

KRITISCHE BERECHNUNGEN
der
MUSIKALISCHEN TÖNE
und der
DIATONISCHE TONLEITERN
von

Professor Dr. Wilhelm Matzka
K.K. Regierungsrath u. ordentl. Mitglied der Kön. Böhm.
Gesellschaft der Wissenschaften.
(Abhandlungen der Königl. Böhm. Gesellschaft der Wissenschaften,
VI. Folge. 11 Band.)
(Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe Nro. 7)

P R A G
Verlag der königl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften-
Druck von Dr. Ed. Grégr.
1882.

Während meiner Lehrthätigkeit als ordentl. Professor der Mathematik an der philos. Fakultät der Prager Universität, pflegte ich seit dem Oktober 1856 über mathematische Partien der wissenschaftlichen Physik Vorlesungen abzuhalten. Natürlich kam hierbei in manchen Semestern die Lehre vom Schall - die Akustik - und in dieser die Lehre von den Tönen zum Gegenstand solcher Vorträge. Bei dieser letzteren, insofern die in der gewöhnlichen Musik verwendbaren Töne in Betracht zu ziehen waren, vermochte die in den Lehrbüchern der Physik vorkommende Bildung oder Zusammenstellung der, der Musik zur Grundlage dienenden, diatonischen Tonleitern mich niemals vollständig zu befriedigen. Denn Chladni's des berühmten Akustikers Princip, dass die als unechte Brüche dargestellten Zahlwerthe der musikalischen Töne in ihren Nennern und Zählern keine andere Primzahl denn 2, 3, 5 als Faktoren oder Theiler enthalten dürfen, wenn anders die Töne das Gehör nicht schrill klingend beleidigen sollen, möchte sich wohl kaum empirisch begründen lassen. Auch das Princip, dass die Zahlwerthe der Töne der Tonleitern durch die möglich kleinsten Nenner und Zähler dargestellt werden müssen, kann über die Wahl zweier nur äusserst wenig von einander verschiedenen Tonwerthe keineswegs entscheiden; wie z.B.

ob $\frac{9}{8}$ o. $\frac{10}{9}$ die Secund, $\frac{15}{8}$ o. $\frac{16}{9}$ die Septim sein solle.

Endlich kann über diese Wahl auch nicht die Empirie, die Praxis der Musik oder das Gehör des Musikers vollgiltig entscheiden, weil ein äusserst fein gebildetes Gehör schon dazu gehört, um 2 Töne, deren Intervall nicht grösser als ein syntonisches Komma $\frac{81}{80}$ ist,

deren Zahlwerthe oder Schwingungszahlen nemlich im Verhältniss 80:81 stehen, strengstens unterscheiden zu können.

So oft auch seither die Reihe meiner anderweitigen Gedanken zufällig von der Erinnerung an diese Mangelhafte Begründung der Tonleitern erfolglos durchkreuzt wurde, so scheint es mir doch endlich vor einiger Zeit gelungen zu sein, die richtigen und festen Anhaltspunkte für die streng wissenschaftliche Ausmittlung der musikalischen Töne überhaupt und ihre scharf bewiesene aufsteigende Anordnung in Tonleitern ausgedacht zu haben.

Für jene Ausmittlung benütze ich vornehmlich zuvörderst die Verkürzung gleichtönender Saiten um je einen *a l i q u o t e n* Theil, wie um ihre Hälfte, ihr Drittel, ihr Viertel u.s.f., und danach die Zusammenstellung jedes Paares so gefundener Töne in Ihr aufsteigendes Verhältniss, und endlich die Theilung beider Glieder d des Verhältnisses durch sein erstes Glied, damit das entstehende zweite Verhältnissglied den Zahlwerth eines neuen Tones angibt.

