesen wußte. Sie hatten eher die Funktion von Aide-mémoires für einen Unterricht, bei dem die darauf notierten Worte (und Figuren) Lehrern, die mit dem Kontext vertraut waren, als Auslöser für eine mündliche, durch graphische Darstellungen gestützte Unterweisung dienten, bei der das mathematische Wissen noch nicht so eindeutig und standardisiert reproduziert werden konnte wie beim Kopieren von Sätzen und Beweisen durch die Griechen.⁷

Daneben bemühten sich die griechischen Mathematiker offenbar früh, eine Teilmenge dieser Sätze systematisch aus den übrigen abzuleiten. Diese Begründungspraxis induzierte in der Menge ihres geometrischen und arith-

⁵ Siehe O. Becker, Die Lehre von Geraden und Ungeraden im neunten Buch der Euklidischen Elemente. Versuch einer Wiederherstellung in der ursprünglichen Gestalt, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, Abt. B: Studien, 3 (1934), 533-553, dort 536-539; dazu verweise ich ergänzend auf H.-J. Waschkies (wie Anm. 1), 33-36 und 275-279.

⁶ Siehe J. Mittelstraß, Die Entdeckung der Möglichkeit von Wissenschaft. In J. Mittelstraß, Die Möglichkeit von Wissenschaft, Frankfurt a. M. 1974, 29-55 und 209-221 (Anmerkungen), dort 31-33. Der Aufsatz erschien zuerst im Archive for History of Exact Sciences 2 (1962-1966), 410-435.

⁷ Siehe H.-J. Waschkies, Mündliche, graphische und schriftliche Vermittlung von geometrischem Wissen im Alten Orient und bei den Griechen. In W. Kullmann und J. Althoff (Herausgeber), Vermittlung und Tradierung von Wissen in der griechischen Kultur, Tübingen 1993, 39-70, dort 57-58.

metischen Wissens Hierarchien;⁸ denn einige der mathematisch interessanten Sätze ließen sich nunmehr aus andern Sätzen deduzieren, während andere Sätze ohne jede weitere Begründung behauptet wurden (bzw. werden mußten) und dann als Prämissen für Beweise benutzt werden konnten. Dabei kam es im Vergleich mit der Begründungspraxis, die sich in den mathematischen Keilschrifttexten und Papyri aus dem alten Orient widerspiegelt, zu einer Neuerung, die nicht darin besteht, daß die Griechen als erste die Kunst des logischen Schließens entdeckt haben. Die Vorstellung, nach der die griechische Mathematik erst entstehen konnte, nachdem ihre logischen Argumentationsformen von den Eleaten entwickelt worden waren, ist insbesondere von A. Szabó vertreten worden, der die Ergebnisse seiner 1956 einsetzenden Untersuchungen zu diesem Thema in der Monographie *Anfänge der griechischen Mathematik* zusammengefaßt hat.⁹ Seine These fand viele Anhänger; aber wie bereits von I. Mueller betont worden ist, läßt sich Szabós Behauptung, nach der die Entwicklung der frühgriechischen Mathematik auf die Philosophie der Eleaten zurückgeht, durch keinerlei Quellen belegen. Außerdem erschien Mueller Szabós These ohnehin entbehrlich, weil es eine Binsenweisheit ist, daß Menschen beim Argumentieren allenthalben unbewußt Prinzipien der Logik zu beachten pflegen.¹⁰ Wie man sich leicht überzeugt, erfordert die Entwicklung der Methoden zur Lösung von oft recht komplexen mathematischen Problemen durch die Schreiber aus dem Alten Orient diese Fähigkeit auch schon in einem hohen Maße, und schließlich verdient noch Beachtung, daß den Aufgabensammlungen aus den vorgriechischen Quellen (häufig) eine systematische Ordnung zu Grunde liegt, die der Schulpraxis jener Tage entspricht. Ein Beispiel dafür bietet der Keilschrifttext *BM 85 194*, in dem die Aufgabe 21, deren Lösung voraussetzt, daß man den Durchmesser eines Kreises aus dessen Umfang zu berechnen weiß, systematisch und methodisch auf der Aufgabe 4 aus

⁸ D. H. Fowler hat darauf hingewiesen (*The mathematics of Plato's academy. A new reconstruction*, Oxford 1987, 203), daß die Entwicklung der spezifisch griechischen Mathematik erst mit bzw. nach dem Beginn des Prozesses einsetzen konnte, in dessen Verlauf die (weitgehend) mündliche Überlieferung des Wissen bei den Griechen durch eine Schriftkultur ergänzt worden ist.

⁹ A. Szabó, *Anfänge der griechischen Mathematik*, München; Wien 1969, 243-452.

¹⁰ I. Mueller, *Euclid's Elements and the axiomatic method*, *The British Journal for the Philosophy of Science*, 20 (1969), 289-309; dazu verweise ich ergänzend auf H.-J. Waschkies (wie Anm. 1), 1-28, 269-275 und 302-326.

demselben Text aufbaut, mit der eingeübt wird, wie man den Kreisdurchmesser aus dem Kreisumfang ermittelt.¹¹

Der Ordnung in den mathematischen Texten der Griechen liegt dagegen eine Betrachtungsweise zugrunde, für deren Beschreibung einige Termini von Nutzen sind, die Arnold Gehlen in die Anthropologie eingeführt hat. Er spricht von einem *Daseinswert objektiver Dinge für den Menschen*,¹² bei denen es sich auch um nur Gedachtes von der Art mathematischer Kenntnisse handeln kann, wenn sie uns in irgendeiner Form zur Bewältigung von Aufgaben aus der Alltagspraxis dienen. In diesem Sinne spiegeln die mathematischen Keilschrifttexte und Papyri die Bedürfnisse einer Ausbildungspraxis wider; aber wie Gehlen entdeckt hat, gehört es zu den grundlegenden Bedingungen für das Entstehen einer Kultur, daß der Mensch in der Lage ist, (zumindest eine Zeitlang) von dem Daseinswert gewisser Dinge abzusehen und sich allein nach deren Sosein zu richten. Damit wird den betreffenden Objekten ein *Selbstwert im Dasein* zugebilligt, und diese Einstellung zu den fraglichen Dingen ermöglicht dem Menschen ein soweit bedürfnisentlastetes Verhalten zu ihnen, daß ein solcher Objektbereich nunmehr auf seine eigenen Daseinsbedingungen hin untersucht und schließlich sogar nach Maßgabe der dabei gewonnenen Erkenntnisse behandelt werden kann. Als ein frühes und besonders wichtiges Beispiel dafür nennt Gehlen den Menschen, der seine Pflanzen auf dem Acker und seine Tiere im Stall oder auf der Weide sachgerecht pflegt; denn das Verhalten der Getreideanbauer und Viehzüchter richtet sich (fast) ausschließlich nach dem Sosein ihrer Pflanzen und Tiere, während die Tatsache, daß diese später einmal als Nahrung dienen sollen, lange eingeklammert bleibt.

Selbstwert im absoluten Sinne haben nach Gehlen dann schließlich Dinge, bei denen sich das menschliche Verhalten zu ihnen unter Aufgabe jeglichen Daseinswertes und damit jeder Tendenz, sie zur Erfüllung eigener Bedürfnisse zu nutzen, nur noch an ihrem Eigendasein orientiert. Ein Beispiel dafür

¹¹ Siehe H.-J. Waschkies, *Symmetrie als Begründungsprinzip in der vorgriechischen und griechischen Geometrie*. In K. Döring und G. Wöhrle (Herausgeber), *Antike Naturwissenschaft und ihre Rezeption*. I-II, Bamberg 1992, 155-183, dort 156-163.

¹² Zum Folgenden verweise ich auf A. Gehlen, *Urmensch und Spätkultur*. *Philosophische Ergebnisse und Aussagen*, Frankfurt a. M.; Bonn ²1964 [¹1956] 14-17.

bietet die Beschäftigung der griechischen Mathematiker mit ihrem Fachwissen, das sie im Unterschied zu den Schreibern der altorientalischen Kulturen nicht mehr nach seiner pädagogischen Vermittelbarkeit oder seiner technischen Anwendbarkeit und damit im Hinblick auf seinen Daseinswert für den Menschen anordneten und mehrten. Statt dessen suchten sie nach Strukturen und Eigenheiten dieses Wissens selber, um es danach in die Form von hierarchisch strukturierten Satzsystemen bringen zu können. Einen Reflex dieses den Wissenschaftsbetrieb bis heute prägenden Spezifikums des von den Griechen begründeten Umgangs mit Kenntnissen, denen damit ein Selbstwert im absoluten Sinne zugeordnet wird, findet man schon in Platons *Kratylos*¹³ und dann vor allem in den Schriften des Aristoteles,¹⁴ der mehrfach auf den Unterschied zwischen einem begründeten Wissen eingeht, das auf Voraussetzungen aufbaut, die eine spezifisch menschliche Sichtweise widerspiegeln, und dem Wissen schlechthin, das in eigentümlichen Prinzipien fundiert ist, die diesem Wissen seiner Natur nach zugrunde liegen.

Im Gefolge der Entdeckung von nichteuklidischen Geometrien durch J. Bolyai, C. F. Gauß und N. I. Lobatschewsky¹⁵ hat man schließlich einsehen müssen, daß mathematische Theorien keineswegs von sich aus festlegen, welche ihrer Sätze als Axiome dienen sollen. Ein Beispiel dafür bietet die Tatsache, daß man die Axiome der Verknüpfung, der Anordnung, der Kongruenz und der Stetigkeit mit D. Hilbert durch das

¹³ *Kratylos* 386d2-387d8 (Platon, *Cratyle*. Texte établi et traduit par L. Méridier, Paris 1961).

¹⁴ *Anal. post.* I 2, 71b17-72a5 (*Aristotle's Prior and Posterior Analytics*. A revised text with introduction and commentary by W. D. Ross, Oxford 1965 [¹1949]), sowie *Phys.* I 1, 184a1-b14 und 5, 188b26-189a10 (*Aristotle's Physics*. A revised text with introduction and commentary by W. D. Ross, Oxford 1966 [¹1936]), und *Metaph.* V 1, 1012b34-1013a4 mit 1013a14-19 sowie VII 3, 1029b3-12 (*Aristotle's Metaphysics*. A revised text with introduction and commentary by W. D. Ross. I-II, Oxford 1966 [¹1924]).

¹⁵ Siehe F. Engel und P. Stäckel, *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss*. Eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie, Leipzig 1895, sowie R. Bonola, *Non-Euclidean Geometry*. A critical and historical study of its development. With a supplement containing The science of absolute space by John Bolyai and The theory of parallels by Nicholas Lobachevski, New York 1955. [Die italienische Erstausgabe erschien 1906.]

Parallelenaxiom: Sei a eine beliebige Gerade und A ein Punkt, der nicht auf a liegt, dann gibt es höchstens eine Gerade durch A , die a nicht schneidet

zu einem vollständigen Axiomensystem der ebenen Geometrie aus den *Elementen* ergänzen kann.¹⁶ Euklids

Postulat I.5: "Wenn eine Gerade zwei andere Geraden schneidet [und] bewirkt, daß die [beiden] Innenwinkel, die auf derselben Seite der [zuerst genannten Geraden] liegen, kleiner als zwei Rechte sind, [fordern wir], daß sich die beiden [andern] Geraden auf der Seite, auf der die beiden Innenwinkel liegen, die kleiner als zwei Rechte sind, schneiden, wenn man sie unbegrenzt [nach dorthin] auszieht"¹⁷

gehört dann zu den ableitbaren Sätzen; aber Hilbert hätte statt dessen eben-
sogut Euklids Postulat I.5 unter die Axiome der ebenen Geometrie aufnehmen können. Dann wäre sein oben zitiertes Parallelenaxiom allerdings nur noch ein ableitbarer Satz, und damit dürfte auch schon klar sein, daß es letztlich von dem persönlichen 'Geschmack' des einzelnen Mathematikers abhängt, welchen Satz der euklidischen Geometrie er als Parallelenpostulat auszeichnet.¹⁸

¹⁶ D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, ⁹Stuttgart 1962 [¹1899], 28.

¹⁷ Im allgemeinen zitiere ich die *Elemente* nach der folgenden Ausgabe: Euklid, *Elementa*. Post I. L. Heiberg edidit E. S. Stamatis. I: Libri I-IV cum appendicibus (1969); II: Libri V-IX cum appendice (1970); III: Liber X cum appendice (1972); IV: Libri XI-XIII cum appendicibus (1973); V.1: [J. L. Heibergs] Prolegomena critica, libri XIV-XV, scholia in libros I-V (1977); V.2: Scholia in libros VI-XIII cum appendicibus (1977). Leipzig. [Heibergs durch eine lateinische Übersetzung ergänzte Ausgabe erschien 1883-1888]. Abweichend davon folge ich beim Zitieren der *Postulate* und *Allgemeinen Vorstellungen* aus dem I. Buch der *Elemente* jedoch der Zählung in der mittelalterlichen Übersetzung Euklids, The mediaeval Latin translation of Euclid's *Elements* made directly from the Greek. Introduction, edition and critical apparatus by H. L. L. Busard, Stuttgart 1987. Dazu sei ferner angemerkt, daß die Definitionen, Postulate und Allgemeinen Vorstellungen aus den *Elementen* weder in den griechischen noch in den lateinischen Euklidhandschriften numeriert sind.

¹⁸ Dazu verweise ich ergänzend auf T. L. Heath, *The thirteen books of Euclid's Elements*. I-III. Translated from the text of Heiberg with introduction and commentary by T. L. Heath, New York 1956 [¹1908; ²1926], I 220.

Ich schicke meinen nachstehenden Ausführungen zu der Frage nach der wissenschaftstheoretischen Deutung der Mathematik in der Antike noch eine Anmerkung zur Terminologie voraus. Wie man schon oft bemerkt hat, waren die unbewiesenen (bzw. die für unbeweisbar gehaltenen) Prämissen der von den Griechen zusammengestellten, durch logisch-deduktive Beweise strukturierten Satzsysteme im allgemeinen keine Axiome im Sinne der Wissenschaftstheorie von heute. Aus diesem Grunde haben sich Autoren wie W. D. Ross, J. Hintikka, M. T. Ferejohn, A. Gómez-Lobo und I. Mueller dafür entschieden, die unbewiesenen Sätze, in denen die Griechen ihre mathematischen Theorien zu fundieren versuchten, nicht Axiome, sondern *Ausgangspunkte* (bzw. starting points) zu nennen.¹⁹ Im gleichen Sinne werde ich mit K. v. Fritz von den *Prinzipien* der griechischen Mathematik sprechen;²⁰ denn dieser Terminus läßt gleichfalls offen, ob es sich bei den fraglichen Sätzen um Axiome im Sinne der Wissenschaftstheorie von heute handelt, und außerdem entspricht er dem aristotelischen Terminus ἀρχή weit besser als Ausgangspunkt (oder starting point).

Die Basis aller wissenschaftsgeschichtlichen Arbeiten über die Prinzipien der griechischen Mathematik bilden seit jeher die Schriften von Platon, Aristoteles, Euklid und Proklos. Soweit ich sehe, hat man in diesem Zusammenhang jedoch nie hinlänglich beachtet, daß es sich dabei um Quellen von recht unterschiedlicher Art handelt. Die *Elemente* des Euklid sind ein Stück mathematischer Praxis, die in aller Deutlichkeit zeigt, daß die Mathematiker

¹⁹ In diesem Sinne sprechen M. T. Ferejohn, Definition and the two stages of Aristotelian demonstration, *Review of Metaphysics* 36 (1982), 375-395, sowie The origins of Aristotelian science, New Haven; London 1991, 5-6, A. Gómez-Lobo, Aristotle's hypotheses and the Euclidean postulates, *Review of Metaphysics* 30 (1977) 430-439, J. Hintikka, On the ingredients of an Aristotelian science, *Nous* 6 (1972) 55-69, und I. Mueller, On the notion of a mathematical starting point in Plato, Aristotle, and Euclid, In A. C. Bowen (Herausgeber), *Science and philosophy in classical Greece*, New York; London 1991, 59-97, von Ausgangspunkten (bzw. starting points) der mathematischen Theorien, die uns aus der griechischen Antike überliefert sind; dazu verweise ich ergänzend auf W. D. Ross, *Aristotle's Prior and Posterior Analytics* (wie Anm. 14), 56, und *Aristotle's Metaphysics* (wie Anm. 14), I 262.

²⁰ K. v. Fritz, Die APXAΙ in der griechischen Mathematik, *Archiv für Begriffsgeschichte*, 1 (1955), 13-103, 13.

jener Tage bemüht waren, ihre Theorien aus Prinzipien abzuleiten.²¹ Dieses Werk wird im allgemeinen mit einem Hinweis auf das sogenannte *Geometerverzeichnis* des Proklos²² auf die Zeit um 300 v. Chr. datiert; aber wie I. Schneider entdeckt hat, gibt es Indizien dafür, daß Archimedes noch nicht mit der überlieferten Version des X. und XII. Buchs der *Elemente* vertraut war, und daraus folgerte er weiter, daß Euklid später gelebt und geschrieben haben könnte als bisher angenommen.²³ Außerdem war von W. R. Knorr bereits kurz zuvor gezeigt worden,²⁴ daß sich Archimedes bei der Ausarbeitung seiner Beweise nicht auf die allgemeine Proportionentheorie aus dem V. Buch der *Elemente* gestützt hat, sondern auf die von Aristoteles in seiner *Topik* erwähnte²⁵ und von O. Becker rekonstruierte²⁶ anthyphairitische Proportionentheorie. Nun wurde bis vor kurzem angenommen, daß diese Lehre nicht zur Begründung der Volumensätze aus dem XII. Buch der *Elemente* dienen konnte, die Eudoxos von Knidos zugeschrieben werden,²⁷ dessen Lebenszeit auf ca. 391/90 - 338/37 v. Chr. zu datieren ist.²⁸ Man glaubte nämlich, daß sich einige der Sätze aus dem V. Buch der *Elemente*, die für eine lückenlose Begründung der Lehre aus Buch XII unentbehrlich sind, anthyphairitisch nur für eine eingeschränkte Klasse von geometrischen Gebilde beweisen lassen. Da die von Eudoxos untersuchten Flächen und Körper nicht dazu gehören, schrieb man ihm mit dem Hinweis auf ein

²¹ Darauf ist schon von Proklos expressis verbis hingewiesen worden (*In primum Euclidis elementorum librum commentarii*. Ex recognitione G. Friedlein, Hildesheim 1967 [1873], 75.27-76.4).

²² Proklos (wie Anm. 21), 64.3-68.23, dort 68.6-23.

²³ I. Schneider, Archimedes. Ingenieur, Naturwissenschaftler und Mathematiker, Darmstadt 1979, 47-48 und 61-62.

²⁴ W. R. Knorr, Archimedes and the pre-Euclidean proportion theory, *Archives Internationales d' Histoire des Sciences*, 28 (1978), 183-244.

²⁵ *Topica* VIII 3, 158b29-35 (Aristoteles, *Organon*. I [Categoriae, Hermeneutica, Analytica priora] - II [Analytica posteriora, Topica]. Editio T. Waitz, 1844-1846).

²⁶ O. Becker, Eudoxos-Studie I: Eine voreudoxische Proportionenlehre und ihre Spuren bei Aristoteles und Euklid, *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik*, Abt. B: Studien, 2 (1933), 311-333; siehe auch H.-J. Waschkies, Von Eudoxos zu Aristoteles. Das Fortwirken der Eudoxischen Proportionentheorie in der Aristotelischen Lehre vom Kontinuum, Amsterdam 1977, 77-100.

²⁷ O. Becker (wie Anm. 26), 321-325; siehe auch H.-J. Waschkies (wie Anm. 26), 95-151.

²⁸ Siehe H.-J. Waschkies (wie Anm. 26), 34-58.

Scholion von zweifelhaftem Überlieferungswert²⁹ auch noch die allgemeine Proportionentheorie aus dem V. Buch der *Elemente* zu; aber inzwischen hat E. M. Larsen nachgewiesen,³⁰ daß sich alle Sätze aus Euklids V. Buch in voller Allgemeinheit anthyphairatisch begründen lassen, und das hat für die Chronologie der griechischen Mathematik wichtige Konsequenzen. Zusammen mit I. Schneiders Zweifel an der üblichen Datierung von Euklid führt das nämlich zu der Vermutung, daß die allgemeine Proportionentheorie aus dem V. Buch der *Elemente* von Euklid selber stammt, während die anthyphairische Proportionentheorie nach B. L. v. d. Waerden auf Theaetet zurückgehen dürfte,³¹ der nach E. Sachs von ca. 414/3 - 369 v. Chr. lebte,³² während er nach H. Thesleff schon im Jahre 390 v. Chr. gefallen ist.³³

Die *Zweite Analytik* des Aristoteles, die in dieser Hinsicht durch viele Textstellen aus dem *Corpus Aristotelicum* ergänzt wird,³⁴ enthält dagegen eine Wissenschaftstheorie, die zwar ganz offensichtlich von einer mathematischen Praxis beeinflusst ist; doch diese Praxis dürfte wenigstens 50 Jahre älter als Euklids *Elemente* sein. Noch stärker sollte aber jeder, der an Hand der Ausführungen des Aristoteles einen Einblick in die Mathematik der Griechen aus der Zeit um 350 v. Chr. zu gewinnen versucht, einem anderen Aspekt Beachtung schenken. Bis auf den heutigen Tag beschreiben Wissenschaftstheoretiker nicht, wie Wissenschaften betrieben werden. Statt dessen skizzieren sie Programme, die festsetzen, wie Wissenschaft betrieben werden sollte. Diese Programme haben die Fachwissenschaftler zumeist ignoriert, und selbst dann, wenn sie von ihnen zur Kenntnis genommen wurden, waren die Prakti-

²⁹ *Elementa* (wie Anm. 17), V.1, Scholion V.1.

³⁰ M. E. Larsen, On the possibility of a pre-Euclidean theory of proportions, *Centaureus* 27 (1984), 1-25; dazu verweise ich ergänzend auf A. Thorup, A pre-Euclidean theory of proportions, *Archive for History of Exact Sciences*, 45 (1992), 1-16.