Die Auswahl und Reihung der in eine Tonleiter aufzunehmenden Töne knüpfe ich danach schliesslich an die unnachsichtliche Forderung, dass sie so oft als möglich paarweis consoniren oder harmoniren, d.h., dass ihr Zusammenklang im menschlichen Gemüthe ein angenehmes, bald freudiges, bald ernstes Gefühl erwecke, dass demnach in jeder Tonleiter möglichst viele eigentliche wohlthönige Zweiklänge, nemlich Quinten, Durterzen und Mollderzen sich vorfinden; denn die Musik als Sprache des menschlichen Gemüthes erheischt doch unnachsichtlich Harmonie und Melodie ihrer Töne.

Möge der sachkundige Leser dieses kleinen Aufsatzes die von mir dargelegten Gedanken freundlich, und nicht ohne Befriedigung entgegennehmen.

I.

Eine einfache rechnende Bestimmung musikalischer Töne und deren Zusammenstellung in die diatonischen Tonleitern.

Par.1. Bekanntlich gibt es viele Körper, welche unter gewissen Umständen schallen, klingen oder tönen, also einen Schall, Klang oder Ton hervorbringen. An solchen bestimmten Tönen unterscheiden wir nebst Anderem ihre Höhe oder Tiefe, indem wir von zwei gleichzeitig oder rasch nacheinander folgenden Tönen, den einen den höhern, den anderen den tieferen Ton nennen. Als Ursache dieser mannigfaltigen Höhen der Töne erklärt die in der Naturlehre (Physik) vorkommende Lehre vom Schall (Akustik) den Umstand, dass derartige Körper in kurzen Zeiten sehr viele Schwingungen (Oscillationen) oder Erzitterungen (Vibrationen) zu machen veranlasst sind.

Um zugleich die Höhen der Töne messen, ihre Verhältnisse aufzustellen und hiernach sie selbst durch Zahlen darzustellen, nimmt die Akustik an, dass die Höhen der Töne klingender Körper sich wie die Anzahlen der von ihnen in einer gewissen kurzen Zeit (z.B. einer Secunde) hervorgebrachten Schwingungen verhalten, nemlich dass ein Ton 2 Mal, 3 Mal, 4 Mal u.s.w. so hoch als ein anderer bestimmter Ton ist, wenn der ihn erzeugenden Schwingungen 2 Mal, 3 Mal, 4 Mal u.s.f. so viele sind, als die diesen letzteren Ton hervorbringenden.

Ist demnach die, diesen letzteren zur Vergleichung festgestellten Ton hervorbringende, Anzahl Schwingungen eine gewisse, bestimmte, so darf man sie für die Erforschung der Verhältnisse der Tonhöhen kurz durch die Zahl 1 darstellen, daher jene zweifache Anzahl durch 2, jene dreifache durch 3, jene vierfache durch 4 u.s.f. Der oben erwähnten Proportionalität (Verhältnissmässigkeit) der Tonhöhen zu den Schwingungszahlen entsprechend, kann man demnach die Höhe des zu Grund gelegten Vergleichungstones durch die Zahl 1 und die Höhen der mit ihm verglichenen Töne durch 2, 3, 4 u.s.f. ausdrücken, ja sogar zur Kürzung der Rede sich erlauben, diese Tonhöhen oder Tonwerthe und auch die Töne selbst 1, 2, 3, 4 u.s.f. zu nennen.

Noch mehr, wenn die einen Ton hervorbringende Zahl von Schwingungen, z.B. fünf Dritttheile der den Vergleichungston 1 erzeugenden Anzahl Schwingungen beträgt, d.h. wenn der jenen Ton gebende Körper so oft 5 Schwingungen macht, als der den Vergleichungston erzeugende nur 3 Mal schwingt; so stellt man kurzweg die Höhe oder den Werth jenes Tones, oder auch ihn selbst durch den Bruch $\frac{5}{3}$ dar.

Par.2. Die den Menschen interessantesten (anziehendsten) und für ihr Gefühlsleben nützlichsten Töne sind die m u s i k a l i s c h e n. Ihr Hauptvorzug liegt darin, dass sie von Sachkundigen mittelst geeigneter Werkzeuge (Musik-Instrumente) und ihrer angemessenen Behandlung mit solcher Bestimmtheit hervorgerufen werden können, dass jeder Ton wann und wie oft auch er gehört werden möge, doch jedesmal als genau derselbe anerkannt wird; wodurch es möglich wird, die musikalischen Töne durch besondere Namen und Schriftzeichen zu fixiren (festzumachen). Da die Musik als Sprache der menschlicher Gemüther auf diese theils erfreuend, aufmunterns, theils betäubend, herabstimmend einwirken soll; so können ihre Töne nicht willkürlich zusammengegriffen und zu Gehör gebracht werden, sondern dieselben sind dermassen zu wählen, dass in jedem Musikstück so viel als möglich Paare, dem menschlichen Gehöre und Gemüthe angenehm zusammenklingender Töne miteinander verbunden werden.

Par.3. Zur sicheren Auswahl von derartigen consonirenden Tonpaaren lassen sich am vortheilhaftesten g e s p a n n t e S a i t e n verwenden. Wir setzen hier stets voraus, dass dieselben aus einem und demselben Stoffe - Messing, Stahl, Silber oder Darm - und durchaus gleich dick erzeugt und durch Gewichte oder sonstige Mittel gleich stark gespannt seien, so dass sie sich nur in ihrer Länge von einander unterscheiden, und höher oder tiefer klingen, je nachdem sie kürzer oder länger sind.

Derartige Saiten bieten uns nemlich für die bevorstehende Untersuchung höchst wichtige Vorthelle in dem von der Akustik erwiesenen Satze: Dass die Schwingungszahlen solcher gleichartiger, (gleich dicker und gleich gespannter) Saiten sich zu einander verhalten wie umgekehrt deren Längen. Denn da (gemäss Par.1) die Höhen zweier Töne sich so wie die Schwingungszahlen der sie erzeugenden Körper verhalten, so müssen auch die Höhen der Töne zweier soeben beschriebenen Saiten ebenfalls sich verhalten, wie umgekehrt die Längen dieser Saiten. Z.B. Wenn die Längen zweier Saiten sich zu einander verhalten wie 15 : 8, so verhalten sich die Schwingungszahlen sowohl als auch die Höhen der Töne dieser Saiten umgekehrt wie 8 : 15, d.h. wenn man dem tieferen Tone der längeren Saite die Höhenstufe 8 anwies, müsste man dem höheren Tone der kürzeren Saite die Stufe 15 anweisen.

Derlei Tonhöhen-Verhältnisse, wie 8 : 15, werden wir im Folgendem jedesmal steigend, vom tieferen Tone zum höheren sich erhebend, anordnen, und indem wir ihre beiden Glieder durch das erste theilen, auf die Form 1 : $\frac{15}{8}$ bringen. Dadurch stellen wir nemlich die Höhe des tieferen der beiden verglichenen Töne, als e i n e g e w i s s e bestimmte Stufe einnehmend durch die Zahl 1 (Eins), dagegen die Höhenstufe des höheren Tones durch den unechten Bruch $\frac{15}{8}$ dar;

welche Darstellung zur Vergleichung mehrerer Töne unter sich vortheilhaft verwendbar ist, indem wir zur Abkürzung der Rede die Töne und ihre Höhen mit den die ersteren darstellenden unecht gebrochenen Zahlen selbst, wie hier mit 1 und $\frac{15}{8}$ bezeichnen und benennen. Auf Saiten der obigen Art bezogen, wofern wir die Länge der den

der den Ton 1 gebenden Saite durch 1 darstellen, wird demnach der durch den Bruch $\frac{15}{8}$ dargestellte Ton von derjenigen Saite gegeben werden, deren Länge den umgekehrten (echten) Bruch $\frac{8}{15}$ (acht fünfzehnte Theile) jener Länge 1 beträgt; woraus erhellet, wie aus der Länge der Saite die Höhe ihres Tones, und umgekehrt, wie aus der Höhe eines Tones die Länge der ihn hervorbringenden Saite durch blosse Umkehrung jenes echten oder dieses unechten Bruches sogleich gefunden werden kann.