³¹ B. L. v. d. Waerden, Die Arithmetik der Pythagoreer. I-II, *Mathematische Annalen* 120 (1947-1949), 127-153 und 676-700, dort 687-695.

³² E. Sachs, *De Theaeteto Atheniensi mathematico*, Berlin (Dissertation) 1914, 18-40.

³³ H. Thesleff, *Platonic chronology*, *Phronesis* 34 (1989), 1-26, dort 18.

³⁴ Eine (keineswegs vollständige) kommentierte Sammlung von mathematisch interessanten Stellen aus dem *Corpus Aristotelicum* findet man bei J. L. Heiberg, *Mathematisches zu Aristoteles, Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften* 18 (1904), 3-49, sowie bei T. L. Heath, *Mathematics in Aristotle*, Oxford 1970 [1949].

ker des Wissenschaftsbetriebs nur selten geneigt, ihre Lehren nach Maßgabe jener Programme zu revidieren.³⁵ Aus diesem Grunde muß man damit rechnen, daß die Wissenschaftstheorie des Aristoteles Details enthält, zu denen es in der griechischen Mathematik niemals ein Gegenstück gegeben hat. Auf dieses Problem ist auch schon von W. Kullmann mit der Frage hingewiesen worden, ob man aus der Tatsache, daß die mathematischen Beispiele aus der *Zweiten Analytik* häufig nicht so recht zu der Wissenschaftstheorie des Aristoteles passen, vielleicht schließen sollte, daß diese Lehre eher mit einem Blick auf die Erfordernisse (und keineswegs durchgängig mit einem Blick auf die Praxis) der Mathematik von damals erstellt worden ist.³⁶

Bei Platon sollte dagegen beachtet werden, daß seine Dialoge weder Mathematikbücher noch wissenschaftstheoretische Schriften sind. In seinen Werken, die zur Literatur im engeren Sinne gehören,³⁷ findet man zwar immer wieder mathematische Beispiele, doch dabei handelt es sich häufig nur um mit dichterischer Freiheit formulierte Anspielungen,³⁸ die oft so rätselhaft sind, daß sie seit der Antike das Erscheinen einer nicht minder rätselhaften

³⁵ W. D. Ross nimmt in seinem Kommentar zu den *Analytiken* des Aristoteles an (wie Anm. 14), 56, daß Euklid, der seine *Elemente* sicher erst nach dem Tod des Aristoteles zusammengestellt hat, unter dem Einfluß von dessen erkenntnistheoretischen Schriften stand, doch das ist eine Interpretationsmaxime, die ich im scharfen Gegensatz zu Ross keineswegs für wahrscheinlich, sondern für höchst fragwürdig halte.

³⁶ W. Kullmann, Die Funktion der mathematischen Beispiele in Aristoteles' *Analytica posteriora*. In E. Berti (Herausgeber): *Aristotle on science. The 'Posterior Analytics'*. *Proceedings of the eighth Symposium Aristotelicum held in Padua from September 7 to 15, 1978*, Padua 1981, 245-270, dort 246-248; siehe auch I. Mueller (wie Anm. 10), 293.

³⁷ Dazu verweise ich ergänzend auf H.-J. Waschkies, Kosmologische Spekulationen bei Platon und Aristoteles als Reflex der exakten Wissenschaften ihrer Zeit. In K. Döring und G. Wöhrle (Herausgeber), *Antike Naturwissenschaft und ihre Rezeption*, III, Bamberg 1993, 31-60, dort 33-34.

³⁸ K. Reidemeister hat im Rahmen seiner kritischen Bewertung der Quellen, denen man etwas über die Mathematik der Griechen im 5. und 4. vordr. Jh. entnehmen kann (Das exakte Denken der Griechen. Beiträge zur Deutung von Euklid, Plato, Aristoteles, Darmstadt 1972 [1949], 16), auch schon darauf hingewiesen, daß Platons Schriften "nicht lehrhafte Abhandlungen, sondern gedichtete Dialoge [sind], die nie ganz den schwebenden Charakter des Gedichteten verlieren".

Kommentarflut induziert haben.³⁹ Dazu kommt, daß Platon die Termini der Mathematiker mitunter durch von ihm selbst geprägte Begriffe ersetzt hat, die seiner eigenen philosophischen Lehre angepaßt sind und daher den mathematisch relevanten Sachverhalt, auf den sie anspielen, extrem verfremdet wiedergeben können. Das wichtigste Beispiel dafür bietet sein Gebrauch des Wortes *ὑπόθεσις* in der unter dem Namen *Liniengleichnis* bekannten Passage aus der *Politeia*⁴⁰ zur Bezeichnung der mathematischen Prinzipien, die bei Aristoteles ebenso wie in einigen Handschriften der *Elemente*⁴¹ *ἄρα*⁴² heißen. Platon spielt an der fraglichen Stelle⁴³ zum einen auf Euklids Definitionenpaar VII.6-7 an, das festlegt, wann eine Zahl gerade bzw. ungerade zu nennen ist, und zum andern verweist er auf die Definitionenfolge I. 8-22 aus den *Elementen*, in der zunächst der Begriff des ebenen Winkels mit seinen

39 Die *Expositio rerum mathematicarum ad legendum Platonem utilium* des Theon von Smyrna (Recensuit E. Hiller, Leipzig 1878), dessen Wirken als Astronom auf die Jahre 127-132 n. Chr. datiert werden kann (siehe O. Pedersen, *A survey of the Almagest*, Odense 1974, 13), dient ausschließlich der Erklärung von mathematisch interessanten Stellen aus dem *Corpus Platonium*, und der *Platonikos* des Eratosthenes dürfte zu demselben Zweck geschrieben worden sein (dazu verweise ich auf die in diesem Sammelband abgedruckten 'Anmerkungen zur Musiktheorie des Eratosthenes' von K. Geus).

40 *Politeia* VI, 509c1-511e6 (Platon, *La république*, I-III. Texte établi et traduit par E. Chambry avec introduction d' A. Diès, Paris 1967-1970 [1932-1934]).

41 Wie ich später begründen werde, hat Euklid die Listen mit den Prinzipien, die den mathematischen Teiltheorien aus seinen *Elementen* voranstehen, noch nicht mit Titeln wie *ἄρα*, *αἰτήματα* oder *καὶναὶ ἔννοια* versehen. Trotzdem werde ich diese unbewiesenen Sätze aus den *Elementen* wie üblich als Definitionen, Postulate und Allgemeine Vorstellungen bezeichnen, doch wie bereits gesagt, soll damit nicht unterstellt sein, daß sie von Euklid auch schon mit diesen Namen belegt worden sind.

42 In der *Zweiten Analytik* ergänzt Aristoteles einen Hinweis auf die Art, in der man damals Definitionen zu formulieren pflegte (*κατὰ τοὺς νῦν τρόπους τῶν ὁρῶν* II 7, 92b19) durch ein partielles Zitat der Definition I.15 aus den *Elementen*, die den Kreis beschreibt. Dazu verweise ich ergänzend auf *Topica* VIII 3, 158a31-159a2, wozu noch angemerkt sei, daß Aristoteles in diesem Kapitel zur Bezeichnung der fraglichen Prinzipien sowohl den Terminus *ἄρα* (158a33, b8 und b17) als auch den anscheinend von ihm selber geprägten und vor allem im Kontext seiner eigenen Lehre benutzten Ausdruck *ὁρισμός* (158b4, b25, b29, b30, b32, b34, b36 und b39) verwendet. Diesen Terminus übersetze ich im folgenden durchgängig mit den Worten 'kanonische Definition'; denn wenn Aristoteles von einem *ὁρισμός* spricht, meint er stets eine verbindlich festgelegte Definition, die zu einer als bekannt vorausgesetzten Lehre gehört (siehe H. Schmitz, *Die Ideenlehre des Aristoteles*, I [in zwei Teilen] - II, Bonn 1985, I.1 60).

43 *Politeia* 510c2-7.

drei Unterarten des rechten, des spitzen und des stumpfen Winkels erklärt wird, bevor Euklid dann schließlich noch die ebenen Figuren beschreibt, zu denen insbesondere das im *Liniengleichnis* etwas später expressis verbis angeführte Quadrat gehört.⁴⁴ Diese Prinzipien der Mathematiker, in denen der Beweis für die Inkommensurabilität der Diagonalen des Quadrats mit seiner Seite fundiert ist,⁴⁵ auf den Aristoteles immer wieder mit zum Teil extrem elliptischen Formulierungen als ein Musterbeispiel für das mathematische Denken angespielt hat,⁴⁶ nennt Platon im *Liniengleichnis* *ὑποθέσεις*, um sie auf diese Weise plakativ gegen das von ihm dort als *ἀνυπόθετον* bezeichnete oberste Prinzip seiner philosophischen Lehre abzusetzen, bei dem es sich genauer um die Idee des Guten handelt. Dabei ist ferner zu beachten, daß der Terminus *ἀνυπόθετον* bei Platon nur im *Liniengleichnis* vorkommt,⁴⁷ und damit dürfte auch schon klar sein, daß er mit seiner Benennung gewisser von Aristoteles als *ἄρα* bezeichneter mathematischer Prinzipien⁴⁸ als *ὑποθέσεις* exemplarisch sagen wollte, daß die Prinzipien aller Fachwissenschaften im

44 *Politeia* 510d4-511a2.

45 Dazu verweise ich ergänzend auf H.-J. Waschkies (wie Anm. 1), 318-322.

46 Die Liste der Belege für dieses mathematische Lieblingsbeispiel des Aristoteles von J. L. Heiberg (wie Anm. 34), 24, ist inzwischen von S. Maracchia ergänzt worden, der 28 dafür einschlägige Stellen aus dem *Corpus Aristotelicum* anführt (Aristoteles e l' incommensurabilità, *Archive for History of Exact Sciences*, 21 [1980], 201-228).

47 Das Wort *ἀνυπόθετον* ist außerdem in einer Passage aus der *Metaphysik* (IV 3, 1005b14) belegbar, in der Aristoteles die erkenntnistheoretischen Betrachtungen aus dem *Liniengleichnis* dadurch fortführt (siehe W. D. Ross [wie Anm. 14], I, 263), daß er die Idee des Guten durch den dort als das *ἀνυπόθετον* bezeichneten und zum obersten Prinzip aller Wissenschaften erklärten Satz vom Widerspruch ersetzt (1005b19-23; dazu verweise ich ergänzend auf die nachfolgende Anm. 217). Außerdem findet man es bei dem von Platon (und Aristoteles) abhängigen Proklos [wie Anm. 21], 11.9, 31.13, 32.15-16 und 75.9, der im Kontext der drei zuerst genannten Stellen das *Liniengleichnis* aus der *Politeia* kommentiert, auf das er auch in den Zeilen 75.7-10 anspielt, und schließlich läßt es sich auch noch in einem Anhang zu den Definitionen aus der *Geometria* des Hero Alexandrinus belegen (*Opera*, IV. Edidit J. L. Heiberg, Stuttgart 1976, 1912, 108.10-160.7, dort 126.18-128.5), der nach Ansicht des Herausgebers J. L. Heiberg ein Exzerpt aus dem *Euklidkommentar* des Proklos (bzw. aus einer daraus exzerpierten Sammlung von Scholien) ist (IV), das ein Byzantiner im XI. Jahrhundert an die *Definitiones* aus Herons *Geometria* angefügt hat.

48 Dazu sei noch ergänzend angemerkt, daß Aristoteles im Kontext eines Zitats der auch im *Liniengleichnis* erwähnten Definition I.12 aus den *Elementen*, die festlegt, was unter einem spitzen Winkel zu verstehen ist (siehe Anm. 43), das Verb *ὀρίζεω* gebraucht (*Metaph.* VII 10, 1035b6-8).

Vergleich mit dem obersten Prinzip seiner eigenen Ideenlehre unbegründete Annahmen sind, die erst noch in jenem ἀνπόθετον zu fundieren wären.⁴⁹ Damit ist jede Rekonstruktion der frühgriechischen Mathematik, in die wie in A. Szabós Ausführungen über die Anfänge der griechischen Mathematik grundlegend eingeht, daß die Mathematiker des frühen 4. Jhs. v. Chr. ihre Definitionen (oder gar alle Prinzipien ihrer Wissenschaft) als ὑποθέσεις bezeichnet haben,⁵⁰ aber auch schon als verfehlt erwiesen.

Noch größer als im Fall des *Corpus Platonium* sind dann schließlich die Schwierigkeiten für jeden, der versucht, die Frühgeschichte der griechischen Mathematik an Hand von Stellen aus dem *Kommentar* des Proklos zum *Ersten Buch der Elemente des Euklid* zu rekonstruieren, der erst im 5. Jh. n. Chr. geschrieben worden ist. Proklos bemüht sich im Rahmen seiner Ausführungen nämlich nicht nur, Euklids Praxis mit der Wissenschaftstheorie aus der *Zweiten Analytik* (sowie Lehren von Geminus und andern spätantiken Autoren) in Einklang zu bringen. Als dezidiert Neuplatoniker neigt er außerdem dazu, platonisches Gedankengut mit der Wissenschaftstheorie des Aristoteles zu vermengen, die er dabei nicht selten mit Hilfe von spezifisch platonischen Termini referiert.⁵¹ Ein Beispiel dafür ist, daß Proklos die Definitionen des Aristoteles samt den Begriffsbestimmungen aus Euklids *Elementen* im Anschluß an das *Liniengleichnis* aus der *Politeia* als ὑποθέσεις bezeichnet;⁵² aber andererseits findet man bei Proklos auch wissenschaftstheoretische Einsichten, die weiterführen als die Überlegungen der von ihm kommentierten Autoren.

49 Siehe H.-J. Waschkies (wie Anm. 1), 318-326.

50 Siehe A. Szabó (wie Anm. 9), 243-452, dort insbesondere 310-328 und 341-346.

51 Proklos schreibt am Anfang des zweiten Teils der wissenschaftstheoretischen Ausführungen, die seinen *Euklidkommentar* einleiten, selber (wie Anm. 21), 48.1-5, "er habe im voranstehenden das Allgemeine und jede mathematische Wissenschaft Betreffende mit Platon als Weggenossen dargestellt und dabei von anderen [Autoren] an Gedanken aufgegriffen, was ihm für [seine] Abhandlung [passend schien]".

52 Passagen, die als typische Beispiele für das oben skizzierte Vorgehen von Proklos dienen können, sind die Zeilen 75.5-77.6 und 178.1-8 aus seinem *Euklidkommentar* (wie Anm. 21). Dabei verdient Beachtung, daß Proklos die Definitionen aus dem I. Buch der *Elemente* zwar zumeist ὑποθέσεις nennt; aber es gibt auch Stellen, an denen er sie als ὅροι bezeichnet (81.26 und 94.1).

Die wichtigste Quelle, der wir etwas über die Struktur der mathematischen Theorien der Griechen entnehmen können, sind Euklids *Elemente*, und daher beginne ich meine Untersuchung über die ΑΡΧΑΙ der griechischen Mathematiker mit einer Analyse der Theorien aus diesem Sammelwerk. In allen mir bekannten Arbeiten über die Prinzipien der griechischen Mathematik wird vorausgesetzt, daß Euklid dem I. Buch der *Elemente* 23 von ihm ὅροι genannte Sätze vorangestellt hat, auf die dann zunächst fünf von ihm als αἰτήματα bezeichnete Sätze und schließlich noch (höchstens) 10 (aber wenigstens 3) von ihm καὶ ἐννοεῖαι genannte Sätze folgen.⁵³ Einen wichtigen Hinweis auf die Feinstruktur der *Elemente* bietet außerdem die Tatsache, daß den Büchern II, III, IV, V, VI sowie den arithmetischen Büchern VII-IX, Buch X und dann weiter den (im wesentlichen stereometrischen) Büchern XI-XIII jeweils neue, in den modernen Euklidausgaben gleichfalls mit dem Titel ὅροι überschriebene Definitionenfolgen voranstehen (wozu noch angemerkt sei, daß in den Text des X. Buchs weitere Listen mit Definitionen integriert sind). Auch den Vorträgen, auf die dieser Aufsatz zurückgeht,⁵⁴ lag die Prämisse zugrunde, daß zu den Listen mit den Prinzipien aus Euklids *Elementen* die eben genannten Titel gehören; aber W. R. Knorrs nachstehend referierte textkritische Ausführungen zu J. L. Heibergs seit ihrem Erscheinen in den Jahren 1883-1888 kanonischer Ausgabe der *Elemente*⁵⁵ haben mich

53 Die mittelalterlichen Übersetzungen der *Elemente* aus dem Griechischen und Arabischen ins Lateinische enthalten eine Liste von 10 ersten Sätzen dieser Art (Euklid, The mediaeval Latin translation of Euclid's *Elements* made directly from the Greek [wie Anm. 17], 28, und Euklid, The Latin translation of the Arabic version of Euclid's *Elements* commonly ascribed to Gerard of Cremona. Introduction, edition and critical apparatus by H. L. L. Busard. Leiden 1984, 3), während Heron von Alexandria nach einer Notiz aus dem *Kommentar* des Proklos zum *ersten Buch der Elemente* nur die *ersten drei dieser Prinzipien für erforderlich hielt* (wie Anm. 21), 196.15-17.

54 Bei dem Referat vom 6. Treffen des AKAN handelte es sich um die gekürzte Version eines Vortrags, den ich zuerst am 18. 08. 1992 während des *International Symposium on the early Greek mathematics* in Athen sowie am 17. 12. 1993 im Rahmen eines Kolloquiums des Berliner *Forschungsschwerpunkts Wissenschaftsgeschichte und Wissenschaftstheorie der Fördergesellschaft Wissenschaftliche Neuvorhaben* und schließlich am 21. 06. 1994 im *Mathematischen Colloquium des Fachbereichs Mathematik der Universität Bremen* gehalten habe.

55 Siehe Anm. 17.

inzwischen überzeugt, daß die fraglichen Titel nacheuklidisch sind.⁵⁶ Dazu schicke ich vorab einige Bemerkungen zu Heibergs Text voraus.

Theon von Alexandria teilt in seinem um 400 n. Chr. abgefaßten Kommentar zum *Almagest* mit, daß er die *Elemente* des Euklid ediert hat, wozu er noch ergänzend anmerkt, daß der Satz VI.33 von ihm dabei um einen Zusatz angereichert worden ist.⁵⁷ Dem entspricht, daß in den meisten griechischen Handschriften der *Elemente* auf den Titel die Worte ἐκ τῆς θεώσεως ἐκδόσεως bzw. ἀπὸ συνουσιῶν τοῦ θεώσεως folgen,⁵⁸ doch 1814 entdeckte F. Peyrard, daß der im 10. Jh. n. Chr. geschriebene (inzwischen ihm zu Ehren mit dem Sigel *P* bezeichnete) *Codex Vaticanus graecus 190* einen Euklidtext enthält, in dem nicht nur der eben angeführte Zusatz zu dem Titel, sondern auch Theons Anhang zum Satz VI.33 fehlt. Damit schien die Quelle gefunden, die Euklids Text am verlässlichsten bewahrt hat,⁵⁹ und ganz in diesem Sinne ist J. L. Heibergs Edition der *Elemente* im wesentlichen ein an Hand der theonischen Handschriften von typischen Abschreibfehlern befreiter Abdruck des Textes aus dem Kodex *P*.⁶⁰ Gegen eine Überbewertung dieser Handschrift waren allerdings schon 1881 (und damit noch vor dem Erscheinen von J. L. Heibergs Ausgabe der *Elemente*) Bedenken angemeldet worden. M. Klamroth hatte nämlich festgestellt,⁶¹ daß den Übersetzungen der

⁵⁶ W. R. Knorr, Thoughts on Heiberg's Euclid: Some old conjectures and some new ones, Vortrag vom 05. 08. 1994 während des Zeuthen-Heiberg Symposiums in Magleås (Dänemark).

⁵⁷ *Commentaires de Pappus et de Théon d'Alexandrie sur l'Almageste*. Texte établi et annoté par A. Rome. I: Pappos von Alexandria: *Commentaire sur les livres 5 et 6 de l'Almageste*. II-III: Theon von Alexandria: *Commentaire sur les livres 1-4 de l'Almageste*, Rom 1931, 1936 und 1943, II 492.

⁵⁸ Siehe T. L. Heath (wie Anm. 18), I 46.

⁵⁹ F. Peyrard erkannte zwar die Bedeutung von *P* für die Wiedergewinnung eines möglichst authentischen Textes; aber seine Ausgabe der *Elemente* in den *Oeuvres d'Euclide*, en Latin et grec et en Français d'après un manuscrit très-ancien, qui était resté inconnu jusqu'à nos jours, Paris 1814-1818, folgt noch weitgehend dem theonischen Text und nennt die davon abweichenden Lesarten aus *P* zumeist nur in einem ausgedehnten Appendix; siehe T. L. Heath (wie Anm. 18), I 103.

⁶⁰ Siehe J. L. Heiberg, *Prolegomena critica (Elementa)*, [wie Anm. 17], V.1, XXV-XXXVIII).

⁶¹ M. Klamroth, Über den arabischen Euklid, *Zeitschrift der Deutschen Morgenländischen Gesellschaft* 35 (1881), 270-326.

Elemente ins Arabische, deren früheste Version gegen Ende des 9. Jhs. entstanden ist, ein griechischer Text zugrunde lag, in dem Theons Ergänzung zu Satz VI.33 gleichfalls fehlte. Auch sonst entspricht der Wortlaut bei den Arabern verschiedentlich dem Text aus *P*, und daraus schloß Klamroth, daß uns mit den arabischen Versionen der *Elemente* ein Textzeuge erhalten ist, den man bei zukünftigen Editionen dieses Werks beachten sollte.