Par.4. Zur Aufsuchung von geeigneten musikalischen Tönen denken wir uns über einem Resonanzboden beliebig viele (zunächst etwa 12) gleich lange Saiten obiger Art gleich stark gespannt, deren Länge als eine gewisse bestimmte, übrigens wie immer grosse, wir insofern mit 1 bezeichnen, als wir sie zum Längenmass oder zur Einheit der Längen überhaupt annehmen dürfen. Sämmtliche diese Saiten müssen nun einen und denselben Ton geben, den wir gleichfalls als durch die Zahl 1 darstellen dürfen.

Par.5. Mehrere dieser Saiten, und zwar von der letzten gegen die erste hin, denken wir uns je um einen *a l i q u o t e n* (irgend vielten) Theil ihrer gemeinsamen Länge 1, namentlich der Reihe nach um $\frac{1}{2}$ (die Hälfte oder ein Zweitel) um

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \text{ u.s.w.},$$

also auf die Längen

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6} \text{ u.s.w.}$$

verkürzt, so dass sie (gemäss Par.3) beziehungsweise die Töne

$$2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5} \text{ u.s.w.}$$

hervorbringen.

Par.6. Bei der Vergleichung der Höhen der Töne dieser Saiten können wir den von der längsten Saite 1 sich ergebenden Ton 1, in Bezug auf die von den kürzeren Saiten erfolgenden Töne, den *G r u n d t o n* nennen. Vergleichen wir mit diesem Tone den der nächst kürzeren Saite $\frac{1}{2}$, so verhalten sich die Höhen der Töne dieser

Saiten, wie umgekehrt ihre Längen, daher wie

$$\frac{1}{2} : 1 = 1 : 2;$$

folglich gibt uns die Saite $\frac{1}{2}$ den Ton 2.

Zu diesen 2 Tönen 1 und 2 der Saiten 1 und $\frac{1}{2}$ nehmen wir nun den Ton der nächst längeren Saite $\frac{2}{3}$, d.i. den Ton $\frac{3}{2}$ und haben sonach die von den 3 Saiten

$$1, \frac{2}{3} \text{ und } \frac{1}{2}$$

hervorgebrachten aufsteigend geordneten 3 Töne

$$1, \frac{3}{2}, 2.$$

Den soeben gefundenen dritten Ton stellen wir sogleich mit dem nächst höheren Tone 2 in's Verhältniss, erhalten sonach für dieses

$$\frac{3}{2} : 2 = 1 : \frac{4}{3} \quad \text{a)}$$

und somit ergibt sich uns zum Grundtone 1 der neue vierte Ton $\frac{4}{3} = 1\frac{1}{3} = 1.333$, den die Saite $\frac{3}{4}$ hervorbringen muss, und der in Absicht auf Höhe zwischen den Tönen 1 und $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ liegt.

Wir haben demnach von den 4 Saiten

$$1, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}$$

die 4 Töne

$$1, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, 2$$

und vergleichen (suchen die Aufsteigungsverhältnisse) des neuen Tones $\frac{4}{3}$ zu den schon gefundenen höheren 2, und $\frac{3}{2}$.

So erhalten wir

$$\frac{4}{3} : 2 = 1 : \frac{3}{2} \quad b)$$

mithin den schon bekannten Ton $\frac{3}{2}$; zum Zeichen, dass der Ton

$\frac{4}{3}$ der Saite $\frac{3}{4}$ auch ohne diese gefunden worden ist, folglich diese Saite für unseren Zweck wegbleiben konnte und schon die 3 Saiten

$$1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}$$

und die vier Töne

$$1, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, 2$$

kennen lehren.