Diesem Rat ist unter den Euklidherausgebern bislang nur C. Thaer in seiner deutschen Übersetzung der *Elemente* (vom Buch X an) gefolgt.⁶² J. L. Heiberg hielt Klamroths Urteil über die arabischen Euklidhandschriften dagegen für verfehlt. Ihm war bekannt, daß der im 11. Jh. geschriebene, inzwischen zumeist mit dem Sigel *b* zitierte *Codex bibliothecae communis Bononiensis 18-19*, in dem ansonsten die theonische Version der *Elemente* zu finden ist, von Satz XI.36 an bis zum Ende von Buch XII einen häufig knapper formulierten Euklidtext enthält, der dort weitgehend dem der Übersetzungen ins Arabische entspricht.⁶³ Heiberg vermutete jedoch (ohne jede weitere Begründung), daß *b* der Rest einer Version der *Elemente* ist, die ein "byzantinischer Lehrer der Mathematik, der eigenmächtig den Text zurechtmachte, wie es ihm für die Unterrichtszwecke gut dünkte",⁶⁴ im 8. Jahrhundert mit nicht geringem Sachverstand erstellt hat. Später soll diese Überarbeitung der *Elemente* dann den Weg zu den Arabern gefunden haben, und somit schienen Heiberg deren Übersetzungen für die Rekonstruktion des Euklidtextes wertlos.

Nachdem schon von E. Neuenschwander betont worden war, daß die textkritischen Überlegungen von Klamroth und Thaer im Fall der stereometrischen Bücher XI-XIII näher an den Text von Euklid heranführen dürften als

⁶² Siehe Euklid, *Die Elemente*. Nach Heibergs Text aus dem Griechischen übersetzt und herausgegeben von C. Thaer. Darmstadt 1971 (¹1933-1937), dort 447, sowie C. Thaer, *Die Euklid-Überlieferung durch al-Tusi*, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik. Abt. B: Studien, 3 (1934), 116-121.

⁶³ J. L. Heiberg, *Die arabische Tradition der Elemente Euklid's*, *Zeitschrift für Mathematik und Physik. Historisch-literarische Abtheilung*: 29 (1884) 1-22 mit der Tafel III am Ende des Bandes, und *Paralipomena zu Euklid*, *Hermes* 38 (1903) 46-74, 161-201 und 321-356, dort 161-176 und 193-201; der Text und die Beweise der Sätze XI.36 - XII.18 aus *b* sind von J. L. Heiberg in *Elementa* IV (wie Anm. 17) als Appendix II abgedruckt worden.

⁶⁴ J. L. Heiberg, *Paralipomena* (wie Anm. 63), 200.

Heibergs Ausgabe,⁶⁵ ist W. R. Knorr diesem Problem nunmehr unter Einbeziehung aller Bücher der *Elemente* von neuem nachgegangen. Wie er bemerkt, fehlen in *P* neben einer Reihe von Definitionen und Korollaren zwar auch noch manche Zweitbeweise aus Theons Ausgabe, doch davon abgesehen unterscheidet sich der Text der *Elemente* aus *P* fast nur noch durch triviale Varianten von der theonischen Rezension.⁶⁶ Von dem in *b* partiell überlieferten griechischen Text, der nicht nur den arabischen Versionen entspricht, sondern auch der Gerard von Cremona zugeschriebenen lateinischen Übersetzung aus dem Arabischen und der im 12. Jahrhundert von einem Anonymus in Sizilien aus dem Griechischen angefertigten Übertragung ins Lateinische zugrunde lag,⁶⁷ auf die ich mich im folgenden beziehe, wenn von dieser alten Tradition der *Elemente* die Rede ist,⁶⁸ differiert der (von Heiberg in seiner Ausgabe der *Elemente* wiedergewonnene) gemeinsame 'Kern' des Texts aus *P* und den theonischen Handschriften dagegen immer wieder dadurch, daß dessen Redakteur Euklids Beweise zum Zwecke einer einfacheren Nachvollziehbarkeit durch größere oder auch kleinere Zusätze ergänzt hat. Als ein besonders einprägsames Beispiel dafür nennt Knorr das bereits früher als anstößig empfundene wörtliche Zitat des kompletten Satzes X.1 im Beweis der Proposition XII.2,⁶⁹ das in der auch sonst sehr viel strenger formulierten Begründung dieses Theorems in den lateinischen Übersetzungen fehlt, und auch an andern Stellen hat der Autor des gemeinsamen Kerns

⁶⁵ E. Neuenschwander, Die stereometrischen Bücher der Elemente Euklids, *Archive for History of Exact Sciences*, 14 (1974-1975), 91-125, dort 98-101.

⁶⁶ J. L. Heiberg hat übrigens selber betont (Litteraturgeschichtliche Studien über Euklid, Leipzig 1882, 180), "daß der Abstand zwischen der Recension Theons und der von Vatic. [gr.] 190 gebotenen in der That keineswegs so groß ist, wie die [älteren Euklid]ausgaben ihn erscheinen lassen".

⁶⁷ Siehe Anm. 17 und Anm. 53.

⁶⁸ Von den arabischen Übersetzungen der *Elemente* gibt es noch keine vollständige Druckausgabe. Die von R. O. Besthorn, J. L. Heiberg, G. Junge und J. Raeder besorgte, in Kopenhagen erschienene Edition des *Codex Leidensis 399,1. Euclidis elementa ex interpretatione al-Hadschschadschii cum commentariis al-Narizii*, I.1-2 (1893-1897), II.1-2 (1900-1905) und III.1-2 (1910-1932), enthält nur die Bücher I-VI samt der Definitionen VII.1-7, nach denen der Text aus dem Kodex, in den der Übersetzer den Kommentar des al-Nayrizi zu den (Büchern I-VI der) *Elemente des Euklid* integriert hat (siehe auch Anm. 202), abbricht. Ich habe bislang nur die Teile III.1-2 zur Einsicht erhalten können und danke Herrn Dr. C.-P. Haase für die Hilfe beim Überprüfen des arabischen Textes.

⁶⁹ Siehe H.-J. Waschkies (wie Anm. 26), 128-130.

von *P* und der theonischen Version versucht, mathematisch wenig geübten Lesern das Nachvollziehen der euklidischen Argumente durch Rückverweise zu erleichtern. Diese angereicherte Ausgabe der *Elemente* lag spätestens seit dem 4. Jh. vor; denn sie wird von den Kommentatoren Pappos,⁷⁰ Proklos und Simplicios zitiert;⁷¹ aber daneben gab es noch bis zum 11. Jh. einen heute (mit Ausnahme des XII. Buches sowie einiger Sätze aus Buch XI in *b*) nur an Hand der arabischen und lateinischen Übersetzungen rekonstruierbaren Text, der uns genauer zeigt als der Kodex *P*, welchen Umfang Euklids *Elemente* ursprünglich hatten.

Soweit ich sehe, hat bislang niemand beachtet, daß die textkritischen Überlegungen von Klamroth, Thaer, Neuenschwander und Knorr für die Beantwortung der Frage von Bedeutung sind, in welchem Umfang sich Euklid und seine Vorgänger beim Ausarbeiten ihrer mathematischen Satzsysteme für metatheoretische Fragen interessiert haben. Wie ich oben bereits erwähnte, gingen bislang alle Arbeiten zu diesem Themenkreis von der Prämisse aus, daß Euklid den Listen mit den von ihm nicht bewiesenen Sätzen die Titel $\rho\rho\alpha$ bzw. $\alpha\iota\tau\eta\mu\alpha\tau\alpha$ oder $\kappa\alpha\iota\alpha\iota\ \epsilon\gamma\nu\alpha\iota$ gegeben hat, doch dagegen hätte man schon auf Grund des Texts in den griechischen Handschriften Bedenken hegen sollen, die Heibergs Ausgabe der *Elemente* zugrunde liegen. Nach Heibergs Apparat bietet sich dort am Anfang der Bücher I-VII und X-XI nämlich folgendes Bild:

In den Archetypen, auf die *P* und die Rezension von Theon zurückgehen, standen den ersten Sätzen in Buch I und IV die Titel $\rho\rho\alpha$ sowie $\alpha\iota\tau\eta\mu\alpha\tau\alpha$ und $\kappa\alpha\iota\alpha\iota\ \epsilon\gamma\nu\alpha\iota$ voran. Außerdem waren dort die Definitionenfolgen, die in das X. Buch eingefügt sind, mit den Worten 'zweite (bzw. dritte) [Liste der] Definitionen' überschrieben,⁷² obwohl über den vier Begriffsbestimmungen am Anfang dieses Buches kein Titel stand. Der Titel $\rho\rho\alpha$ fehlte außerdem am Anfang der Bücher II, III, V, VII und XI, und schließlich ist noch zu beachten, daß er über den Definitionen aus dem IV. Buch zwar in *P*, aber nicht in den Handschriften der theonischen Rezension steht. Ganz abgesehen davon

⁷⁰ Der älteste dieser Autoren ist Pappos, der nach A. Rome für das Jahr 320 n. Chr. eine (partielle) Sonnenfinsternis vorausgerechnet hat (wie Anm. 57), Bd. I, X-XIII.

⁷¹ Siehe J. L. Heiberg, Die arabische Tradition der Elemente Euklid's (wie Anm. 63), 5.

⁷² $\delta\epsilon\acute{\upsilon}\tau\epsilon\rho\alpha$ bzw. $\tau\acute{\rho}\tau\alpha\iota\ \rho\rho\alpha$, *Elementa* (wie Anm. 17), Buch X, nach Satz 47 bzw. 84.

wirkt dieser Titel über der Definitionenfolge aus dem I. Buch befremdlich; denn durch die Def. I.13 aus dieser Liste wird dem Wort $\sigma\phi\alpha\varsigma$ nicht die Bedeutung 'Begriffsbestimmung', sondern 'Grenze eines geometrischen Gebildes' zugeschrieben.

Damit ist ein erstes Indiz dafür gewonnen, daß die in Heibergs Text der *Elemente* aufgenommenen Titel ursprünglich nicht über den Listen mit Euklids mathematischen Prinzipien zu finden waren. Statt dessen scheinen sie im Falle von Buch I (und der Nachträge aus Buch X) von demjenigen Redakteur zu stammen, auf den die uns durch die theonischen Handschriften und *P* überlieferte, erweiterte Version der *Elemente* zurückgeht, während die Listen mit den Begriffsbestimmungen aus den andern Büchern ihre Titel wahrscheinlich erst von byzantinischen Schreibern erhalten haben.

Eine weitere Stütze für die These, daß die fraglichen Titel durchweg nach-euklidisch sind, bietet der *Papyrus Michigan III.143*.⁷³ Bei dieser auf das 3. Jh. n. Chr. datierbaren Quelle handelt es sich leider nicht um den Rest (bzw. Anfang) einer ehemals kompletten Buchrolle mit dem Text der *Elemente*, sondern nur um den Teil eines Geschäftsbriefs, dessen leere Rückseite von einem Schreiber als Merkzettel benutzt worden ist. Er hat darauf die Definitionen I.1-10 aus den *Elementen* notiert, die er dabei (von kleinen Fehlern abgesehen) wörtlich zitiert. Diese Liste ist jedoch nicht mit dem Titel $\sigma\phi\alpha\varsigma$ versehen, und das darf als ein zweites Indiz dafür gelten, daß sie in seiner Vorlage auch noch keinen Titel trug. Dazu kommt, daß die Blöcke mit den unbewiesenen Sätzen in den lateinischen Übersetzungen der *Elemente* aus dem Griechischen und Arabischen nirgends einen Titel tragen. Dasselbe gilt für die 'zweite [bzw. dritte Liste der] Definitionen' aus dem X. Buch,⁷⁴ und

⁷³ Eine neue Edition dieses Dokuments findet man bei E. Turner, D. H. Fowler, L. Koenen und L. C. Youtie, *Euclid, Elements I, Definitions 1-10 (P. Mich. III 143)*. In N. Lewis (Herausgeber), *Papyrology*, Yale Classical Studies 28 (1985), 13-24 mit einer Tafel.

⁷⁴ Die fraglichen Definitionen folgen in der lateinischen Übersetzungen der *Elemente* aus dem Griechischen (siehe Anm. 17) wie in Heibergs Text auf die Sätze X.47 und X.84 (siehe Anm. 72), die in der lateinischen Übersetzung der *Elemente* aus dem Arabischen (siehe Anm. 53) als Satz X.44 und Satz X.82 gezählt werden. Ergänzend sei noch angemerkt, daß über den Listen mit den Definitionen aus der Übersetzung des al-Haggag ins Arabische (zumindest im Falle der Bücher IV, V, VI und VII) keine Titel stehen (siehe Anm. 68).

daraus schließe ich nun insgesamt, daß die Titel, mit denen die Listen der Prinzipien aus Euklids *Elementen* in einigen Kodizes überschrieben sind, durchweg auf nach-euklidische Redakteure zurückgehen (für deren Existenz damit ein neues Indiz gewonnen ist).

Andererseits kann es kaum einen Zweifel daran geben, daß die fraglichen Listen selber auf Euklid zurückgehen, und das impliziert zunächst, daß Buch I, II, III, IV, V, VI und Buch X, ferner die Arithmetik aus den Büchern VII-IX und schließlich noch die Stereometrie aus den Büchern XI-XIII von Euklid als mathematische Teiltheorien betrachtet wurden, denen er zur Begründung besondere Prinzipien vorangestellt hat; aber wie erst vor kurzem wieder von I. Mueller betont worden ist,⁷⁵ hat bislang noch niemand ein Ordnungsschema ausfindig gemacht, dem Euklid im I. Buch bei der Verteilung seiner Prinzipien auf drei Blöcke durchgängig gefolgt sein könnte. Andererseits suggerierten die Titel über den Prinzipien in Heibergs Ausgabe der *Elemente*, daß es für sie spätestens seit Euklids Zeit ein strenges Ordnungsschema gab. Die Folge davon war, daß man die Blöcke mit den ersten Sätzen aus dem I. Buch der *Elemente* immer wieder daraufhin analysierte, ob sie wenigsten einigermaßen zu einem durch jene Titel implizit gegebenen wissenschaftstheoretischen Programm passen. Darüber hinaus versuchte man zumeist noch, nachzuweisen, daß dieses Programm mit der aristotelischen Lehre von den Prinzipien der beweisenden Wissenschaften aus den Kapiteln 2 und 10 des I. Buchs der *Zweiten Analytik* übereinstimmt, während ich zunächst einmal untersuchen werde, auf welche Strukturen eine von den fraglichen Titeln unbeeinflusste Analyse der Listen mit den Prinzipien aus den *Elementen* führt.

Schon rein formal zerfallen die unbewiesenen Sätze, mit denen das Buch I der *Elemente* beginnt, in drei Gruppen. Den Anfang bildet ein Block von Aussagen, die eine Folge von geometrischen Objekten beschreiben, zu denen unter anderem der Punkt, die Gerade, der Kreis und schließlich auch noch Scharen von zueinander parallelen Geraden gehören. Danach kommen fünf (Neben)sätze, die grammatisch durchweg von dem ihnen vorangestellten (Haupt)satz "Es soll gefordert werden, ..." ⁷⁶ abhängen. Zu ihnen gehören

⁷⁵ I. Mueller (wie Anm. 10), 293.

⁷⁶ $\eta\tau\eta\sigma\theta\omega$.

neben drei Konstruktionspostulaten von der Art, daß man zwei Punkte stets durch eine Strecke verbinden kann, die Forderung, daß alle rechten Winkel miteinander gleich sind und schließlich noch Euklids oben bereits zitiertes Parallelenpostulat. Darauf folgt dann ein letzter Block von 10 durch ein 'und' miteinander verbundenen Sätzen, von denen der erste 'Was mit demselben gleich ist, ist auch miteinander gleich' lautet. Vom gleichen Typ sind außerdem noch sieben dieser Sätze, während der achte ein Gleichheitskriterium ist, nach dem gleich sein soll, was aufeinander paßt, und schließlich besagt der letzte dann noch, daß zwei Geraden keine Fläche umfassen.

Im folgenden will ich die These zu erhärten versuchen, daß die griechischen Mathematiker von der Zeit an, zu der Aristoteles das 10. Kapitel des I. Buchs der *Zweiten Analytik* schrieb, bis hin zu Euklid in Definitionen von der Art, wie sie am Anfang des I. Buchs der *Elemente* zusammengestellt sind, die einzigen fachspezifischen Prinzipien sahen, die man für die Begründung einer wissenschaftlichen Spezialdisziplin benötigt.

Dazu sei zunächst angemerkt, daß solche Definitionen schon früh zu den Satzsystemen der griechischen Mathematiker gehörten. O. Becker hat in seinem für die Erforschung der Vorgeschichte von Euklids *Elementen* richtungsweisenden Aufsatz über die Lehre von Geraden und Ungeraden nämlich gute Gründe dafür angegeben,⁷⁷ daß dieser kleinen Theorie, die auf den Beginn des 5. Jhs. v. Chr. datierbar ist und als das älteste Lehrstück der spezifisch griechischen Mathematik gilt, bereits eine Folge von Begriffsbestimmungen vorangestellt war, die insbesondere Euklids Definitionen VII. 6-7 umfaßte.⁷⁸ Außerdem zeigt das oben erwähnte *Liniengleichnis* aus der *Politeia*, daß einige Definitionen aus Euklids *Elementen* bereits zu Platons Zeiten zur Begründung der Mathematik dienten, und schließlich verrät ein Vergleich zwischen dem Text aus Euklids *Elementen* und der Liste der Definitionen, die ihrem I. Buch voranstellen, daß dieses Werk die zum Teil nur recht oberflächlich überarbeitete Version eines älteren Ensembles von Teiltheorien ist, denen ebenfalls schon Definitionen als Prinzipien voranstanden.

⁷⁷ O. Becker (wie Anm. 5).

⁷⁸ Dazu verweise ich ergänzend auf H.-J. Waschkies (wie Anm. 1), 29-36 und 261-301.

Paul Tannery war wohl der erste Wissenschaftshistoriker, der in neuerer Zeit bemerkte, daß Euklid versäumt hat, die Erklärung einer Reihe von mathematischen Termini wie den der Raute, des Rhomboids und des Vielseits, die in den Lehrsätzen und Beweisen aus den *Elementen* durch die Begriffe Parallelogramm und Vieleck ersetzt worden sind, zu streichen.⁷⁹ Dazu geht aus dem *Geometerverzeichnis* des Proklos hervor,⁸⁰ daß Hippokrates von Chios um 430 v. Chr.⁸¹ das erste mathematische Lehrbuch mit dem Titel 'Elemente' schrieb, dessen überarbeitete Neuauflagen von Leon, der ein wenig älter als Eudoxos von Knidos war, von Theudios aus Magnesia, der zur Generation des Eudoxos gehörte und schließlich von Euklid besorgt worden sind. Hippokrates dürfte sich demnach bereits mit einigem Erfolg bemüht haben, eine Vielzahl von Beweisketten und kleinen, logisch-deduktiv strukturierten Satzsystemen zu umfangreichen Theorien zusammenzufügen, in die nur noch wenige, möglichst elementare Sätze als unableitbare Prämissen eingingen. Diese Theorien hatten somit schon dieselbe Grundstruktur wie die Bücher aus den *Elementen* des Euklid, die uns als einziges Werk dieser Art aus der Antike überliefert sind. Schließlich sprechen die oben angeführten Gründe dafür, daß zu den Sätzen, die den Teiltheorien in den *Elementen* des Hippokrates als unbeweisbare Prinzipien (bzw. als für unbeweisbar gehaltene Prämissen) vorangestellt waren, auch Definitionen gehörten, und wie ich im folgenden näher begründen werde, setzte sich bei den Mathematikern zur Zeit des Aristoteles schließlich sogar die Ansicht durch, daß man neben den Definitionen keine fachspezifischen Prinzipien zur Begründung von mathematischen Theorien benötigt. Dabei muß allerdings offen bleiben, ob diese Neuerung schon in die *Elemente* des Leon einging oder ob sie erst von Theudios beachtet wurde, weil die Datierung dieser Autoren bislang nicht mit der nötigen Genauigkeit gelungen ist.

⁷⁹ P. Tannery, Sur l'authenticité des Axiomes d'Euclide, Bulletin des Sciences Mathématiques, Serie 2: 8 (1884), 162-175, dort 162-163.

⁸⁰ Siehe Proklos (wie Anm. 21), 66.4-68.23.

⁸¹ A. A. Björnbo hat Hippokrates von Chios auf die Zeit von ca. 470-400 v. Chr. datiert (Hippokrates, RE, 16. Halbband, Stuttgart 1913, 1780-1801, dort 1781). Wie W. Burkert bemerkt hat (Weisheit und Wissenschaft, Nürnberg 1962, 291), paßt dazu eine Notiz aus der *Meteorologie* des Aristoteles (*Meteorologicorum libri quattuor*. Recensuit F. H. Fobes, Cambridge [Mass.] 1919, I 6, 342b35-343b7), nach der eine Kometenerscheinung aus dem Jahre 427 v. Chr. ein astronomisches Lehrstück derer um Hippokrates von Chios, das demnach noch vor diesem Zeitpunkt entstanden war, als unhaltbar erwiesen hat.

Die These, daß sich die griechischen Mathematiker (von vornherein) bemüht haben, ihre Theorien in Definitionen zu fundieren, neben denen als Prinzipien nur noch theorieübergreifende Axiome zugelassen waren, ist vor kurzem auch von I. Mueller vertreten worden. Die Übereinstimmung zwischen den Ergebnissen von Muellers Überlegungen und meinen oben vorgreifend skizzierten Vorstellungen ist jedoch rein formal; denn Mueller beschreibt die Funktion, die den Definitionen in einer Wissenschaft zukommt, vom Standpunkt der Wissenschaftstheorie unserer Tage. Danach wären die Definitionen der griechischen Mathematiker nichts weiter als der sprachlichen Ökonomie dienende Erklärungen nichtprimitiver Termini, die ihrerseits nur implizit durch die Axiome der fraglichen Theorie definiert sind.⁸² Ähnlich ist auch schon von W. D. Ross behauptet worden,⁸³ daß Aristoteles in den kanonischen Definitionen, die nach der Wissenschaftstheorie aus den *Analytica posteriora* zu den fachspezifischen Prinzipien gehören, bloße Nominaldefinitionen sah, doch das trifft sicherlich nicht zu; denn Aristoteles betont im 7. Kapitel des II. Buches der *Zweiten Analytik*,⁸⁴ es sei unsinnig anzunehmen, daß die von ihm zu den Prinzipien der Beweise gerechneten kanonischen Definitionen nichts weiter als eine Erläuterung dessen sein sollen, was ein Name bedeutet. Definitionen, die für eine Wissenschaft relevant sind, müssen nach Aristoteles nämlich etwas beschreiben, was existiert. Wie er dazu erläuternd ausführt, kann man nämlich auch erklären, was unter einem Namen wie 'Ziegenhirsch'⁸⁵ verstanden werden soll, doch das ist keine kanonische Definition, die als Prinzip in einer Wissenschaft fungieren kann, weil es keine Ziegenhirsche gibt. Wissenschaften handeln nach Aristoteles nämlich grundsätzlich nicht von bloßen Phantasiegebilden, und wie ich weiter unten noch erläutern werde, liegt die Vorstellung, nach der es eine Wissenschaft von Dingen geben kann, die nur

82 I. Mueller (wie Anm. 19), 63-64; auf Muellers oben kritisierte Deutung der aristotelischen Wissenschaftstheorie gehe ich am Ende der hier vorgelegten Untersuchung noch etwas detaillierter ein.

83 W. D. Ross, *Aristotle's Physics* (wie Anm. 14), 525, Kommentar zu den Zeilen 198a17-18.

84 *Anal. post.* II 7, 92b3-11 und b26-30.

85 Der 'Ziegenhirsch' (τραγέλαφος) wird von Aristoteles häufig als Phantasiegebilde angeführt, von dem man auf Grund seiner kanonischen Darstellung in der Kunst eine feste Vorstellung hatte; siehe W. D. Ross, *Aristotle's Analytics* (wie Anm. 14), 410.

implizit durch ein logisch widerspruchsfreies Axiomensystem definiert sind, Aristoteles ebenfalls noch fern.

Mit der wissenschaftstheoretischen Lehre, nach der Definitionen beschreiben, was eine Sache ist (und keineswegs nur, was irgend ein Term bedeutet), knüpft Aristoteles wahrscheinlich an einige Ausführungen aus Platons *Meno* an,⁸⁶ auf den er gleich zu Beginn seiner *Zweiten Analytik* expressis verbis verweist.⁸⁷ Platon läßt Sokrates und Menon dort nach einer angemessenen Beschreibung dessen suchen, was Tugend ist. Das gelingt nicht, und daher schlägt Sokrates vor, sich an dem Vorgehen der Geometer zu orientieren,⁸⁸ deren Begriffsbestimmungen von Platon mithin für vorbildlich gehalten wurden. Dabei verweist er zum einen auf die Definition XI.2 aus den *Elementen*, in der die Fläche als Grenze eines Körpers beschrieben wird,⁸⁹ und zum andern spielt er im Kontext dieser Stelle (wie im *Liniengleichnis* aus der *Politeia*)⁹⁰ auf die Definitionenfolge I.13-22 aus den *Elementen* an, die eine Reihe von ebenen Figuren beschreibt.⁹¹ Beachtung verdient dabei außer-

86 *Meno* (Plato's *Meno*). Edited with introduction and commentary by R. S. Bluck, Cambridge 1961), 71b1-80d4.

87 Die einzigen Verweise des Aristoteles auf Platons *Meno* findet man nach dem *Index Aristotelicus* von H. Bonitz (Graz 1955 [¹1870]), 454b) in *Anal. priora*, II 21, 67a21 und *Anal. post.* I 1, 71a29.

88 *Meno* 75e1-76a7.

89 Wie schon von V. Karasmanis erkannt worden ist (The hypotheses of mathematics in Plato's *Republic* and his contribution to the axiomatization of geometry. In P. Nicola-copoulos (Herausgeber), *Greek studies in the philosophy and history of science*, Amsterdam 1990, 121-135, dort 128), entspricht die Definition der ebenen Figur als Grenze eines Körpers (στερεού πέρας σχῆμα [ἐστίν], *Meno* 76a6), die nach Platon in der Geometrie seiner Zeit üblich war (ἐν ταῖς γεωμετρίας, 76a2), nicht Euklids Def. I.14, nach der "eine Figur etwas von einer oder mehreren Grenzen Umfaßtes ist", sondern der Def. XI.2 (στερεοῦ δὲ πέρας ἐπιφανεία [ἐστίν]), mit der die "Fläche als Grenze eines Körpers" eingeführt wird. Der Kontext dieser Stelle bietet übrigens einen weiteren Beleg dafür, daß Platon auf Details der Mathematik seiner Tage anspielt, ohne sich an die Terminologie der Geometer zu halten; denn er bezeichnet dort gewisse krummlinig begrenzte Figuren, bei denen es sich u. a. um den Kreis handelt (siehe auch *Parménide*. Texte établi et traduit par A. Diès, Paris 1965 [¹1923], 137e2 -3), mit dem Wort στρογγυλότης (73e3-74b7), das in dieser Bedeutung nur hier nachweisbar ist und sonst die Bedeutung von Gekrümmtheit oder Krümmung hat.

90 Siehe Anm. 40.

91 *Meno* 73e3-74e10.

dem, daß die krummlinig begrenzten Figuren im *Meno* ganz ebenso wie in der Liste der Begriffsbestimmungen aus Euklids *Elementen* vor den geradlinig begrenzten angeführt werden; denn das ist ein Indiz dafür, daß die fraglichen Definitionen in der Version der voreuklidischen Elemente, die Platon vorlag, bereits in derselben Reihenfolge aufgelistet waren wie bei Euklid.

Die eben analysierte Stelle aus dem *Meno* zeigt zunächst, daß F. Solmsens Behauptung, nach der "die Mathematik zu der Zeit, als Plato [das sicher nach dem *Meno* abgefaßte *Liniengleichnis* aus der] Politeia niederschrieb,⁹² noch keine Definitionen kannte",⁹³ ebenso unzutreffend ist wie Solmsens daraus abgeleitete Vermutung, daß die spezifisch griechische Mathematik, die uns prototypisch in Euklids *Elementen* überliefert ist, ihre Entstehung richtungsweisenden Anregungen von Platon verdankt.⁹⁴ Nicht minder wichtig ist unter wissenschaftsgeschichtlichen Aspekten jedoch, daß die Definitionen, die im *Meno* noch nicht als ὅρα (oder gar ὁρισμοί) bezeichnet werden, nach Platon das Wesen⁹⁵ der betreffenden Sache beschreiben sollen, damit man aus ihnen verlässlich ableiten kann, welche Eigenschaften die fragliche Sache hat.⁹⁶ Das ist von Aristoteles übernommen worden; denn er schreibt an der nachfolgend zitierten Stelle aus *De anima*, der für die Wiedergewinnung seiner wissenschaftstheoretischen Deutung der Mathematik eine Schlüsselrolle zukommt:

"Es hat jedoch den Anschein, daß nicht allein die Kenntnis dessen, was das [betreffende Ding] ist, nützt, wenn man eine Untersuchung über die Gründe für die Eigenschaften anstellt, die den [fraglichen] Wesen eigen sind. [So nützt es] beispielsweise in

⁹² Zur Datierung der Schriften aus dem Corpus Platicum verweise ich auf H. Thesleff (wie Anm. 33), 15 und 19-20.

⁹³ F. Solmsen, *Platos Einfluß auf die Bildung der mathematischen Methode, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik. Abt. B: Studien*, I (1929-1931) 93-107, dort 103 (sowie 99-101).

⁹⁴ Damit steht F. Solmsen in einer alten Tradition, die sich bis zum *Geometerverzeichnis* des Neuplatonikers Proklos zurückverfolgen läßt (wie Anm. 21), 67.2-68.23, dessen dafür einschlägige Zeilen sicher bis auf den Aristoteleschüler Eudemos von Rhodos und nach F. Lasserre sogar bis auf Platons Vertrauten Philipp von Opus zurückgehen (De Léodamas de Thasos à Philippe d'Oponte. *Témoignages et fragments*. Edition, traduction et commentaire par F. Lasserre, Neapel 1987, 613-615).

⁹⁵ οὐσία (*Meno* 72b1).

der Mathematik [zu wissen], was das Gerade und das Gekrümmte, oder was eine Kurve und [was] eine ebene Fläche ist, um einzusehen, wie vielen Rechten die Winkel [in jedem] Dreieck gleich [sind]. Andererseits trägt [die Kenntnis] der wesentlichen Eigenschaften aber auch sehr beträchtlich zur Erkenntnis dessen bei, was das [betreffende Ding] ist. Sobald wir nämlich in der Lage sind, nach [unserem] Vorstellungsvermögen Aussagen über alle oder [doch] die meisten Eigenschaften [des betreffenden] Dinges zu machen, werden wir auch aufs beste in der Lage sein, über [dessen] Wesen zu sprechen. Den Ausgangspunkt jedes Beweises bildet nämlich [die Beschreibung dessen], was das [betreffende Ding] ist, und daher sind alle kanonischen Definitionen, die weder zu einem Erkennen von [dessen] Eigenschaften führen noch gestatten, darüber plausible Vermutungen anzustellen, offensichtlich ein Beispiel für bloße Disputierkunst und leer dahingeredet."⁹⁷

In den soeben angeführten Zeilen behauptet Aristoteles, daß der von Euklid als Theorem I.32 in die *Elemente* aufgenommene Satz von der Winkelsumme im Dreieck aus den Definitionen des Geraden (als unterschieden vom Gekrümmten), der Fläche und des Dreiecks abgeleitet werden kann. Das paßt zu seiner Wissenschaftstheorie aus dem 10. Kapitel des I. Buchs der *Zweiten Analytik*, nach der die (durch einige Existenzpostulate ergänzten) Definitionen⁹⁸ die einzigen fachspezifischen Prinzipien der einzelnen Wissenschaften sein sollen,⁹⁹ während die Praxis, nach der die Mathematiker den

⁹⁶ *Meno* 71b3-4.

⁹⁷ *De anima* I 1, 402b16-403a2 (Aristoteles, *De anima*. Edited, with introduction and commentary by W. D. Ross, Oxford 1961).

⁹⁸ Wie schon von W. Kullmann (*Wissenschaft und Methode*, Berlin 1974, 177) und A. Gómez-Lobo (wie Anm. 19), 436, mit einem Hinweis auf die zu den Ausführungen in *Anal. post.* I 2 und I 10 parallelen Erläuterungen in *Topica* VII.3 153a15 betont worden ist, läßt sich der Vorschlag von K. v. Fritz (wie Anm. 20), 40, den Terminus ὅρα in *Anal. post.* I 2 und I 10 nicht mit 'Definition', sondern mit 'Begriff' zu übersetzen, auf keinen Fall halten.

⁹⁹ *Anal. post.* I 10 (siehe auch II 17, 99a22-23); außerdem spielt Aristoteles in *Anal. post.* I 32, 88b27-29 noch einmal auf die von ihm in *Anal. post.* I 2 und I 10 angeführten fachspezifischen Prinzipien der beweisenden Wissenschaften an, die er in diesem Fall als ἀρχαὶ ἰσχυρα bezeichnet.

Winkelsummensatz in der Antike bewiesen haben, schwerlich mit der oben zitierten Passage aus *De anima* in Einklang zu bringen ist. Eine Textstelle aus der *Metaphysik* zeigt nämlich,¹⁰⁰ daß in den Beweis des Satzes I.32 aus den *Elementen*, nach dem die Summe der Winkel in jedem Dreieck zwei Rechte ausmacht, damals bereits dieselben Sätze als Prämisse eingingen wie in Euklids Beweis, und zum andern gibt es Stellen aus dem *Corpus Aristotelicum*, die erkennen lassen, daß die Definition der Kurve, die Aristoteles vorlag, dieselbe war, die wir bei Euklid finden.¹⁰¹

Im Falle des Geraden und der ebenen Fläche liegen die Verhältnisse dagegen etwas anders. In Buch VI. der *Topik* erwähnt Aristoteles,¹⁰² daß die Strecke als "Grenze einer ebenen Fläche [definiert wird], deren [eigene] Grenzen durch [ihre] Mitte verdeckt werden, [wenn man von der Mitte aus nach den Grenzen schaut]". Diese mathematisch unfruchtbare Begriffsbestimmung, die auch Platon schon erwähnt,¹⁰³ hat Euklid durch eine andere Definition ersetzt, deren Deutung seit jeher umstritten ist; aber ganz abgesehen davon wird sie in den Beweisen aus den *Elementen* ebensowenig benutzt wie Euklids nicht minder rätselhafte Beschreibung der ebenen Fläche.¹⁰⁴ Zwischen der Praxis der griechischen Mathematiker und der Behauptung des Aristoteles, nach der sich das Theorem I.32 aus den *Elementen* letztlich mit Hilfe der von ihm in *De anima* I.1 erwähnten Definitionen begründen läßt, besteht mithin eine unübersehbare Diskrepanz, doch daraus darf man nicht

¹⁰⁰ *Metaph.* IX 9, 1051a24-26; dazu verweise ich ergänzend auf den Kommentar zu dieser Stelle von W. D. Ross, *Metaphysics* (wie Anm. 14), II 270-271. Aristoteles geht im Kontext dieser Stelle außerdem auf einen Beweis für den sogenannten Satz des Thales ein (1051a27-29), der zu seiner Zeit offenbar auch schon aus den selben Sätzen wie in den *Elementen* deduziert wurde; siehe H.-J. Waschkies (wie Anm. 11), 175-183.

¹⁰¹ Auf die Def. I.2 aus den *Elementen*, nach der "eine Kurve eine breitenlose Länge ist", spielt Aristoteles unmißverständlich in der *Topik* an (VI 6, 143b11-13).

¹⁰² *Topica* VI 11, 148b26-28.

¹⁰³ *Parmenides* 137e1-5.

¹⁰⁴ Zur Deutung der Definitionen I. 4 und I.7 aus den *Elementen*, mit denen Euklid zu beschreiben versucht, was eine Gerade bzw. was eine ebene Fläche ist, verweise ich auf T. L. Heath (wie Anm. 18), I 165-169 und 171-172, sowie B. Vitrac, Euklid, *Les Éléments*, I [Buch I-IV] und II [Buch V-IX]. Introduction générale par M. Caveing (I 13-148), traduction et commentaire par B. Vitrac, Paris 1990-1994 [mehr bislang nicht erschienen], I 154-158.

voreilig schließen, daß die von Euklid beweistechnisch nirgends mehr verwendeten Prinzipien in der Antike nie zur Begründung von geometrisch interessanten Sachverhalten benutzt worden sind. Ein Beispiel dafür bieten die Definitionen I.1, I.2, I.5 und XI.1 aus den *Elementen*, die auf Eudoxos von Knidos zurückgehen dürften¹⁰⁵ und beschreiben sollen, was ein Punkt, eine Kurve, eine Fläche und ein Körper sind. Danach ist für den Punkt charakteristisch, daß er keine Teile hat,¹⁰⁶ und wie wir einigen Passagen aus dem *Corpus Aristotelicum* entnehmen können, folgerte man daraus, daß sich Kurven nicht sukzessiv aus Punkten zusammenfügen lassen.¹⁰⁷ Als Beispiel dafür zitiere ich die folgende Passage aus dem Traktat *De lineis insecabilibus*:

"[Da sich zwei Dinge entweder] wie ein Ganzes mit einem Ganzem oder wie irgendein [Teil] mit irgendeinem [Teil] oder wie ein Ganzes mit irgendeinem [Teil] berühren [und] der Punkt zum Teillosen gehört, kann er wohl mit [jedem anderen Punkt nur] wie ein Ganzes mit einem Ganzem in Kontakt treten. ... Wenn teillose [Dinge auf diese Weise] zusammen sind, nehmen sie trotz ihrer größeren Anzahl [aber nur] denselben Raum ein wie zuvor das eine. [Außerdem] hat das Teillose keinerlei Ausdehnung, und daher kann eine ausgedehnte Größe nicht aus unteilbaren [Komponenten] bestehen, woraus [insgesamt folgt], daß die Kurve nicht aus Punkten und das Zeit[intervall] nicht aus Momenten zusammengefügt [werden kann]".¹⁰⁸

Ganz analog dürfte man aus den Definitionen I.2, I.5 und XI.1 abgeleitet haben, daß sich n-dimensionale geometrische Gebilde nie durch ein sukzessives Zusammenfügen aus (n-1)-dimensionalen Komponenten erzeugen lassen [$n = 2, 3$], und damit war nicht nur gezeigt, daß Punkte und Kurven (bzw. Kurven und Flächen sowie Flächen und Körper) im Sinne der Def. V.4 nicht

¹⁰⁵ Siehe Hans-Joachim Waschkies (wie Anm. 26), 300-307.

¹⁰⁶ Def. I.1: σημείον ἔστιν, οὐ μέρος οὐθέν.

¹⁰⁷ *Phys.* VI 1, 231a29-b6, *De la génération et de la corruption*. Texte établi et traduit par Ch. Mugler, Paris 1966, I 2, 316a29-34 und *De lineis insecabilibus*. Introduzione, traduzione e commento a cura di M. Timpanaro Cardini, Milano; Varese 1970, 971a26-b26; dazu verweise ich ergänzend auf H.-J. Waschkies (wie Anm. 26), 240-250 und 338-341).

¹⁰⁸ *De lineis insecabilibus* 971a26-b4.

homogen sind und folglich auch nicht proportionentheoretisch miteinander verglichen werden dürfen, sondern auch, daß der Demokrit zugeschriebene Beweis für die Sätze XII. 7 und XII.10 vom Volumen der Pyramide und des Kegels (der die Anwendung einer inzwischen anachronistisch als Prinzip des Cavallieri bezeichneten Begründungsmethode erfordert), nicht haltbar ist.¹⁰⁹ Wie der Text aus den *Elementen* zeigt, hielt Euklid Argumente dieser Art nicht mehr für akzeptabel; denn er hat sie ersatzlos gestrichen; aber das veranlaßte ihn erstaunlicherweise ebensowenig wie im Fall der oben schon erwähnten Definitionen der Raute, des Rhomboids und des Vielseits dazu, die zugehörigen, nunmehr funktionslosen Begriffsbestimmungen in der Liste seiner Prinzipien zu tilgen. Im folgenden soll nun noch etwas genauer erläutert werden, wodurch sich die wissenschaftstheoretische Deutung der Begriffsbestimmungen, die Aristoteles in seinen Schriften vorträgt, von ihrer Interpretation in der Wissenschaftstheorie von heute unterscheidet.

In David Hilberts *Grundlagen der Geometrie*, mit denen zum ersten Mal "die seit Euklid in zahlreichen vortrefflichen Abhandlungen der mathematischen Literatur [behandelte Aufgabe gelöst wurde], ein vollständiges und möglichst einfaches System von Axiomen aufzustellen und aus denselben die wichtigsten geometrischen Sätze ... abzuleiten",¹¹⁰ bleiben die grundlegenden Objekte der Geometrie wie der Punkt und die Gerade ebenso undefiniert wie die fundamentalen Relationen, von denen hier nur das Verbunden-Sein von Punkten durch Geraden, das Sich-Schneiden von Geraden und das Kongruent-Sein von Strecken und Winkeln genannt seien. Statt dessen postuliert Hilbert, daß 20 von ihm als Axiome bezeichnete Sätze gelten sollen.¹¹¹ Dazu

¹⁰⁹ Siehe H.-J. Waschkies (wie Anm. 26), 251-393.

¹¹⁰ D. Hilbert (wie Anm. 16), 1.

¹¹¹ Wie ich bereits erwähnte, legt eine Menge von mathematischen Sätzen, die sich zu einer axiomatisch-deduktiv strukturierten Theorie anordnen lassen, nicht von sich aus fest, welche dieser Sätze den Rang von unbeweisbaren Prinzipien erhalten sollen. Dieser Sachverhalt wird zumeist im Zusammenhang mit den verschiedenen Möglichkeiten, Euklids Parallelenpostulat I.5 zu ersetzen, diskutiert. Unter wissenschaftsgeschichtlichen Aspekten ist aber auch die Begründung der (ebenen) Geometrie von M. Pasch von Interesse (Vorlesungen über neuere Geometrie. Um einen Anhang von M. Dehn über die Grundlegung der Geometrie in historischer Entwicklung erweiterte 2. Auflage, Berlin 1926 [1882]); denn Pasch führt als undefinierten Kernbegriff den Terminus 'Strecke' (und nicht wie D. Hilbert den Terminus 'Gerade') ein. Damit

gehören unter anderem ein dem Postulat I.1 von Euklid entsprechendes Axiom, nach dem es zu zwei Punkten stets eine sie verbindende Gerade gibt,¹¹² sowie das oben schon zitierte, mit dem Postulat I.5 aus den *Elementen* äquivalente Parallelenaxiom von D. Hilbert, während dessen Kongruenzaxiom III.5 eine abgeschwächte Variante von Euklids Satz I.4 ist, der besagt, daß zwei Dreiecke, bei denen paarweise zwei Seiten samt der von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel gleich sind, selber ebenfalls gleich sind. Dabei sollen D. Hilberts Axiome im Unterschied zu Euklids Prinzipien (und Sätzen) aus den geometrischen Partien der *Elemente* aber nicht festlegen, daß es sich bei den von ihnen erfaßten Objekten um so etwas Ähnliches wie die Gebilde handelt, die man als Mathematiker zum Zwecke der Heuristik auf ein Stück Papier zu zeichnen pflegt. Ein Modell für Hilberts Punkte und Geraden liegt zum Beispiel vor, wenn man die Punkte durch Paare (a,b) von reellen Zahlen und die Geraden durch spezielle Tripel (1,v,w) von reellen Zahlen repräsentiert, wobei das Liegen von (a,b) auf (1,v,w) dann darin besteht, daß die Gleichung $y = vx + w$ die Lösungen $x = a$ und $y = b$ hat.¹¹³ Zu den nicht definierten, sondern nur in der eben erläuterten Weise implizit durch Axiome eingeführten Begriffen, die ich im folgenden mit M. Pasch Kernbegriffe nenne,¹¹⁴ kommt noch eine Vielzahl von abgeleiteten Begriffen, die mit einem Rückgriff auf die Kernbegriffe (sowie weiteren, aus diesen bereits zuvor abgeleiteten Begriffen) explizit erklärt werden können. Die zugehörigen Definitionen von der Art der Def. I.15 aus den *Elementen*, die den Kreis als Gesamtheit aller Punkte in einer Ebene beschreibt, deren Verbindungslinien mit einem gewissen Punkt dieser Ebene kongruente Strecken sind, dienen dann allerdings nur noch der sprachlichen Ökonomie und sind somit für einen axiomatisch-deduktiven Aufbau der Geometrie letztlich entbehrlich.

kommt er der Praxis der *Elemente* näher als Hilbert, weil die griechischen Mathematiker im allgemeinen nicht von unendlichen Größen sprechen.