Par.7. Vergleichen wir noch den neuen Ton $\frac{4}{3}$ mit dem höheren $\frac{3}{2}$, so finden wir das Verhältniss

$$\frac{4}{3} : \frac{3}{2} = 1 : \frac{9}{8} \quad a)$$

und mit ihm vom Grundtone 1 aus den neuen Ton $\frac{9}{8} = 1\frac{1}{8} = 1.125$, welcher zwischen den Tönen 1 und $\frac{4}{3}$ liegt. Sonach haben wir die fünf Töne

$$1, \frac{9}{8}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, 2.$$

Stellen wir auch diesen eben gefundenen Ton $\frac{9}{8}$ mit den 3 höheren Tönen 2, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, so erhalten wir die Proportionen (Verhältnissgleichheiten)

$$\frac{9}{8} : 2 = 1 : \frac{16}{9}$$

$$\frac{9}{8} : \frac{3}{2} = 1 : \frac{4}{3}$$

$$\frac{9}{8} : \frac{4}{3} = 1 : \frac{32}{27}$$

und daher wieder zwei neue Töne, nemlich

$$\frac{16}{9} = 1.778 \text{ und } \frac{32}{27} = 1\frac{5}{27} = 1.185,$$

welche mit den früheren 5 Tönen in aufsteigender Ordnung die sieben-gliedrige Reihe

$$1, \frac{9}{8}, \frac{32}{27}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{16}{9}, 2$$

geben.

Par.8. R ü c k b l i c k. Überschaute man den Gang und die Ergebnisse unserer bisherigen Rechnungen, so ersieht man, dass wir zur Bestimmung neuer Töne aus und zu beliebig viel bereits ermittelten Tönen, ein bisher wahrscheinlich noch nicht bekanntes Verfahren angewendet haben. Diesem gemäss stellen wir jeden zuletzt gefundenen Ton mit jedem schon bekannten Tone in das steigende Verhältniss beider Töne, theilen die zwei Verhältnissglieder durch den Zahlwerth des ersten Gliedes, betrachten die an dessen Stelle tretende Zahl 1 als den Tonwerth eines beliebigen Grundtones und daher den als Quotienten des zweiten Verhältnissgliedes sich ergebenden unechten Bruch als den auf diesen Grundwerth 1 sich stützenden Tonwerth des verwendeten bekannten höheren Tones, mithin auch als den Tonwerth eines neuen Tones. - Offenbar erhält man dasselbe Ergebniss wenn man den höheren jener zwei Tonwerthe durch den niedrigeren dividirt, oder mit dem umgekehrten niedrigeren Tonwerthe multiplirt.

Wir setzen dabei voraus, dass jeder der bekannten Töne einen Werth habe, der zwischen 1 und 2 liegt, d.h. grösser als 1, jedoch nicht grösser als 2 ist; dann muss, wie leicht zu ersehen, auch der neu berechnete Ton eben diese Eigenschaft besitzen, Zugleich erhellet entschieden, dass wir durch Wiederholung des beschriebenen Vorganges jede beliebige Menge von Tönen oder vielmehr von ihren Zahlwerthen zu berechnen vermöchten.

Par.9. B e t r a c h t u n g. Aus dem bisher Gelehrten ersehen wir sicher leicht das Verfahren, wie wir zu jedem neu gefundenen Tone und zu den bereits bekannten Tönen abermals neue Töne und die sie gebenden Saiten bestimmen können, folglich die Anzahl der Töne beliebig zu vermehren im Stande sind. Allein nicht alle so auffindbaren Töne vermögen der Musik, als einer Sprache menschlichen Gemüthern zu dienen, sondern man überzeuget sich im Laufe der Zeiten, bei dem Gebrauche der solche Töne erzeugenden musikalischen Instrumente - vornehmlich der Saiten-Instrumente (Harfe, Zither, Claviere), dass hauptsächlich bloss gewisse ausgewählte acht Töne für die Musik verwendbar sind, welche zwischen den Tönen 1 und 2 als dem tiefsten und höchsten enthalten sind.