¹¹² Man beachte, daß sich D. Hilberts Axiom I.1 und Euklids Postulat I.1 zwar einerseits entsprechen; aber andererseits unterscheiden sie sich auch; denn Hilberts Axiom I.1 postuliert die Existenz der darin erwähnten Geraden, während Euklid ihre Konstruierbarkeit fordert.

¹¹³ Die Brauchbarkeit der oben angegebenen Zahlenpaare und Zahlentripel als Modelle für Punkte und Geraden ist natürlich nicht davon abhängig, daß man sie in gewohnter Weise als Anweisung zum Zeichnen von Geraden(stücken) und Punkten auf einem durch ein Koordinatenkreuz vorstrukturierten Blatt Papier auffassen kann.

¹¹⁴ M. Pasch (wie Anm. 111), 15.

Es ist ganz offensichtlich, daß die griechischen Mathematiker bereits früh versucht haben, ihren Beweisen systematisch die Form von logischen Schlüssen zu geben, die von jeder Anschauung unabhängig sind, und nach R. Baldus war es somit ganz folgerichtig, daß Hilbert dieses Loslösen von der Anschauung bei seiner Begründung der euklidischen Geometrie (im Anschluß an M. Pasch) auf die Kernbegriffe ausdehnte. "Punkte und Gerade sind jetzt lediglich Worte für irgendwelche Dinge, welche nur formallogisch die durch die Axiome ausgesprochenen Beziehungen erfüllen müssen. ... Man könnte vergleichend sagen, räumliche Anschauung sei das Gerüst, das beim Bau des axiomatischen Gebäudes benötigt und nach dessen Fertigstellung als nunmehr überflüssig abgebrochen wird. ... Bei der rein axiomatischen Behandlung der Geometrie [ist] die Unterdrückung jeder Bezugnahme auf die Anschauung, die logische Formalisierung [also], zulässig, ja, sie ist bei Untersuchungen, bei denen es allein auf die rein logischen Beziehungen ankommt, sogar notwendig; man muß sich dabei bemühen, überhaupt von jeglicher Deutung abzusehen; [denn] man gewinnt [erst] damit das, was als 'abstrakte Geometrie' bezeichnet wird."¹¹⁵

Diese Ausführungen machen exemplarisch klar, daß man nie ohne weiteres von der Wirkungsgeschichte auf die Entstehungsgeschichte einer Lehre schließen sollte; denn die Vorstellung, nach der man sich bei der Erstellung einer axiomatisch-deduktiv strukturierten mathematischen Theorie bei der Einführung der Kernbegriffe nicht an wohlbestimmten Objekten orientieren sollte, lag den griechischen Mathematikern fern. Die wichtigsten Belege dafür bieten zwei Passagen aus der *Zweiten Analytik*. Sie sind schon häufig kommentiert worden; aber soweit ich sehe, hat man dabei nie beachtet, daß sie zwei verschiedene Phasen des Prozesses widerspiegeln, in dessen Verlauf Aristoteles seine Wissenschaftstheorie ausgearbeitet hat, und daher werde ich sie nachfolgend getrennt voneinander diskutieren. Im 2. Kapitel

¹¹⁵ R. Baldus, *Nichteuklidische Geometrie. Hyperbolische Geometrie der Ebene*. Bearbeitet und ergänzt von F. Löbell, Berlin 1964, 22-23; dazu verweise ich ergänzend auf M. Pasch (wie Anm. 111), 91-92; denn wie H. Freudenthal mit einem Hinweis auf diese Stelle betont hat (Zur Geschichte der Grundlagen der Geometrie, *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 4 [1957], 105-142, dort 106-107), enthält die 1. Auflage von Paschs Vorlesungen über neuere Geometrie den ersten (wenn auch noch nicht vollständig gelungenen) Versuch, die Geometrie anschauungsfrei zu begründen.

aus dem I. Buch der *Zweiten Analytik* hat er sich noch stark an Platons Ausführungen im *Meno* orientiert; denn dort lesen wir:

"Prinzip eines [wissenschaftlichen] Beweises ist eine unvermittelte Prämisse, [wozu noch angemerkt sei, daß ich eine Prämisse] unvermittelt [nenne], wenn ihr keine andere vorangeht. [Dabei handelt es sich genauer um eine] These¹¹⁶, wenn man sie nicht beweisen kann und sie [außerdem] nicht jeder innehaben muß, der irgend etwas [Spezielles] lernen will.¹¹⁷ Von einem Axiom¹¹⁸ spreche ich [bei unvermittelten Prinzipien] dagegen, wenn es jeder kennen muß, der etwas lernen will. Es gibt nämlich einige [Prinzipien] dieser Art, [und] diesen pflegen wir vor allem diesen Namen beizulegen.

Von den Thesen bezeichne ich diejenigen, die den einen Teil von zwei Aussagen zum Inhalt haben, die zueinander im Widerspruch stehen, als Annahmen¹¹⁹. [So liegt] zum Beispiel [eine Annahme vor], wenn ich behaupte, daß irgend etwas ist oder [wenn ich behaupte, daß] irgend etwas nicht ist. Die [Thesen], denen dieses [Merkmal] fehlt, nenne ich dagegen kanonische Definition[en]¹²⁰. Die kanonische Definition ist nämlich eine These; denn der Arithmetiker legt [durch seine Definition] fest, daß die Einheit das der Quantität nach Unteilbare ist.¹²¹ Das ist [nun] aber keine Annahme; denn was eine Einheit ist und daß es eine Einheit gibt, ist keineswegs dasselbe."¹²²

¹¹⁶ θέσις (72a15).

¹¹⁷ Wie die nachfolgenden Ausführungen von Aristoteles zeigen, dient eine These immer nur der Begründung einer ganz bestimmten Wissenschaft, während der Anwendungsbereich von Axiomen mehrere (oder sogar alle) Wissenschaften übergreift.

¹¹⁸ ἀξίωμα (72a17).

¹¹⁹ ὑπόθεσις (72a20).

¹²⁰ ὁρισμός (72a21).

¹²¹ Einige Anmerkungen zu der voreuklidischen Definition der arithmetischen Einheit, auf die Aristoteles mit dem Satz τίθεται ... ὁ ἀριθμητικὸς μονάδα τὸ ἀδιαίρετον εἶναι κατὰ τὸ πᾶν ἀνσπεί (72a21-23), findet man bei H.-J. Waschkies (wie Anm. 1), 55-70.

¹²² *Anal. post.* I 2, 72a7-24.

Eine ausführliche Diskussion dieser Textstelle würde den Rahmen der hier vorgelegten Untersuchung sprengen.¹³¹ Für meine Belange ist nämlich nur von Bedeutung, daß die dort als Annahme bezeichnete Zusatzprämisse der Geometer formal ebenso wie die Annahmen aus dem 2. Kapitel des I. Buchs der *Zweiten Analytik* 'den einen Teil von zwei Aussagen zum Inhalt hat, die zueinander im Widerspruch stehen'.¹³² Dabei darf allerdings nicht übersehen werden, daß es sich bei der Annahme, von der in Platons *Meno* die Rede ist, nicht um ein mathematisches Prinzip handelt. Sie schließt nämlich keineswegs eine Lücke im Axiomensystem der frühgriechischen Geometer, sondern präzisiert die Voraussetzungen, unter denen sich eine bestimmte Konstruktion Aufgabe im Rahmen einer im übrigen anscheinend für hinlänglich begründet gehaltenen Geometrie lösen läßt, und somit ist die fragliche Annahme genauer eine sogenannte Einschränkung.¹³³

Es gibt jedoch ein anderes Indiz dafür, daß die griechischen Geometer jedenfalls vor der Zeit, zu der Platon den *Meno* schrieb, fachspezifische Prinzipien benutzt haben, die keine Definitionen waren. Wie uns Simplicios berichtet,¹³⁴ der sich dabei auf die leider nicht überlieferte Geschichte der

¹³¹ Eine in allen Details zweifelsfreie Deutung der extrem elliptisch und vage formulierten Zeilen 87a3-6 aus dem *Meno* scheint unmöglich zu sein, doch das ist für die in dieser Untersuchung diskutierten Fragen nicht von Bedeutung, weil alle mir bekannt gewordenen Interpretationen der Stelle letztlich Varianten einer Grundidee sind, die auf K. B. Mollweide zurückgeht (*Commentationes mathematico-philologicae tres*, Leipzig 1813 [von mir nicht eingesehen]). Eine Analyse der bislang vorgeschlagenen Deutungen findet man bei O. Becker, *Die Archai in der griechischen Mathematik*, *Archiv für Begriffsgeschichte*, 4 (1959), 210-226, dort 210-212, R. S. Bluck (wie Anm. 86), 441-461, R. Böker, *νεῦσις*, *RE*, Supplementband IX, Stuttgart 1962, 415-462, dort 460-462, K. Gaiser, *Platons Menon und die Akademie*, *Archiv für Geschichte der Philosophie*, 46 (1964), 241-292, dort 270-282, und A. D. Steele, *Über die Rolle von Zirkel und Lineal in der griechischen Mathematik*, *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik*, Abt. B: Studien, 3 (1934), 287-369, dort 324-328.

¹³² *Anal. post.* I 2, 72a18-20.

¹³³ *διόρισμός* Proklos (wie Anm. 21), 351.3; Erläuterungen zu diesem Terminus findet man bei R. Böker (wie Anm. 131), 426-430, siehe auch I. Mueller (wie Anm. 19), 82.

¹³⁴ Simplicios, *In Aristotelis physicorum libros commentaria*. Edidit H. Diels. *Commentaria in Aristotelem graeca* IX-X, Berlin 1882-1895, 60.22-68.33; dazu verweise ich

Mathematik des Aristoteleschülers Eudemos von Rhodos stützt, bereitete Hippokrates seine bekannten Mönchenquadraturen dadurch vor, daß er sich zunächst "ein Prinzip¹³⁵ verschaffte und als erstes von dem, was dafür nützlich war, behauptete, daß ähnliche Kreissegmente zueinander im selben Verhältnis stehen wie die Quadrate über ihren Basen. Das aber folgerte er daraus, daß Kreise zueinander dasselbe Verhältnis haben wie die Quadrate über ihren Durchmessern, [wie] Euklid im zweiten [Satz] des XII. Buchs der *Elemente* feststellte."¹³⁶

Der Beweis des soeben angeführten Theorems XII.2 erfordert die Anwendung einer allgemeinen Proportionentheorie, die auf Paare von miteinander inkommensurablen Größen von beliebiger Form angewendet werden darf. Wie ich oben bereits erwähnte, ist eine solche Lehre aber erst von Theaetet entwickelt worden. Eine Proportionentheorie von der Art, wie sie zur Begründung des Theorems XII.2 nötig ist, gab es zur Zeit des Hippokrates demnach noch gar nicht, und daher dürfte der Bericht des Eudemos, nach dem Hippokrates den fraglichen Satz, auf den man leicht durch eine Plausibilitätsbetrachtung kommen kann,¹³⁷ seinen Quadraturen als unbewiesenes Prinzip zugrunde gelegt hat, zutreffend sein.

Die Beispiele aus *Anal. post.* I.2 für Annahmen, die man zur Begründung der Arithmetik oder Geometrie benötigt, sind dagegen von anderer Art. Wie man den oben angeführten Zeilen aus diesem Kapitel (und einer Parallelstelle aus *Anal. post.* I.10,¹³⁸ von der gleich ausführlich die Rede sein wird), entnehmen kann, handelt es sich dabei um Existenzpostulate wie die Sätze 'Es gibt arithmetische Einheiten' bzw. 'Es gibt Punkte' oder 'Es gibt ausgedehnte Größen', zu denen man in Euklids *Elementen* kein Gegenstück findet.¹³⁹ Bevor ich diskutiere, auf welche Wurzeln dieses Detail der aristo-

ergänzend auf F. Rudio, *Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und des Hippokrates*. Griechisch und deutsch mit einem historischen Erläuterungsbericht als Einleitung. Wiesbaden 1968 [¹1907].

¹³⁵ ἀρχή (wie Anm. 134), 61.5.

¹³⁶ Simplicios (wie Anm. 134), 61.5-10.

¹³⁷ Siehe O. Becker (wie Anm. 131), 218-220.

¹³⁸ *Anal. post.* I 10, 76a32-36 und 76b3-6.

¹³⁹ Als Beispiel für ein Existenzpostulat aus den Schriften der griechischen Mathematiker kommt allenfalls Euklids sicher nacharistotelische Def. VII.1 in Frage, die man dann

telischen Wissenschaftstheorie zurückgeht, will ich die oben angeführten Stellen aber mit den Ausführungen im 10. Kapitel des I. Buchs der *Zweiten Analytik* vergleichen, aus dem ich zunächst eine längere Passage zitiere:

"Prinzipien nenne ich [im Hinblick auf] jede einzelne Gattung [von Dingen] das, von dem nicht bewiesen werden kann, daß es ist. Dasjenige, was das Erste sowie das aus diesem [Ersten Abgeleitete] bedeutet, wird [nämlich ohne Beweis] angenommen; aber daß es ist, braucht man [nur] im Hinblick auf die Prinzipien anzunehmen, während es für das andere [bewiesen werden kann. So] muß man beispielsweise [annehmen], was 'Einheit' oder was 'das Gerade' oder was 'Dreieck' [bedeutet. Im Falle der] Einheit und der ausgedehnten Größe [muß man] dagegen [außerdem annehmen, daß sie] sind, während man es im Hinblick auf die anderen [eben angeführten mathematischen Objekte] zeigt.

Von den [Prinzipien], die in den beweisenden Wissenschaften benutzt werden, sind die einen für die einzelne Wissenschaft eigentümlich, die andern aber allgemein. Allgemein sind sie allerdings [nur] per analogiam, weil sie in [jeder der den Einzelwissenschaften zugrunde [liegenden] Gattung [gelten]. Eigentümliche [Prinzipien der Geometrie] sind zum Beispiel, daß die Kurve oder das Gerade dieses [oder jenes] sind, allgemein sind dagegen [Prinzipien wie der Satz], daß gleiche Reste bleiben, wenn man Gleiches von Gleichem abzieht. [Für] jedes dieser [allgemeinen Prinzipien] genügt nämlich, daß es in der [einzelnen] Gattung [gilt]; denn so wird man nämlich verfahren, da man ja nicht für alles unterstellt, daß [dieses Prinzip richtig ist]. Statt dessen [setzt man als Geometer] nur für die ausge-

allerdings wie E. M. Bruins (Printing and reprinting of theories contrary to facts and texts, *Janus* 57 [1970], 134-149, dort 143-144) mit der Akzentuierung $\mu\omicron\nu\nu\alpha\varsigma \epsilon\sigma\tau\iota\nu \kappa\alpha\theta' \eta\nu \epsilon\chi\alpha\sigma\tau\omicron\nu \tau\omega\nu \delta\upsilon\nu\tau\omega\nu \epsilon\nu \lambda\acute{\epsilon}\gamma\epsilon\tau\alpha\iota$ lesen müßte. In diesem Falle wäre sie von ihrem Autor nun aber offensichtlich in Anlehnung an Platons $\mu\acute{\epsilon}\theta\epsilon\chi\iota\varsigma$ -Lehre und nicht mit einem Blick auf die Wissenschaftstheorie aus der *Zweiten Analytik* formuliert worden (siehe H.-J. Waschkes, [wie Anm. 1], 14-28, sowie V. Karasmanis [wie Anm. 89], 130), und daher unterstelle ich im weiteren Verlauf der Untersuchung durchgängig, daß die griechischen Mathematiker keine Prinzipien von der Art der aristotelischen Existenzpostulate in ihre Werke aufgenommen haben.

dehnten Größen und als Zahlentheoretiker nur für Zahlen [voraus, daß es gilt]."¹⁴⁰

Soweit ich sehe, ist bislang noch nie beachtet worden, daß zwischen den wissenschaftstheoretischen Ausführungen in den Kapiteln 2 und 10 aus dem I. Buch der *Zweiten Analytik* erhebliche Differenzen bestehen. Zunächst fällt auf, daß die wissenschaftlichen Prinzipien im 10. Kapitel nicht mehr mit besonderen Termini bezeichnet werden. Außerdem sind dort der Sache nach im wesentlichen nur noch die kanonischen Definitionen als fachspezifische Prinzipien zugelassen, zu denen dann noch eine Reihe von Existenzpostulaten kommen sollen, die fordern, daß es den Objektbereich der fraglichen Wissenschaften gibt. Wie erwähnt, heißen diese fachspezifischen Prinzipien jetzt aber nicht mehr Thesen, und die Termini $\delta\upsilon\sigma \kappa\alpha\tau\omicron\lambda\omicron\upsilon\sigma\iota\varsigma$ bzw. $\delta\omicron\tau\iota\sigma\mu\acute{o}\varsigma$ und $\upsilon\pi\acute{o}\theta\epsilon\sigma\iota\varsigma$ fehlen in *Anal. post.* I.10 ebenfalls, obwohl dort im Zusammenhang mit den Existenzpostulaten immerhin noch das Verb $\upsilon\pi\omicron\kappa\epsilon\iota\sigma\theta\alpha\iota$ ¹⁴¹ verwendet wird, und das legt meiner Ansicht nach folgende Deutung nahe.

Als Aristoteles die *Zweite Analytik* schrieb, kam es im Kreis der Mathematiker zu einer Diskussion über die Frage, welche Sätze im Rahmen ihrer Theorien als erste, unbewiesene Prämissen fungieren sollten. Die Details dieser metatheoretischen Betrachtungen sind uns nicht überliefert; aber ihre Ergebnisse haben auf zwei parallelen Ebenen in unsere Quellen Eingang gefunden. Im Rahmen dieser Untersuchungen, deren Beginn zeitlich mit der Niederschrift von *Anal. post.* I.2 zusammenfiel, hat man zunächst anscheinend den Ist-Zustand der mathematischen Teiltheorien von damals diskutiert. Dabei stellte man fest, daß neben den Definitionen schon immer weitere unbewiesene Sätze zur Begründung der mathematischen Teiltheorien benutzt worden waren. Bei diesen Prinzipien, die von Aristoteles in *Anal. post.* I.2 als Annahmen bezeichnet werden, handelte es sich meiner Ansicht nach jedoch nicht um die dort als Beispiel angeführten Existenzpostulate. In den Schriften der griechischen Mathematiker fehlen solche Forderungen nämlich, und da nicht einzusehen ist, warum sie später getilgt worden sein sollten, halte ich es für unwahrscheinlich, daß sie anfangs zu den explizit formulierten Prinzipien der griechischen Mathematik gehörten. Aristoteles dürfte die mathematische Grundlagendiskussion von damals demnach mit der Einfüh-

¹⁴⁰ *Anal. post.* I 10, 76a31-76b2.

¹⁴¹ *Anal. post.* I 10, 76b17.

rung der von diesen nie rezipierten Existenzpostulate eigenständig und unabhängig weitergeführt haben.

Ich hatte oben bereits darauf hingewiesen, daß Aristoteles die Annahmen in *Anal. post.* I.2 ohne jede Einschränkung zu den wissenschaftlichen Prinzipien zählt und daraus gefolgert, daß die Mathematiker jener Tage zur Begründung ihrer Theorien neben den Definitionen noch Sätze eines andern Typs benutzt haben. Dagegen sind nach den Ausführungen in dem meiner Ansicht nach etwas später entstandenen Kapitel *Anal. post.* I.10 (neben den spezifisch aristotelischen Existenzforderungen der Sache nach) nur noch kanonische Definitionen als fachspezifische Prinzipien zugelassen, und das deutete ich dahingehend, daß die Grundlagendiskussion der Mathematiker, deren erste Spuren in *Anal. post.* I.2 zu finden sind, am Ende zur Etablierung eines in *Anal. post.* I.10 integrierten wissenschaftstheoretischen Programms führte, nach dem es (neben einer Reihe fachübergreifender Prinzipien, von denen erst später die Rede sein wird) als fachspezifische Prinzipien nur noch Definitionen geben sollte. Dazu paßt außerdem der weiter oben angeführte wissenschaftstheoretische Exkurs aus dem I. Buch *Über die Seele*,¹⁴² in dem Aristoteles die Behauptung aufstellt, daß sich der Winkelsummensatz I.32 aus den *Elementen* letztlich aus den kanonischen Definitionen einiger geometrischer Objekte deduzieren läßt, während die Praxis bei Euklid zeigt, daß der Beweis dieses Theorems (über mehrere Stufen hin) weitere unbewiesene Sätze voraussetzt, zu denen insbesondere das Parallelenpostulat I.5 gehört.