Zur beliebigen lateinischen Nummerirung derselben nannte man den tiefsten 1, als den G r u n d t o n und den e r s t e n, die Prim, und den höchsten 2, als den a c h t e n, die C k t a v; von ihren 6 Zwischentönen hiess man den 2. die S e c u n d, den 3. die T e r z, den 4. die Q u a r t, den 5. die Q u i n t, den 6. die S e x und den 7. die S e p t i m. Hier werden wir diese 8 Töne am angemessensten ihrer Ordnung nach mit römisch I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII bezeichnen.

Für die Auswahl der noch erforderlichen 6 Zwischentöne, liess man sich von dem G r u n d s a t z e leiten, dass man so viele als möglich Paare angenehm zusammen oder rasch nach einander klingender (consonirender, harmonischer) Töne erhalte. - Lässt man nemlich 2 Töne mit einander oder unmittelbar nach einander hervorbringen (ertönen, erklingen) und wirkt dies angenehm auf das menschliche Gemüth oder Gehör, so nennt man sie ein c o n s o n i r e n d e s (wohlklingendes) Paar von Tönen, im Gegentheile ein d i s s o n i r e n d e s (misstöniges); dort hat man C o n s o n a n z (Harmonie, Wohlklang), hier D i s s o n a n z (Disharmonie, Missklang).

Par.10. Zwei ganz gleiche Saiten der (in Par.3) beschriebenen Art geben völlig gleiche Töne, eigentlich denselben oder einerlei Ton, wesshalb das Tonpaar (1, 1) oder das Tonverhältniss 1 : 1 der E i n e r l e i k l a n g oder der E i n k l a n g (der Unisone) heissen kann.

Das Tonpaar (1 und 2), die Prim (I) und die Oktav (VIII) erscheint beim Zusammentönen wie ein Paar gleicher Töne, nur (wie man sich auszudrücken pflegt) der Grundton in tieferer, die Oktave dagegen in höherer Lage; man kann es daher den *G l e i c h k l a n g* (Aequisono) nennen.

Zwischen diesen 2 Tönen (1 und 2) liegt der Ton $\frac{3}{2}$ (arithmetisch) mitten inne, insofern sein Zahlwerth $\frac{3}{2}$ eben so viel grösser als 1, als kleiner denn 2 ist; er bildet mit dem Grundtone 1 einen ausgezeichneten Wohlklang. Hierwegen hatte man ihn unter den aufzustellenden 8 Töne entweder den 4. oder den 5. sein zu lassen; da jedoch das Verhältniss $1 : \frac{3}{2}$ den Grundtones zum Tone $\frac{3}{2}$ grösser ist, als das Verhältniss $\frac{3}{2} : 2 = 1 : \frac{4}{3}$, des Tones $\frac{3}{2}$ zur Oktav, daher in Bezug auf Höhe der Ton $\frac{3}{2}$ näher an der Oktav als am Grundtone liegt, so machte man ihn ganz angemessen zum 5. Tone - zur Quint (V).

Par.11. Sonach sind folgende drei Töne festgestellt worden:

- a) der 1. Ton = 1, der Grundton, die Prim (I),
- b) der 5. Ton = $\frac{3}{2}$, die Quint (V), und
- c) der 8. Ton = 2, die Oktav (VIII).

Diese 3 Töne geben paarweise zusammenklingend folgende Consonanzen (angenehme Zweiklänge) mit nachstehenden Tonverhältnissen:

$1 : 2 = I : VIII$, Grundton zur Oktav,

$1 : \frac{3}{2} = I : V$, Grundton zur Quint, und

$\frac{3}{2} : 2 = V : VIII$, Quint zur Oktav.