Damit steht man natürlich vor der Frage, wie die griechischen Mathematiker auf die Diskrepanz zwischen dem eben skizzierten Programm und ihrer beweistechnischen Praxis reagierten, und da zeigt nun ein Blick auf den Anfang des I. Buchs der *Elemente*, wie sie vorgegangen sind. Sie führten nämlich eine Reihe von Sätzen, zu denen insbesondere das vierte und fünfte der dort angeführten Postulate sowie die in den arabischen und lateinischen Übersetzungen als Allgemeine Vorstellung I.8 und I.10 gezählten Sätze, die besagen, daß diejenigen geometrischen Objekte, die miteinander kongruent sind, auch miteinander gleich sind bzw. daß zwei Geraden keine ebene Figur einschließen, als provisorische Prinzipien ein. Im übrigen hoffte man wohl, diese Sätze später einmal (aus geeigneteren Definitionen) ableiten zu können,

¹⁴² Siehe Anm. 97.

und schließlich glaubten Mathematiker wie Ptolemaios und Proklos im Fall der Postulate I.4 und I.5 sogar, daß ihnen das gelungen sei.¹⁴³

Ich will im folgenden versuchen, diese Deutung weiter abzusichern. Wie ich bereits mehrfach betonte, trugen die Blöcke mit den unbewiesenen Sätzen aus den *Elementen* bei Euklid keine Titel, und wenn man weiter berücksichtigt, daß Aristoteles für die fachspezifischen Prinzipien in *Anal. post.* I.10 ebenfalls keine Namen nennt, liegt die Vermutung nahe, daß die Mathematiker damals keine besonderen Termini für die von ihnen benutzten Prinzipien eingeführt haben. Ihr Interesse an den Ergebnissen ihrer metatheoretischen Diskussionen war demnach gering; aber wie die Abtrennung der Definitionen von den übrigen unbewiesenen Sätzen aus dem I. Buch der *Elemente* erkennen läßt, haben sie ihren diesbezüglichen Überlegungen dennoch einige Beachtung geschenkt.¹⁴⁴ Andererseits ist allerdings nicht zu übersehen, daß sie mit ihren provisorischen Prinzipien nachlässig umgegangen sind. Wie ich gleich genauer ausführen werde, hat man im Verlauf einer Folge von Überarbeitungen der ebenen Geometrie aus beweistechnischen Gründen nämlich immer wieder neue unbeweisbare Sätze in das I. Buch der *Elemente* aufgenommen, die keine Definitionen waren, wobei diese provisorischen Prinzipien offenbar ad hoc und ohne jede Rücksicht auf eine durchgängige Systematik einem der beiden Blöcke mit den unbewiesenen Sätzen, die dort auf die Definitionen folgen, zugeordnet wurden. Das Interesse der Philosophen an metatheoretischen Fragen war dagegen ausgeprägter; denn einige Anmerkungen zu den provisorischen Prinzipien aus *Anal. post.* I.10 lassen erkennen, daß sich zumindest Aristoteles mit den damit zusammenhängenden Problemen befaßt hat. Er schreibt nämlich:

"Was durch sich selbst notwendig ist und [auch] notwendigerweise [so zu sein] scheint, ist weder eine Annahme¹⁴⁵ noch ein

¹⁴³ Proklos (wie Anm. 21), 188.1-193.9 und 364.1-373.2; dazu verweise ich ergänzend auf die Kritik an dem (Schein)beweis für das Parallelenpostulat I.5 durch Proklos und Ptolemaios bei T. L. Heath (wie Anm. 18), I 204-208, und R. Bonola (wie Anm. 15), 2-7.

¹⁴⁴ In einem etwas anderen Zusammenhang hat auch schon K. v. Fritz erschlossen, daß die Mathematiker metatheoretische Fragen in einem weit stärkeren Ausmaß diskutiert haben als sich unmittelbar aus ihren erhaltenen Schriften entnehmen läßt (wie Anm. 20), 87.

¹⁴⁵ ὑπόθεσις, *Anal. post.* I 10, 76b23.

Postulat¹⁴⁶ [sondern ein Prinzip]. Wenn nun jemand etwas [für wahr] nimmt, ohne es selber zu beweisen, obwohl es [eigentlich] beweisbar ist, und wenn das [außerdem auch] dem, der etwas lernen soll, [richtig zu sein] scheint, wird es [nämlich] angenommen¹⁴⁷, wobei es sich allerdings nicht schlechthin um eine Annahme handelt, sondern nur um eine [Annahme] für den [Lernenden]. Wenn er darüber jedoch keine vorgefaßte Meinung hat oder wenn [die fragliche Behauptung] gar unterstellt wird, obwohl er der entgegengesetzten Ansicht ist, wird sie postuliert¹⁴⁸; denn eine Annahme und ein Postulat unterscheiden sich wie folgt:

Ein Postulat ist etwas, was der Ansicht des Lernenden zuwiderläuft, oder es ist etwas Beweisbares, das [für wahr] genommen und [als Prämisse für einen Schluß] benutzt wird, obwohl es [noch] nicht bewiesen wurde.¹⁴⁹

Wie es scheint, handelt es sich bei dem Wort αἴτημα um eine Neubildung aus dem Umkreis von Platons Akademie; denn es ist erstmals in der *Politeia*¹⁵⁰ nachweisbar.¹⁵¹ Dort dient es zur Bezeichnung der bekannten und von Platon für fragwürdig gehaltenen Forderung der Tyrannen nach einer Leibgarde, die (paradoxe Weise) dafür sorgen soll, daß der Beschützer des Volkes selber sicher ist. Bei Aristoteles ist αἴτημα auch nicht vor der (oben zitierten Stelle aus) der *Zweiten Analytik* belegbar,¹⁵² und mithin dürfte dieses aus dem Verb αἰτεῖσθαι abgeleitete Nomen erst damals in Gebrauch gekommen sein. Dabei ist weiter zu beachten, daß ὑποκείσθαι und αἰτεῖσθαι umgangssprachlich offenbar als Synonyma galten; denn Archimedes faßt am

¹⁴⁶ αἴτημα, *Anal. post.* I 10, 76b23.

¹⁴⁷ ὑποκείσθαι, *Anal. post.* I 10, 76b29.

¹⁴⁸ αἰτεῖσθαι, *Anal. post.* I 10, 76b31.

¹⁴⁹ *Anal. post.* I 10, 76b23-34.

¹⁵⁰ *Politeia* VIII 566b5; andere Belege aus dem *Corpus Platonicum* für das Wort αἴτημα sind mir nicht bekannt.

¹⁵¹ Siehe H. G. Liddell, R. Scott, *A Greek-English Lexicon*. A new edition revised and augmented by H. S. Jones with the assistance of R. McKenzie, Oxford 1966 [Nachdruck der Ausgabe von 1940], 44.

¹⁵² Siehe H. Bonitz (wie Anm. 87), 22.

Anfang von Buch I seiner Schrift *De planorum aequilibriis* eine ganze Reihe von Prinzipien,¹⁵³ die dort die Form von Nebensätzen haben, ganz ähnlich wie Euklid im Fall des zweiten Blocks seiner unbewiesenen Sätze aus dem I. Buch der *Elemente* durch den sie alle übergreifenden Hauptsatz αἰτούμεθα zusammen.¹⁵⁴ Im Anschluß daran benutzt Archimedes dagegen das Verb ὑποκείσθαι,¹⁵⁵ um auf diese Forderungen zurückzuverweisen, und mithin dürften die Ausführungen von Aristoteles in *Anal. post.* I.10 auf eine Unsicherheit seiner Zeitgenossen bei der Benutzung der Termini ὑπόθεσις und αἴτημα schließen lassen.¹⁵⁶

Die Annahmen, die in *Anal. post.* I.2 noch zu den wissenschaftlichen Prinzipien zählten, gehören nach *Anal. post.* I.10 also nur noch zur Praxis des (Mathematik)unterrichts. Wissenschaftsgeschichtlich ist allerdings von größerem Interesse, daß man den Ausdruck Postulat nach Aristoteles zur Zeit der Abfassung dieses Kapitels auf zweierlei Weise gebrauchte. Merkwürdigerweise ist seit der Zeit des Proklos aber immer nur die eine dieser beiden Bedeutungen diskutiert worden.¹⁵⁷ Dabei kam man zu dem Ergebnis, daß αἴτημα damals ein Fachausdruck aus der Rhetorik oder Dialektik war, doch das gilt allenfalls für den ersten Teil der oben angeführten Erklärung, nach der ein Postulat eine Behauptung sein soll, die der Ansicht des Lernenden

¹⁵³ Archimedes, *Opera omnia cum commentariis Eutocii*, I-III. Iterum edidit J. L. Heiberg, corrigenda adiecit E. S. Stamatis [¹1880-1881, ²1910-1915], IV: *Über einander berührende Kreise*. Aus dem Arabischen übersetzt und mit Anmerkungen versehen von Y. Dold-Samplonius, H. Hermelink und M. Schramm, Stuttgart 1972-1975, II 124.3-126.3.

¹⁵⁴ Das ist ein Indiz dafür, daß den im sogenannten Geometerverzeichnis des Proklos angeführten Elementen des Theudios auch schon ein Block von (provisorischen) Prinzipien voranstand (siehe Anm. 22), der wie die Postulate aus Euklids *Elementen* durch ein ἡτήσιον zusammengehalten wurde; denn in diesem Fall könnte sich Archimedes, dessen Schriften wahrscheinlich voreuklidisch sind (siehe Anm. 23), an der oben genannten Stelle am Vorgehen des Theudios orientiert haben.

¹⁵⁵ Archimedes (wie Anm. 153), II 126.4.

¹⁵⁶ Auf die Tatsache, daß es noch nicht zu einer eindeutigen Fixierung der Begriffe ὑπόθεσις und αἴτημα gekommen war, als Aristoteles seine *Zweite Analytik* schrieb, ist auch schon von K. v. Fritz hingewiesen worden (wie Anm. 20), 42-43.

¹⁵⁷ Proklos (wie Anm. 21), 76.17-77.2 und 182.14-20.

zuwiderläuft.¹⁵⁸ Mathematikgeschichtlich relevant ist dagegen die zweite der von Aristoteles genannten Bedeutungen des Terminus $\alpha\lambda\eta\mu\alpha$. Danach ist ein Postulat "etwas Beweisbares, das [für wahr] genommen und [als Prämisse für einen Schluß] benutzt wird, obwohl es [noch] nicht bewiesen wurde."¹⁵⁹ Ein Postulat in diesem Sinne ist also ein provisorisches Prinzip, und wie mir scheint, geht diese Bezeichnung auf die mathematische Grundlagendiskussion zurück, deren Ergebnis schließlich war, daß die Definitionen als einzige fachspezifische Prinzipien zulässig sein sollten. Wie ich mehrfach erwähnte, trugen die Listen mit den ersten, unbewiesenen Sätzen aus den *Elementen* bis zur Zeit des Euklid keinerlei Titel; aber der zweite dieser Blöcke aus dem I. Buch, in dem fünf provisorische Prinzipien aufgelistet sind, wurde offenbar schon immer durch ein ihm vorangestelltes $\eta\tau\eta\sigma\theta\omega$ zusammengehalten. Der aristotelische Terminus aus *Anal. post.* I.10 dürfte aus dieser Praxis abgeleitet sein, und aus der *Zweiten Analytik* ist er dann spätestens im 1. Jh. in die Schriften der spätantiken Euklidkommentatoren eingegangen,¹⁶⁰ wobei offen bleiben muß, ob er schließlich von dort oder aus der *Zweiten Analytik* zu den byzantinischen Kopisten der *Elemente* gelangte.

Im Folgenden will ich weitere Argumente für die These anführen, nach der die Bemühungen der Mathematiker um eine Neubegründung der ebenen

¹⁵⁸ Besonders drastisch zeigt sich die Tendenz, die Ausführungen des Aristoteles zum Begriff $\alpha\lambda\eta\mu\alpha$ auf diesen Gesichtspunkt zu reduzieren, bei J. Barnes (Aristotle's *Posterior Analytics*. Translated with notes by J. Barnes, Oxford 1975, 17 [Anm. 1]), der das η in der Zeile 76b33 für unecht erklärt, damit an der fraglichen Stelle auch formal nur noch von einer Bedeutung des Terminus $\alpha\lambda\eta\mu\alpha$ die Rede ist; dazu verweise ich ergänzend auf I. Mueller (wie Anm. 19), 70, und A. Szabó (wie Anm. 9), 364-365.

¹⁵⁹ *Anal. post.* I 10, 76b33-34.

¹⁶⁰ Dem *Kommentar* des Proklos zum I. Buch der *Elemente* läßt sich entnehmen (wie Anm. 21), 185.6-8, 188.3-5 und 191.21-192.9, daß Geminus die in Heibergs Ausgabe der *Elemente* als $\alpha\lambda\eta\mu\alpha\tau\alpha$ bezeichneten (provisorischen) Prinzipien bereits unter diesem Namen kannte. Dazu hat O. Neugebauer aus dem Hinweis auf ein (allerdings nicht ganz eindeutig bezeichnetes) Isisfest in den *Elementa astronomiae* des Geminus erschlossen (VIII 20.28), daß dessen Leben in die Zeit um 50 n. Chr. fiel (A history of ancient mathematical astronomy. I-III, Berlin; Heidelberg; New York 1975, II 578-581), während G. Aujac im Vorwort zu ihrer neuen Ausgabe der *Elementa astronomiae* auf einen Brief des Dionysios von Halikarnassos verweist (Geminus, *Introduction aux phénomènes*, Paris 1975, XIX-XXXIV), nach dem Geminus auf die Zeit von ca. 80-10 v. Chr. zu datieren ist.

Geometrie, die sich in den provisorischen Prinzipien aus dem I. Buch der *Elemente* widerspiegeln, einsetzen, als Aristoteles seine *Analytiken* schrieb. Zu dieser Datierung paßt einmal, daß man bei ihm von diesen Schriften an Passagen findet, die auf Versuche der Geometer schließen lassen, bei der Begründung der Geometrie ohne ein dem Parallelenaxiom entsprechendes Prinzip auszukommen. Den interessantesten Beleg dieser Art bietet eine Stelle aus der *Ersten Analytik*,¹⁶¹ an der von einem Zirkelschluß die Rede ist, der irgend welchen Mathematikern im Zusammenhang mit der Theorie der Parallelen unterlaufen war. Dem stark elliptisch formulierten Text, der offenbar auf einen seinerzeit bestens bekannten Sachverhalt anspielt, läßt sich nicht sicher entnehmen, worin diese *petitio principii* bestand;¹⁶² aber die Deutungen von T. L. Heath¹⁶³ und I. Toth¹⁶⁴ legen nahe, daß man damals glaubte, das Parallelenpostulat bzw. einen damit äquivalenten Satz aus den übrigen Prinzipien der Geometrie deduziert zu haben;¹⁶⁵ Die damit zusammenhängenden Fragen waren jedoch keineswegs das einzige Problem, das die Mathematiker von damals zur Revision ihrer geometrischen Satzsysteme und damit zur Einführung von immer wieder neuen (provisorischen) Prinzipien veranlaßt hat.

Zu den unbewiesenen Sätzen aus den *Elementen* gehört die

Allgemeine Vorstellung I. 8: "Was aufeinander paßt, ist miteinander gleich."

Die Deutung dieses Prinzips hat den Euklidkommentatoren schon immer Schwierigkeiten bereitet; denn es ist offensichtlich eine fachspezifische

¹⁶¹ *Analytica priora* II 16, 65a4-9.

¹⁶² Siehe B. Vitrac (wie Anm. 104), I 306-308.

¹⁶³ T. L. Heath (wie Anm. 34), 27-30.

¹⁶⁴ I. Toth, Das Parallelenproblem im Corpus Aristotelicum, *Archive for History of Exact Sciences*, 3 (1966-1967), 249-422, dort 256-301.

¹⁶⁵ In der eben erwähnten Arbeit von Toth werden noch eine ganze Reihe weiterer Passagen aus dem *Corpus Aristotelicum* diskutiert (wie Anm. 164), in denen es um die Theorie der Parallelen bzw. um das damit aufs engste zusammenhängende Theorem I.32 aus den *Elementen* geht, doch sei einschränkend angemerkt sei, daß ich die Tendenz von Toth, den griechischen Geometern Überlegungen zuzuschreiben, die in der Neuzeit im Vorfeld der Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie angestellt worden sind (siehe Anm. 15), für eine Überinterpretation der fraglichen Textstellen halte; siehe auch B. Vitrac (wie Anm. 104), I 309.

Forderung, und damit stand man vor der Frage, warum es in die Liste der Allgemeinen Vorstellungen aufgenommen worden war, in denen man in Anlehnung an die Wissenschaftstheorie des Aristoteles (auf die ich noch zu sprechen komme) fachübergreifende Prinzipien sah.¹⁶⁶ Wie ich oben erläutert habe, handelt es sich dabei aber um ein Scheinproblem, weil die fragliche Systematik nur durch Titel suggeriert wird, die erst in der Spätantike und damit lange nach der Abfassung der *Elemente* über die Listen mit den ersten Sätzen aus diesem Werk gesetzt worden sind. Die Allgemeine Vorstellung I.8 ist jedoch auch noch aus einem andern Grund von wissenschaftshistorischem Interesse.

Wie man seit langem bemerkt hat, muß das Aufeinanderpassen kongruenter geometrischer Größen in der voreuklidischen Mathematik bis hin zur Zeit des Aristoteles eine weit bedeutendere Rolle als in den *Elementen* gespielt haben.¹⁶⁷ Dazu zeigen Euklids Beweise, daß man spätestens seit seiner Zeit bemüht war, die darin fundierte Form der Begründung von geometrisch interessanten Theoremen durch ein logisches Deduzieren aus andern Sätzen zu ersetzen, bei dem von der Methode des Aufeinanderpassens kein Gebrauch mehr gemacht wurde.¹⁶⁸ Eine Etappe dieser Entwicklung spiegelt sich im Postulat I.4 wieder, nach dem alle rechten Winkel miteinander gleich sein sollen. Dieses Postulat läßt sich mit Hilfe von Kongruenzbetrachtungen beweisen,¹⁶⁹ deren Benutzung man durch die Einführung dieses provisorischen Prinzips offensichtlich umgehen wollte; aber das damit zusammenhängende Begründungsproblem wurde in der Antike nie befriedigend gelöst. Daher nahm man schließlich auch noch die Allgemeine Vorstellung I.8 als provisorisches Prinzip in die *Elemente* auf. Sie legitimiert die Anwendung

¹⁶⁶ In diesem Sinne ging schon Proklos davon aus (wie Anm. 21), 194.8 -9, daß die Termini ἀξιώματα und κοινὴ ἐννοια ein und dieselben allgemeinen Prinzipien der Mathematik bezeichnen.

¹⁶⁷ Siehe T. L. Heath (wie Anm. 18), I 224-226 und 247-254 und B. Vitrac (wie Anm. 104), I 293-299 sowie K. v. Fritz (wie Anm. 20), 68-79 und (ders.) Gleichheit, Kongruenz und Ähnlichkeit in der antiken Mathematik bis auf Euklid, Archiv für Begriffsgeschichte, 4 (1959), 7-81.

¹⁶⁸ Dazu verweise ich ergänzend auf H.-J. Waschkies (wie Anm. 11), 178-183.

¹⁶⁹ Einen Beweis des Postulats I.4, der die ἐφαρμόζειν-Methode benutzt, findet man bei Proklos, der dazu anmerkt, daß die fragliche Überlegung auf andere Geometer zurückgeht und wenig Mühe macht (wie Anm. 21), 188.20-189.12.

der ἐφαρμόζειν-Methode und dient bei Euklid nur noch zum Beweis der Sätze I.4 und I.8, wobei die Tatsache, daß D. Hilbert eine abgeschwächte Version des Satzes I.4 unter die Axiome der euklidischen Geometrie aufnehmen mußte,¹⁷⁰ um das Anwenden dieser Beweismethode ganz zu vermeiden, verrät, daß sich die Sätze I.4 und I.8 aus den *Elementen* nicht aus Euklids übrigen Definitionen und Postulaten deduzieren lassen, wenn man die Allgemeine Vorstellung I.8 in der Liste seiner Prinzipien streicht.¹⁷¹

Ich habe weiter oben betont, daß der Hinweis des Aristoteles, nach dem zu den Prinzipien jeder Wissenschaft eine Reihe von Existenzpostulaten gehören, von den Mathematikern in der Antike nie beachtet worden ist. Andererseits gibt es jedoch ein Indiz dafür, daß er mit diesem Detail seiner Wissenschaftstheorie an eine weit ältere Diskussion der Philosophen anknüpft. Wie eine Passage aus seiner *Metaphysik* zeigt, waren die Mathematiker schon von Protagoras mit einem pointierten Hinweis darauf geärgert worden, daß sie über Kreise und Geraden sprechen, zu denen es in unserer Umwelt keine Gegenstücke gibt, weil man dort keine sinnlich wahrnehmbaren Kreise und Geraden finden kann, die präzise zu den Definitionen der Geometer passen.¹⁷² Damit war die schwierige Frage nach dem ontologischen Status der Objekte aufgeworfen, um die es in der Mathematik geht, und wie es scheint, löste Aristoteles dieses Problem zunächst handstreichartig dadurch, daß er ihre Existenz kommentarlos postulierte. Zugleich versuchte er allerdings, diesen Gewaltakt so klein wie irgend möglich erscheinen zu lassen; denn die Existenzpostulate, die im 2. (und 10.) Kapitel des I. Buchs der *Zweiten Analytik* eingeführt werden, erfassen nur eine eingeschränkte Klasse von mathematischen Objekten. Nach Aristoteles brauchen die Zahlentheoretiker nämlich bloß zu fordern, daß es etwas gibt, was ihrer Definition der Einheit entspricht, während die Geometer nur zu postulieren brauchen, daß ausgedehnte Größen und Punkte existieren. Die Existenz von allen andern mathematischen Objekten soll danach samt der ihrer spezifischen Eigenschaften ableitbar sein.

¹⁷⁰ D. Hilbert (wie Anm. 16), 14.

¹⁷¹ Wie Anm. 168.

¹⁷² *Metaph.* III 2, 997b35-998a4; dazu verweise ich ergänzend auf H.-J. Waschkies (wie Anm. 7), 39.

Die Praxis, die hinter dieser wissenschaftstheoretischen Vorstellung steht, ist leicht zu ermitteln. Nach Ansicht der griechischen Mathematiker waren die Zahlen¹⁷³ Dinge, die aus Einheiten zusammengefügt sind. Das ist eine wissenschaftstheoretische Fehlinterpretation der alten $\psi\eta\phi\alpha$ -Arithmetik, bei der man noch nicht zwischen Zahlen und Zahlzeichen (bzw. Ziffern) unterschieden hat.¹⁷⁴ Die vermeintlichen Zahlen, bei denen es sich tatsächlich um Ziffern bzw. Figuren handelte, wurden nun aber in der Tat aus (Repräsentanten der) Eins zusammengesetzt, und weil spezielle Teilmengen der Zahlen wie die geraden Zahlen oder die Quadratzahlen samt ihrer Attribute leicht mit einem Blick auf solche Figuren entdeckt und beschrieben werden können, ist klar, warum die Existenz des ganzen Objektbereichs der Arithmetik zusammen mit der aller Eigenschaften der Zahlen gesichert zu sein schien, sobald man sicher sein durfte, daß Einheiten existieren.

Ich will an dieser Stelle auf ein weiteres Indiz dafür eingehen, daß die griechischen Mathematiker schließlich nur noch Definitionen als fachspezifische Prinzipien zulassen wollten. Aristoteles¹⁷⁵ und der späte Platon¹⁷⁶ betonen in ihren Schriften, daß die Arithmetik in der Hierarchie der Wissenschaften über der Geometrie steht. Diese Rangordnung wird damit begründet, daß der Objektbereich der Geometrie die ausgedehnten Größen umfaßt und damit dem Geist ferner steht als der vom diesem genauer und verlässlicher erfassbare Bereich der Zahlen, um die es in der Arithmetik geht. Das ist zwar eine spezifisch philosophische Argumentation; aber wie mir scheint, haben Aristoteles und der ältere Platon damit nur neue Gründe für eine Rangordnung anzugeben versucht, die von den Mathematikern ganz unabhängig davon aus wissenschaftstheoretischen Erwägungen eingeführt worden war. Wie Euklids *Elemente* zeigen, stehen den arithmetischen Partien dieses Sammelwerks nur Definitionen voran. Provisorische Prinzipien, die für die Zahlentheorie spezifisch sind, fehlen dort dagegen ganz, und damit ist klar, daß die griechischen Mathematiker in ihrer Arithmetik die am besten

173 Da der Terminus ἀριθμός in der griechischen Mathematik immer eine natürliche Zahl bezeichnet, ist hier und im Folgenden unter einer Zahl stets eine natürliche Zahl zu verstehen.

174 Zum folgenden verweise ich ergänzend auf H.-J. Waschkes (wie Anm. 1), 37-70.

175 *Anal. post.* II 27, 87a31-37 und *Metaph.* I 2, 982a25-28.

176 *Philebos* 55c4-59b9 (*Platonis opera*, recognovit J. Burnet. I-V, Oxford 1900-1907, II).

fundierte Wissenschaft gesehen haben dürften, die somit weit eher als die Geometrie das Paradigma für die von Aristoteles in *Anal. post.* I.10 skizzierte Wissenschaftstheorie zu gelten hat.

Im Falle der Geometrie mußte die oben referierte Vorstellung des Aristoteles, nach der man die Existenz des ganzen Objektbereichs einer Wissenschaft bereits durch die Forderung sicher stellen kann, daß es dessen einfachste Elemente gibt, prima facie sogar noch plausibler erscheinen als im Fall der Arithmetik. Wenn es Strecken gibt, kann man Winkel, Parallelen und Vierseite konstruieren; aber diese Antwort auf die von Protagoras aufgeworfene Frage nach der Existenz der Dinge, von denen man in der Geometrie spricht, dürfte im Kreis der Akademie kaum Anhänger gefunden haben. Platon hat sich nämlich bereits in seiner *Politeia* energisch gegen die Vorstellung von einer Konstruierbarkeit der geometrischen Figuren gewandt, weil die Geometrie seiner Ansicht nach von immer seidenen Objekten handelt,¹⁷⁷ und im *Euthydemos* schreibt er ganz in diesem Sinne, daß die Geometer die von ihnen untersuchten Figuren nicht herstellen, sondern finden.¹⁷⁸ Wie uns Proklos in seinem *Kommentar zum I. Buch der Elemente* berichtet, ist dieses Problem schließlich sogar zum Gegenstand eines Disputs zwischen dem Mathematiker Menaechmos¹⁷⁹ und orthodoxen Platonikern aus dem Kreise um Speusippos und Amphinomos geworden,¹⁸⁰ bei dem darum gestritten wurde, ob die Gegenstände, um die es in der Geometrie geht, ewig dauern, oder ob sie von den Mathematikern aus elementaren Komponenten wie Linien und Punkten zusammengefügt werden.¹⁸¹

Es gibt ein Indiz dafür, daß Aristoteles das damit aufgeworfene Problem dadurch zu lösen versuchte, daß er das Konstruieren von geometrischen Figu-

177 *Politeia* VII 526e8-527c11.

178 *Euthydemos* 290b10-c3 (wie Anm. 176, III).

179 Menaechmos war nach Proklos ein Schüler des Eudoxos (wie Anm. 21), 67.9-10.

180 Speusippos wurde nach Platons Tod Leiter der Akademie (Diogenes Laertios, *Vitae philosophorum*. Recognovit brevique adnotatione critica instruxit H. S. Long, Oxford 1966 [¹1964], IV 1), und daher dürfte die oben erwähnte Diskussion kaum vor 347 v. Chr. geführt worden sein.

181 Proklos (wie Anm. 21), 77.15-78.13; dazu verweise ich ergänzend auf A. C. Bowen, Menaechmos versus the Platonists: Two theories of science in the Early Academy, *Ancient Philosophy*, 3 (1983), 12-29.

ren in einen (mental) Akt uminterpretierte, bei dem etwas Verborgenes aus dem Zustand der Latenz in die Wirklichkeit überführt und damit gefunden wird. In seiner *Metaphysik* erklärt er nämlich im Rahmen einiger Erläuterungen zu dem von ihm erst spät entwickelten δύναμις - ἐνέργεια - Schema,¹⁸² daß man als Geometer beim Beweisen Figuren, die zuvor bereits potentiell in dem Kontinuum der ausgedehnten Größe lagen, durch einen Akt des Unterteilens (keineswegs erzeugt, sondern bloß aus dem Zustand des Möglichen) in den Zustand des Wirklichen überführt.¹⁸³

Im übrigen zeigt ein Blick in die *Elemente*, daß Menaechmos aus dem oben erwähnten Streit als Sieger hervorging; denn Euklid beschreibt immer wieder, wie Figuren konstruiert werden, und nicht, wie man solche Gebilde entdeckt. Menaechmos selber oder einer seiner Nachfolger muß allerdings bemerkt haben, daß die Operationen, die von den Geometern ausgeführt werden, wenn sie komplexe Gebilde aus einfacheren Komponenten zusammenfügen, nicht in den ihnen vorliegenden Definitionen der geometrischen Objekte von der Art des Punktes, der Kurve oder anderer ausgedehnter Größen fundiert werden können.¹⁸⁴ Daher führte man die Postulate I.1-3 als αἰτήματα in die *Elemente* ein, wobei die griechischen Mathematiker wohl lange hofften, daß sie schließlich angemessene Definitionen finden würden, die diese Postulate entbehrlich machen; aber wie ihre Schriften zeigen, wurde dieses Ziel von ihnen nie erreicht.

Ich will an dieser Stelle kurz auf A. Szabós Datierung der Postulate I.1-3 eingehen, die nicht mit dieser Deutung vereinbar ist. In seinem *Kommentar zum I. Buch der Elemente* schreibt Proklos die Sätze I.12 und I.23 Oinopides

¹⁸² Siehe P. Gohlke, Die Entstehungsgeschichte der naturwissenschaftlichen Schriften des Aristoteles, Hermes, 59 (1924), 274-306, dort 277-279, sowie Aristoteles und sein Werk, Paderborn 1948, 151-153; F. Nuyens, L' évolution de la psychologie d' Aristote, Louvain 1973 [1948], 215-217 und H.-J. Waschkies (wie Anm. 26), 332-336 und 363-366.

¹⁸³ *Metaph.* IX 9, 1051a21-30; zur Deutung dieser Stelle verweise ich ergänzend auf H.-J. Waschkies (wie Anm. 11), 175-178.

¹⁸⁴ Die damit zusammenhängenden Probleme sind von W. Detel in einer Untersuchung über die Frage nach der Existenz einzelner geometrischer Objekte in der griechischen Mathematik diskutiert worden (wie Anm. 123), I 225-230.

von Chios zu.¹⁸⁵ In ihnen wird gezeigt, wie man von einem Punkt aus das Lot auf eine Gerade fällt bzw. wie man einen Winkel an eine Gerade in der Weise anlegt, daß sein Scheitel mit einem vorgegebenen Punkt der Geraden zusammenfällt. Diese Konstruktionsaufgaben lassen sich mit Zirkel und Lineal lösen; aber wie A. D. Steele in seiner grundlegenden Arbeit über die Rolle dieser Geräte in der griechischen Mathematik betont hat, sind die eben erwähnten Ausführungen von Proklos so allgemein gehalten, "daß die Entscheidung schwer fällt, ob Oinopides die Wahl der Gerade und des Kreises als Hilfskurven [bereits] bewußt vorgenommen hat".¹⁸⁶ Andererseits sind die beiden Konstruktionen aber so einfach, daß man sich nach A. Szabó "zunächst erstaunt fragen muß, warum in diesen Fällen die Urheberschaft des Oinopides überhaupt der Erwähnung wert war",¹⁸⁷ und eben dieses Bedenken ist die eigentliche Prämisse für Szabós Datierung der Postulate I.1-3 aus den *Elementen*. Nachdem T. L. Heath schon ein Jahrzehnt vor dem Erscheinen der Arbeit von Steele aus den vagen Hinweisen des Proklos erschlossen hatte, daß die bekannte Regel, nach der das Lineal und der Zirkel die einzigen Hilfsmittel sein sollen, die man bei elementaren planimetrischen Konstruktionen benutzen darf, von Oinopides stammt,¹⁸⁸ extrapolierte A. Szabó diese Vermutung nämlich dahingehend, daß Oinopides die Postulate I.1-3 aus den *Elementen* eingeführt haben dürfte, weil sie der fraglichen Regel entsprechen sollen.¹⁸⁹ Das ist nicht ganz korrekt; denn wie bereits von A. Frajese betont worden ist,¹⁹⁰ schränken die Postulate I.1-3 aus den *Elementen* die erlaubten Konstruktionen erheblich weiter ein. Das Lineal (von dem bei Euklid expressis verbis ebenso wenig die Rede ist wie von einem Zirkel), darf danach beim Zeichnen nur einmal an die Punkte, die verbunden werden sollen bzw. an die Strecke, die verlängert werden soll, angelegt werden. Danach darf man es bei dem fraglichen Konstruktionsschritt nicht mehr verschieben, und damit ist durch die Postulate I.1-3 die Operation des νεύειν aus der Elementargeome-

¹⁸⁵ Proklos (wie Anm. 21), 283.7-10 und 333.5-9.

¹⁸⁶ A. D. Steele (wie Anm. 131), 304.

¹⁸⁷ A. Szabó (wie Anm. 9), 370-371.

¹⁸⁸ T. L. Heath, A history of Greek mathematics, I-II, Oxford 1965 [1921], I 175-176.; dazu verweise ich ergänzend auf K. v. Fritz, Oinopides, RE, 34. Halbband, Stuttgart 1937, 2258-2272, dort 2264-2266.

¹⁸⁹ A. Szabó (wie Anm. 9), 369-373.

¹⁹⁰ A. Frajese, Sur la signification des postulats euclidiens, Archives Internationales d' Histoire des Sciences, 4 (1951), 383-392, dort 384-385.

trie verbannt. Bei diesem Konstruktionsverfahren wird ein Lineal, auf dem die Endpunkte einer Strecke markiert sind, bei ständigem Kontakt mit einem festen Punkt durch Gleit- und Drehbewegungen solange zwischen zwei gegebenen Kurven verschoben, bis die Endpunkte der Strecke auf diese Kurven fallen.¹⁹¹ Dieses Einschieben zählt Aristoteles in *Anal. post.* I.10 noch zu den Grundbegriffen der Geometer,¹⁹² und damit dürfte auch schon klar sein, daß A. Szabós ohnehin durch keine antike Quelle belegbare Zuschreibung der Postulate I.1-3 an Oinopides nicht zu halten ist.

Die weiter oben referierten Details der aristotelischen Wissenschaftstheorie lassen zusammen mit der Praxis aus den *Elementen* einprägsam den Unterschied zwischen der metatheoretischen Deutung der Mathematik durch die Griechen und moderne Mathematiker wie Pasch oder Hilbert erkennen. Wie man sich leicht überzeugt, entsprechen die Kernbegriffe dieser Autoren, die mathematische Objekte wie Punkte und Strecken oder Ebenen bezeichnen, mutatis mutandis denjenigen Objekten der griechischen Mathematik, deren Definitionen aus den *Elementen* sich als beweistechnisch unfruchtbar erwiesen haben. Zum andern sind es nun aber gerade diese Objekte der Zahlentheoretiker und Geometer, deren Existenz nach Aristoteles durch ein Postulat gesichert werden muß. Auf das Mißlingen, die grundlegenden Elemente der mathematischen Einzelwissenschaften explizit zu definieren, haben die Mathematiker der Neuzeit also mit der Einführung von impliziten Definitionen reagiert, die nach ihrer Metatheorie außerdem nicht mehr als Beschreibung eines eindeutig bestimmten Ensembles von anschaulich vorstellbaren Dingen gedeutet werden dürfen. Nach dem oben bereits zitierten wissenschaftstheoretischen Exkurs aus *De anima* I.1 sind Punkte, Geraden und Dreiecke dagegen wohlbestimmte Dinge, die wir mit Hilfe unseres Vorstellungsvermögens¹⁹³ betrachten können. Das ermöglicht uns, ihre Eigenschaften zu entdecken, und damit ist zugleich klar, warum sich die Definitionen aus den *Elementen*, die keine Kernbegriffe im Sinne von Pasch und Hilbert erläutern, sondern komplexere Gebilde beschreiben, formal

¹⁹¹ Die ausführlichsten Erklärungen zur Operation des $\nu\epsilon\sigma\epsilon\iota\nu$ findet man bei Pappos, *Collectionis quae supersunt e libris manu scriptis edidit latina interpretatione et commentariis instruxit F. Hultsch*. I-III, Amsterdam 1965 [1875-1878], II 670 (Buch VII, § 27); dazu verweise ich ergänzend auf R. Böker (wie Anm. 131), 418-426.

¹⁹² *Anal. post.* I 10, 76b9.

¹⁹³ $\varphi\alpha\upsilon\tau\alpha\sigma\iota\alpha$ (*De anima* I 1, 402b23).

überhaupt nicht von den entsprechenden Nominaldefinitionen der modernen Mathematik unterscheiden. Beide sind in heuristischen Betrachtungen an denselben sinnlich wahrnehmbaren Objekten wie gezeichneten Dreiecken und Kreisen fundiert,¹⁹⁴ aber den daraus resultierenden Definitionen kann man am Ende nicht ansehen, ob sie auch Grundbegriffe enthalten, die bloß implizit definiert sind, oder ob in sie nur Termini eingehen, zu denen es eine explizite Definition gibt, die ein Gegenstück aus unserer Anschauungswelt beschreibt oder wenigstens beschreiben soll. Dadurch sind Autoren wie Ross¹⁹⁵ und Mueller¹⁹⁶ dazu verleitet worden, die Definitionen der griechischen Mathematiker als Nominaldefinitionen zu deuten, doch wie ich oben schon erläuterte, gelingt das nur, wenn man deren Beschreibung der grundlegenden mathematischen Objekte wie Einheiten und Kurven als irrelevant übergeht, und das scheint mir vollkommen unzulässig.

Wie man sich leicht überzeugt, gibt es zu den Kernbegriffen von Pasch und Hilbert, die wie das Sich-Schneiden oder das Auf-einer-Geraden-liegen eine Relation zwischen Geraden bzw. einer Gerade und einem Punkt beschreiben, bei den griechischen Mathematikern kein Gegenstück, und das ist sicherlich kein Zufall. Nach einer von Aristoteles explizierten Vorstellung, die vermutlich von den griechischen Mathematikern geteilt wurde, gehören die Relationen zu dem, was nur in einem abgeschwächten Sinne zum Seienden gerechnet werden darf,¹⁹⁷ und damit kamen sie nicht als Objekte einer wissenschaftlichen Betrachtung in Frage.¹⁹⁸ Dieser Standpunkt ist in der Neuzeit aufgegeben worden; denn Mathematiker wie Pasch und Hilbert diskutieren im Grunde nur noch Relationen zwischen den Objekten ihrer Wissenschaft, wie nicht zuletzt daraus hervorgeht, daß die Definitionen

¹⁹⁴ Dazu verweise ich noch einmal auf die oben schon zitierten Ausführungen von R. Baldus zu diesem Thema (wie Anm. 115).

¹⁹⁵ W. D. Ross (wie Anm. 83).

¹⁹⁶ I. Mueller (wie Anm. 82).

¹⁹⁷ Siehe *Ethica Nicomachea*. Recognovit brevique adnotatione instruxit I. Bywater, Oxford 1959 [1894], I 4, 1096a19-23 sowie *Phys.* V 2, 225b10-13, *Metaph.* XI 12, 1068a8-13 und XIV 1, 1088a21-b4.

¹⁹⁸ Dazu verweise ich ergänzend auf den in diesem Sammelband abgedruckten Vortrag von W. Kullmann über Aristoteles und den Begriff des modernen Naturgesetzes, der gleichfalls deutlich macht, daß den Griechen noch ein adäquates Verständnis für die wissenschaftstheoretische Bedeutung der Relationen fehlte.

in der Mathematik von heute prinzipiell entbehrlich sind, während das Postulat I.5 aus den *Elementen*, das bei Euklid nur den Status eines provisorischen Prinzips hatte, inzwischen den Rang eines Axioms hat, weil in ihm von der Relation 'parallel' die Rede ist, die nie die Eigenschaft einer isolierten Geraden sein kann.

Die dritte Gruppe von ersten Sätzen, die dem ersten Buch der *Elemente* voranstellen, trägt in Heibergs Ausgabe der *Elemente* den Titel $\kappa\omicron\lambda\nu\alpha\iota \epsilon\nu\nu\omicron\lambda\alpha\iota$. Zumindest das dritte dieser Prinzipien, nach dem gleiche Reste übrig bleiben, wenn man Gleiches von Gleichem abzieht, war zur Zeit des Aristoteles bekannt; denn er spielt an mehreren Stellen mit fast wörtlichen Zitaten auf diesen Grundsatz an,¹⁹⁹ wozu noch angemerkt sei, daß diese Allgemeine Einsicht in den *Elementen* zu der nachstehend angeführten Gruppe von ähnlich strukturierten Prinzipien gehört:

"[Als Allgemeine Einsichten gelten

1., daß Zahlen oder Größen], die demselben gleich sind, auch miteinander gleich sind,

2., daß], wenn man zu gleichen [Zahlen oder Größen] Gleiches hinzufügt, die Ganzen gleich sind,

3., daß], wenn man von gleichen [Zahlen oder Größen] Gleiches abzieht, die Reste gleich sind,

4., daß], wenn man zu ungleichen [Zahlen oder Größen] Gleiches hinzufügt, die Ganzen ungleich sind,

5., daß], die Doppelten desselben miteinander gleich sind, [und

6., daß], die Halben desselben miteinander gleich sind."

Diese Allgemeinen Annahmen bieten ein weiteres Beispiel dafür, daß die Mathematiker metatheoretischen Fragen weniger Beachtung geschenkt haben, als häufig angenommen wird. Zu dem wissenschaftstheoretischen Programm aus der *Zweiten Analytik* gehört nicht zuletzt, daß die Prinzipien jeder Wissenschaft unbeweisbar und damit voneinander unabhängig sein sollen.²⁰⁰ Wie schon Proklos moniert hat,²⁰¹ wird gegen diesen Grundsatz mit der

¹⁹⁹ *Analytica priora*, I 24, 41b19-22; *Anal. post.* I 10, 76a41 und 76b20-21 sowie 11, 77a30-31 und *Metaph.* XI 4, 1061b19-21.

²⁰⁰ *Anal. post.* I 2, 72a14-18, und 10, 76a31-32.

²⁰¹ Proklos (wie Anm. 21), 196.15-197.5.

Aufnahme der Allgemeinen Vorstellungen I.5-6 unter die Prinzipien aber eklatant verstoßen; denn sie sind Spezialfälle der Allgemeinen Vorstellungen I.2-3. Dabei verweist Proklos auf Heron, der die Zahl der Allgemeinen Vorstellungen entsprechend reduziert hat,²⁰² und im Gefolge dieser spätantiken Autoren hat Heiberg die Allgemeinen Vorstellungen I.5-6 für unecht erklärt, doch wie mir scheint, darf man nicht so ohne weiteres davon ausgehen, daß diese überzähligen Prinzipien naheuklidisch sind.

Im IV. Buch der *Metaphysik* diskutiert Aristoteles die Frage, ob es eine Wissenschaft gibt, die sich mit der Begründung derjenigen Prinzipien zu befassen hat, "die in den mathematischen [Wissenschaften] Axiome genannt werden".²⁰³ Wie schon von B. Einarson betont worden ist,²⁰⁴ läßt sich dieser Stelle²⁰⁵ entnehmen, daß Aristoteles den Terminus Axiom von den Mathematikern übernommen hat, und eine andere Passage aus der *Zweiten Analytik* bietet ein gutes Indiz dafür, daß die Mathematiker seiner Tage auf diese allgemeinen, ihre einzelnen Theorien übergreifenden Prinzipien zuerst bei der Ausarbeitung der allgemeinen Proportionentheorie aufmerksam geworden sind. Aristoteles berichtet dort:

²⁰² Nach dem von al-Nayrizi zitierten Simplicios, der in der 1. Hälfte des 6. Jh. n. Chr. lebte (F. Rudio [wie Anm. 134], 6-9), gab es in den alten Handschriften nur drei Allgemeine Vorstellungen, denen in den neueren Texten weitere Prinzipien dieser Art beigelegt waren (*Anarithi In decem libros priores Elementorum Euclidis commentarii*. Ex interpretatione Gherardi Cremonensis in Codice Cracoviensi 569 servata edidit M. Curtze. Leipzig 1899, 37); aber wie schon M. Curtze in einer Anmerkung zu dieser Stelle vermutete, dürfte es sich bei den von Simplicios erwähnten alten Manuskripten nicht um authentische Euklidtexte, sondern um die von Proklos erwähnte Ausgabe des Heron gehandelt haben (wie Anm. 201).

²⁰³ *Metaph.* IV 3, 1005a20-21.

²⁰⁴ B. Einarson, On certain mathematical terms in Aristotle's logic, *American Journal of Philology* 57 (1936), 33-54 und 151-172, dort 43.

²⁰⁵ Dazu verweise ich ergänzend auf die Parallelstelle XI 4, 1061b17-25, an der Euklids Allgemeine Einsicht I.3 expressis verbis angeführt wird, wozu noch angemerkt sei, daß Aristoteles die $\alpha\chi\iota\omega\mu\alpha\tau\alpha$ der Mathematiker hier (wie in den Zeilen *Anal. post.* I 11, 77a26-31, auf die sich wahrscheinlich der Hinweis auf $\tau\alpha \alpha\nu\alpha\lambda\upsilon\tau\iota\chi\alpha$ in der zum Kontext der oben angeführten Worte aus *Metaph.* IV 3 gehörigen Zeile 1005b4 bezieht), als $\tau\alpha \kappa\omicron\lambda\nu\alpha$ bezeichnet. In den Zeilen *Anal. post.* I 2, 72a14-18 erwähnt er nach seinen Ausführungen über diese Prinzipien dagegen, daß man diese ersten Sätze gewöhnlich $\alpha\chi\iota\omega\mu\alpha\tau\alpha$ zu nennen pflege, während an der Parallelstelle 10, 76b11-16 von 'den sogenannten allgemeinen Axiomen' ($\tau\alpha \kappa\omicron\lambda\nu\alpha \lambda\epsilon\gamma\omicron\mu\epsilon\nu\alpha \alpha\chi\iota\omega\mu\alpha\tau\alpha$) die Rede ist.

"[Man darf nicht übersehen, daß die Beweise, die sich auf eine gewisse Klasse von Objekten beziehen, mitunter einen weit allgemeineren Geltungsbereich haben. Als Beispiel dafür sei der Satz V.16 aus den *Elementen* genannt], nach dem man die Innenglieder einer Proportion vertauschen kann, falls es sich dabei [jeweils um vier] Zahlen, Linien, Körper oder Zeit[intervalle] handelt.²⁰⁶ Früher hat man ihn für alle [diese Objektbereiche] getrennt voneinander verifiziert, obwohl er sich mit einer einzigen Begründung für alle beweisen läßt. Weil es aber noch nichts gab, was alle diese artverschiedenen [Objekte], nämlich Zahlen, Längen, Zeit[intervalle] und Körper unter einen Namen brachte, nahm man sie zunächst getrennt vor. Jetzt führt man diesen Nachweis jedoch allgemein; denn [der fragliche] Satz gilt nicht, weil er sich auf eine spezifische Besonderheit der Linien oder Zahlen bezieht, sondern weil er eben dem zukommt, was man als etwas Allgemeines zugrunde legt."²⁰⁷

Obwohl die Allgemeinen Vorstellungen aus den *Elementen* in den Beweisen aus dem V. Buch, das Euklids allgemeine Proportionentheorie enthält, nirgends explizit angeführt werden, ist die oben zitierte Stelle aus der *Zweiten Analytik* auch schon von Proklos im Zusammenhang mit diesen Prinzipien diskutiert worden.²⁰⁸ Dazu zeigt sie zusammen mit der Anmerkung aus *Anal. post.* I.10, nach der Sätze von der Art der Allgemeinen Vorstellung I.3 nur deshalb als allgemeingültig bezeichnet werden, weil sie der Geometer für den Bereich der ausgedehnten Größen und der Zahlentheoretiker für die Zahlen aussprechen kann,²⁰⁹ daß die allgemeine Proportionentheorie die Mathematiker und Wissenschaftstheoretiker von damals vor ein schwieriges Problem stellte. Aristoteles erwähnt an der eben zitierten Stelle nämlich, daß man zunächst nicht wußte, welchen Namen man dem Objektbereich geben sollte, auf den die Sätze der allgemeinen Proportionentheorie anwendbar sind; aber noch auffälliger ist, daß er den Namen, den die Mathematiker schließlich

²⁰⁶ Der Satz V.16 aus den *Elementen* besagt also, daß unter den oben angegebenen Bedingungen mit der Proportion $A:B = C:D$ auch die Beziehung $A:C = B:D$ gilt.

²⁰⁷ *Anal. post.* I.5, 74a18-25.

²⁰⁸ Proklos (wie Anm. 21), 7.13-8.4 und 195.23-196.14

²⁰⁹ *Anal. post.* I.10, 76a37-b2, siehe auch *Metaph.* IV 3, 1005a19-29 und XI 4, 1061b17-25.

benutzt haben sollen, überhaupt nicht nennt. Das legt den Schluß nahe, daß man zur Zeit von Aristoteles noch nicht bereit war, den Terminus *ποσόν*, bei dem es sich wahrscheinlich um den in *Anal. post.* I.5 unterdrückten Namen handelt,²¹⁰ als Bezeichnung für eine Klasse von abstrakten Gegenständen anzusehen, die existieren und damit den Objektbereich für eine mathematische Theorie abgeben.

Soweit ich sehe, ist diese metatheoretische Auffassung erst von Proklos vertreten worden. Proklos diskutiert im Zusammenhang mit einigen Ausführungen zu der eben erwähnten Textstelle aus *Anal. post.* I.5 eine Reihe von allgemeinen Prinzipien und Theoremen, die sich auf alle Gattungen der mathematischen Objekte beziehen, und "Abkömmlinge der einen Wissenschaft sind, die sich insgesamt über alle mathematischen Kenntnisse erstreckt".²¹¹ Wie das Wort 'Abkömmling' verrät, spielt er damit auf das sogenannte *Sonnengleichnis* aus Platons *Politeia* an,²¹² und mithin denkt Proklos hier zunächst noch nicht an eine mathematische Theorie von einem hohen Allgemeinheitsgrad, sondern an Platons Dialektik, die nach der Erkenntnistheorie aus dem *Liniengleichnis* die Satzsysteme der Mathematiker begründen soll. Ein wenig später spricht Proklos dann aber expressis verbis von "der einen und vollständigen mathematischen Wissenschaft, die auf einfache Weise die Prinzipien aller [mathematischen] Einzelwissenschaften in sich begreift, ... während die Dialektik noch höher angesiedelt [sein soll]".²¹³ In diesem Sinne hatte er bereits ein wenig früher ausgeführt, es gäbe "nicht nur Kenntnisse und Wissenschaften von Objektbereichen, die voneinander abgetrennt sind [wie die Zahlen und die ausgedehnten Größen. Nach Proklos haben wir nämlich] außerdem eine Wissenschaft von immateriellen [Objekten], die dem geistigen Schauen näher zugeordnet sind [als die Zahlen und die ausgedehnten Größen]".²¹⁴ Darüber steht dann wieder die Dialektik als Wissenschaft vom Seienden als Seienden, und damit dürfte klar sein, daß Proklos mit diesem Detail seiner Wissenschaftstheorie der Auffassung von

²¹⁰ *Metaph.* XI 4, 1061b19-25; siehe auch *Anal. post.* I.32, 88a36-b3 sowie Proklos (wie Anm. 21), 9.21.

²¹¹ Proklos (wie Anm. 21), 7.17-19.

²¹² ἔκγονος, *Politeia* VI 506e3 und 507a3.

²¹³ Proklos (wie Anm. 21), 44.2-10.

²¹⁴ Proklos (wie Anm. 21), 9.11-14.

Autoren wie Pasch, Hilbert und Baldus bereits weit näher kommt als Aristoteles. Wie auch schon von I. Mueller betont worden ist, läßt die metatheoretische Deutung der Mathematik im *Corpus Aristotelicum* ebenso wie die Praxis aus den *Elementen* immer wieder an die Ausführung von Gedankenexperimenten mit idealisierten physikalischen Objekten denken.²¹⁵ Bei Proklos ist der Objektbereich der allgemeinen Proportionentheorie dagegen bereits anschauungsfrei und damit de facto nur noch implizit durch das Satzsystem aus dem V. Buch der *Elemente* definiert, doch diese Konsequenz hat er selbst noch nicht gezogen.

Von Aristoteles ist das Konzept der allgemeinen mathematischen Prinzipien dagegen nach einer andern Richtung als von Proklos weiterentwickelt worden. Wie er in seinen wissenschaftstheoretischen Exkursen ausführt, sollen die ἀξιώματα alle Wissenschaften und nicht nur die Lehren der Mathematiker betreffen, doch das paßt nicht so recht zu seinem schon mehrfach erwähnten Beispiel der Allgemeinen Vorstellung I.3, die bestenfalls für alle quantitativ argumentierenden Wissenschaften von Bedeutung ist. In der *Metaphysik* gibt es jedoch mehrere Textstellen,²¹⁶ an denen Aristoteles statt dessen den Satz vom Widerspruch als ein für alle Wissenschaften unverzichtbares Prinzip anführt,²¹⁷ zu dem als zweites Beispiel noch der Satz vom ausgeschlossenen Dritten kommt, der allen indirekten Beweisen zu Grund liegt. Dabei betont er übrigens wieder, daß auch ein solcher Grundsatz nur insofern allgemein ist, als er für den Objektbereich jeder einzelnen Wissenschaft gilt.²¹⁸ Zu den eben erwähnten Prinzipien (der Logik²¹⁹) gibt es in den

²¹⁵ Siehe I. Mueller (wie Anm. 10), 291-292. Dazu sei noch angemerkt, daß Muellers von mir weiter oben kritisierte Deutung der Definitionen aus den Schriften der griechischen Mathematiker in dem später geschriebenen Aufsatz *On the notion of a mathematical starting point in Plato, Aristotle, and Euclid* (siehe Anm. 19), auf die ich gleich noch einmal eingehen werde, mit seinen oben referierten Ausführungen inkompatibel ist.

²¹⁶ *Metaph.* III 1, 995b8-10, 2, 996b26-34 und IV 3, 1005b17-23.

²¹⁷ Wie die Benutzung des Terminus ἀνολόγητον in der Zeile 1005b14 verrät, schreibt Aristoteles dem Satz vom Widerspruch dieselbe Rolle zu wie Platon der Idee des Guten (siehe Anm. 47).

²¹⁸ Dazu verweise ich ergänzend auf *Anal. post.* I 11, 77a22-31.

²¹⁹ Auf die Tatsache, daß Aristoteles im Rahmen seiner Ausführungen über die κοινὰ ἀρχαί im III. und VI. Buch der *Metaphysik* als Beispiel nur Grundsätze der Logik

Werken der griechischen Mathematiker nun aber keine Parallele, und das legt die Vermutung nahe, daß Aristoteles den Begriff des allgemeinen Prinzips samt des dazugehörigen Terminus Axiom ursprünglich von den Mathematikern übernommen hat, die ihn damals im Rahmen einer metatheoretischen Diskussion über die Grundlagen der Mathematik benutzten. Danach hat er ihn aber bald auf alle Wissenschaften übertragen, und damit ist klar, warum er den Begriff des allgemeinen wissenschaftlichen Prinzips im IV. Buch der *Metaphysik*, in dem es um die Begründung der Wissenschaften in toto (und nicht vornehmlich um die Lehren der Mathematiker und Naturwissenschaftler) geht, nur noch an Hand von logischen Grundsätzen erläutert.

I. Mueller ist ebenfalls zu dem Ergebnis gekommen, daß die oben skizzierte Verallgemeinerung des ἀξίωμα-Begriffs eine eigentümliche Leistung des Aristoteles ist, die von den griechischen Mathematikern nie rezipiert wurde.²²⁰ Da Mueller alle wissenschaftstheoretischen Ausführungen aus dem *Corpus Aristotelicum* miteinander verbindet, ohne auf chronologische Entwicklungen zu achten, kommt er jedoch zu einer weiter oben schon unter einem etwas anderen Gesichtspunkt kritisierten Deutung der aristotelischen Prinzipienlehre, die er am Ende selbst als problematisch bezeichnet.²²¹ Ausgangspunkt seiner Überlegungen sind Passagen wie die Zeilen 997a5-11 aus *Metaphysica* III.2, in denen Aristoteles vorab erklärt, daß zu jeder Wissenschaft eine Gattung als Objektbereich gehört. Dazu kommen die Eigenschaften der Elemente dieser Gattung und schließlich nennt er dann noch die Axiome. Dabei fällt auf, daß nirgends (mehr expressis verbis) von den Definitionen die Rede ist. Parallelstellen dazu findet man auch in der *Zweiten Analytik*,²²² und daraus schloß Mueller zusammenfassend, daß Aristoteles in den (kanonischen) Definitionen durchgängig bloße Nominaldefinitionen sah, die nicht als wissenschaftliche Prinzipien fungieren können.²²³ Zur Stützung dieser Interpretation erklärt Mueller die von mir oben diskutierten grundlegenden Ausführungen des Aristoteles über die Prinzipien der

anführt, ist schon von W. D. Ross hingewiesen worden (*Metaphysics*, wie Anm. 14), I 262.

²²⁰ I. Mueller (wie Anm. 19), 76.

²²¹ I. Mueller (wie 19), 80.

²²² *Anal. post.* I 7, 75a38-b6; 10, 76b11-16 und 11, 77a22-31.

²²³ I. Mueller (wie Anm. 19), 78-81.

beweisenden Wissenschaften aus *Anal. post.* I.2 und I.10 zu "problematischen Passagen aus der *Zweiten Analytik*,"²²⁴ doch eben das scheint mir unter Berücksichtigung einer Bemerkung aus dem II. Buch dieser Schrift, nach der alle Wissenschaften aus kanonischen Definitionen hervorgehen,²²⁵ problematisch zu sein.

Eine genaue Analyse der von Mueller zur Stützung seiner These angeführten Stellen aus der *Zweiten Analytik* legt ohnehin eine ganz andere Deutung nahe. Dort geht es nämlich direkt oder indirekt um die Frage, ob sich die spezifischen Beweisverfahren einer Fachwissenschaft auf andere Wissenschaften übertragen lassen. Die Antwort darauf lautet, daß man zwar die Axiome per analogiam auf unterschiedliche Objektbereiche anwenden darf; aber im allgemeinen ist die Übertragung von Sätzen und Beweisen auf eine andere Gattung unzulässig, weil man die besonderen Eigenschaften der Elemente der einzelnen Objektbereiche in Betracht ziehen muß.²²⁶ So läßt sich beispielweise nicht jeder Satz der Geometer arithmetisch formulieren und beweisen; denn Zahlen sind stets kommensurabel,²²⁷ und daher gibt es zu dem Satz, daß die Seite und die Diagonale in ein- und demselben Quadrat miteinander inkommensurabel sind, in der antiken Arithmetik kein Gegenstück. Die fraglichen Stellen aus der *Zweiten Analytik* besagen also nicht, daß man zur Begründung der Wissenschaften neben den Axiomen (und einigen Existenzpostulaten) keine weiteren Prinzipien braucht. Sie bekräftigen nur, daß sie die einzigen fachübergreifenden Prinzipien sind, neben denen man weitere erste Sätze benötigt, die den Besonderheiten der fachspezifischen Objektbereiche angepaßt sein müssen, und somit scheint mir Muellers Deutung der Prinzipienlehre aus der *Zweiten Analytik* insgesamt verfehlt.

Ich habe bereits darauf hingewiesen, daß die provisorischen Prinzipien aus den *Elementen* ohne eine durchgängige Systematik auf zwei Blöcke mit unbewiesenen Sätzen verteilt sind, die diesem Werk voranstehen. Wie der

²²⁴ I. Mueller (wie Anm. 19), 70.

²²⁵ *Anal. post.* II 17, 99a22-23; siehe auch *Topica* VIII 3, 158b1-4, *De anima* II, 402b16 - 403a2 und *Metaph.* XIII 4, 1078b22-25

²²⁶ *Anal. post.* I 7, 75a38-b12.; siehe auch II, 77a26-31.

²²⁷ Siehe Anm. 173.

Kommentar des Proklos zum I. Buch der *Elemente* zeigt,²²⁸ haben sich die nacheuklidischen Mathematiker jedoch schon bald bemüht, in diese Listen eine Systematik hineinzulesen. Dabei verfolgten sie unterschiedliche Strategien, die dazu führten, daß es zur Zeit von Proklos bereits mehrere Traditionen der *Elemente* gab, in denen die Prinzipien unterschiedlich angeordnet und zum Teil wohl auch schon mit besonderen Termini bezeichnet waren.²²⁹ Geminos, der sowohl in den Axiomen als auch in den Postulaten unbeweisbare, fachspezifische Prinzipien sah, vertrat nach Proklos die Ansicht, daß mit den Axiomen eine Behauptung aufgestellt wird, die selbst der Ungebildete sofort als richtig anerkennt, während man mit den Postulaten etwas zu erfassen versucht, das so leicht vorzustellen ist, daß der Verstand bei diesem Unternehmen nicht ermüdet, weil er dabei keinerlei umständliche Konstruktionen auszuführen braucht. Wenn man weiter berücksichtigt, daß zwischen den Axiomen und Postulaten nach Geminos mutatis mutandis der gleiche Unterschied bestehen soll wie zwischen Theoremen und Konstruktionsaufgaben, ist klar, daß er in den Postulaten Grundsätze sah, mit denen die Konstruierbarkeit von elementaren geometrischen Gebilden gefordert wird.²³⁰ Da Geminos die Postulate I.4 und I.5 aus den *Elementen* für beweisbar hielt, schloß er sie (wie Proklos) aus der Menge der mathematischen Prinzipien aus, und damit entschied er sich zugleich gegen die Erklärung des Terminus *ἀξιώματα* aus *Anal. post.* I.10, nach der die Postulate zu den beweisbaren Sätzen gehören und somit zu den bloß provisorischen Prinzipien zu rechnen sind.²³¹ Proklos neigte dagegen mehr zu der von ihm irgendwelchen "anderen"²³² zugeschriebenen Auffassung, daß die Postulate fachspezifische Prinzipien sein sollen, während sich die Axiome bei ihm (wie bei Aristoteles) auf alle Theorien (der Mathematiker) beziehen.²³³ Aus diesem Grund

²²⁸ Proklos (wie Anm. 21), 178.1-198.15.

²²⁹ Proklos (wie Anm. 21), 183.8 und 198.3-5.

²³⁰ Proklos (wie Anm. 21), 178.9-179.14, 181.4-15 und 181.24-182.6.

²³¹ Proklos (wie Anm. 21), 182.14-20.

²³² Proklos (wie Anm. 21), 182.6.

²³³ In den Zeilen 184.12-29 seines *Kommentars zum I. Buch der Elemente* (wie Anm. 21) skizziert Proklos die Grundzüge einer Wissenschaftstheorie, nach der es neben fachspezifischen und fachübergreifenden Axiomen auch fachspezifische und fachübergreifende Postulate gibt. Dazu führt er den Satz, daß jede ausgedehnte Größe unbeschränkt zerlegbar ist, als Beispiel für ein geometrisches und damit fachspezifisches Axiom an, während die Forderung, daß sich jedes Quantum [durch ein iteriertes

plädierte er dafür, die Allgemeine Vorstellung I.10, die er ohnehin für entbehrlich hielt, aus der Liste der Axiome auszuschneiden (bzw. ganz zu streichen),²³⁴ während er das Gleichheitskriterium aus der Allgemeinen Vorstellung I.8, nach dem gleich sein soll, was aufeinander paßt, stillschweigend als ein Axiom akzeptierte, obwohl es sich bei diesem Satz sicherlich um ein fachspezifisches Prinzip der Geometer handelt. Nach der wissenschaftstheoretischen Deutung der Prinzipien durch Geminos wäre die Zuordnung der Allgemeinen Vorstellung I.8 zum dritten Block der Prinzipien aus dem I. Buch der *Elemente* dagegen zu rechtfertigen, wenn diese Liste damals schon den Titel $\kappa\alpha\upsilon\alpha\iota\ \epsilon\upsilon\nu\omicron\alpha\iota$ trug. Wie ich bereits ausführte, sind diese Prinzipien nach Geminos nämlich insofern allgemein, als sie jedem Menschen einsichtig sind. In diesem Sinne wird der Ausdruck $\kappa\alpha\upsilon\alpha\iota\ \epsilon\upsilon\nu\omicron\alpha\iota$ auch von Proklos verwendet,²³⁵ und wenn man weiter berücksichtigt, daß er ihn in seinem *Kommentar zum ersten Buch der Elemente* zweimal an Stellen benutzt,²³⁶ in deren Kontext Ausführungen von Geminos diskutiert werden, liegt die Vermutung nahe, daß der fragliche Terminus von diesem spätantiken Kommentator in die wissenschaftstheoretische Diskussion über die Prinzipien aus dem I. Buch der *Elemente* eingeführt worden ist.

Abschließend sei noch einmal betont, daß alle Untersuchungen über die Prinzipien der griechischen Mathematik in der Vergangenheit von der unzutreffenden Voraussetzung ausgingen, daß die Titel, die J. L. Heiberg in seiner Ausgabe der *Elemente* über die Blöcke mit den unbewiesenen Sätzen

Aneinanderfügen ein und derselben Grundgröße] über jede Grenze hinaus vergrößern läßt, ein fachübergreifendes Postulat der Geometer und Zahlentheoretiker sein soll. Da Proklos, der diese Lehre auffälligerweise nicht kritisiert, das oben angeführte Axiom der Geometer an einer anderen Stelle (als eine Allgemeine Vorstellung der Geometer bezeichnet und) Geminos zuschreibt (278.9-279.2), liegt zunächst die Vermutung nahe, daß die zugehörige Wissenschaftstheorie von Geminos vertreten wurde; aber das kollidiert empfindlich mit den oben bereits referierten Berichten des Proklos über dessen Interpretation der Termini $\acute{\alpha}\xi\acute{\iota}\omega\mu\alpha$ (bzw. $\kappa\alpha\upsilon\eta\ \epsilon\upsilon\nu\omicron\alpha\iota$) und $\alpha\acute{\iota}\tau\tau\eta\mu\alpha$.

²³⁴ Eine von al-Nayrizi referierte Bemerkung des Simplicios (wie Anm. 202), 35, nach der dieses Prinzip in den alten Handschriften nicht zu finden war, ist wahrscheinlich wieder dahingehend zu deuten, daß es in Herons Ausgabe der *Elemente* fehlte (siehe Anm. 202).

²³⁵ Siehe Proklos (wie Anm. 21), 76.15-17 und 109.13-20.

²³⁶ Proklos (wie Anm. 21), 182.12 und 278.14.

gesetzt hat, von Euklid stammen. Diese Titel verleiteten dazu, in diese Listen eine Systematik hineinzuprojizieren, die allenfalls Versuche von spätantiken Autoren widerspiegelt, bei Euklid eine solche Systematik ausfindig zu machen, während die oben vorgelegte Untersuchung ein erstes Bemühen ist, die metatheoretischen Vorstellungen der griechischen Mathematiker unabhängig von dieser in die Irre führenden Gängelung zu ermitteln.