Das letztere Verhältniss ist auch $= 1 : \frac{4}{3}$, und da beim Zusammenklingen aller drei Töne dieses Tonpaar den angenehmen Eindruck der beiden anderen nicht stört, musste der von der Saite $\frac{3}{4}$ gegebene Ton

$\frac{4}{3}$ gleichfalls in die fragliche Tonreihe mit aufgenommen werden, und zwar, weil er tiefer als die Quint ist, als 4. Ton, d.i. als Quart (IV). Eine weitere Begründung der Stellung dieses Tones $\frac{4}{3}$ liegt in seinem Verhältnisse zur Quint $\frac{3}{2}$, da sich verhält $\frac{4}{3} : \frac{3}{2} = 1 : \frac{9}{8} = 1 : 1\frac{1}{8}$, woraus erhellt, dass die Anzahl der den Ton $\frac{4}{3}$ hervorbringenden Schwingungen eines tönenden Körpers blos um $\frac{1}{8}$ (ein Achttheil) grösser als die Anzahl der den Ton $\frac{3}{2}$ erzeugenden Schwingungen desselben ist.

Par.12. Diese Erwägungen und der Inhalt des Par.7, der uns auf den Ton $\frac{9}{8} = 1\frac{1}{8}$ führte, berechtigen uns diesen, insofern er über dem Grundtone 1 in derselben Masse so hoch steht, als die Quint über der Quart, unmittelbar nach der Prim (I), also als den 2. Ton, nemlich als die Secund (II) in die Tonreihe einzustellen.

Es ist leicht ersichtlich, dass die Quint $\frac{3}{2}$, die achtgliedrige Tonreihe in eine tiefere fünfgliedrige, und in eine höhere dreigliedrige zerlegt; und sonach bleibt uns in jener ersteren nur noch der dritte Ton die Terz und in dieser letzteren nur noch der sechste und siebente Ton, die Sext und die Septim, zu bestimmten übrig. Natürlich muss jeder dieser noch einzureihenden Töne mit den bisher bestimmten 5 Tönen möglichst viel Paare consonirender Töne bilden, oder mit möglichst vielen derselben angenehm zusammenklingen.

Par.13. Zu diesem Zweck ziehen wir die Saite $\frac{4}{5}$ mit ihrem Tone $\frac{5}{4} = 1\frac{1}{4} = 1.25$ in Betracht, welcher in der zu Ende des Par.7 aufgestellten siebengliedrigen Tonreihe zwischen $\frac{9}{8} = 1.125$ und $\frac{32}{27} = 1.185$ einzureihen ist; folglich haben wir jetzt im Ganzen die Reihe der 8 aufsteigend geordneten Töne:

$$1, \frac{9}{8}, \frac{5}{4}, \frac{32}{27}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{16}{9}, 2.$$

Dieser neue nun in Betracht zu ziehende Ton $\frac{5}{4}$ ist offenbar höher als die Secund $\frac{9}{8}$, und tiefer als die Quart $\frac{4}{3}$, mithin ist er völlig geeignet als der in Frage stehende 3. Ton d.i. als Terz (III) in die aufzustellende Tonreihe aufgenommen zu werden. Mit diesen beiden eingrenzenden Tönen bildet er die Verhältnisse

$$\frac{9}{8} : \frac{5}{4} = 1 : \frac{10}{9} \quad \text{a) und}$$

$$\frac{5}{4} : \frac{4}{3} = 1 : \frac{16}{15} \quad \text{b);}$$

daher liegt er der Quart $\frac{4}{3}$ näher als der Secund $\frac{9}{8}$. Ueberdies klingt er mit dem Grundtone 1 sehr angenehm zusammen, so dass er seine Stelle auch von diesem Gesichtspunkte aus einzunehmen berufen ist.

Höchst bemerkenswerth ist das Verhältniss dieser so festgestellten Terz $\frac{5}{4}$ zu der sie überhöhenden Quint $\frac{3}{2}$, nemlich

$$\frac{5}{4} : \frac{3}{2} = 1 : \frac{6}{5} \quad \text{c)}$$

da es uns auf den auch durch sehr kleine Zahlen dargestellten Ton $\frac{6}{5}$ führt, welcher gleichfalls zwischen der Secund $\frac{9}{8}$ und der Quart $\frac{4}{3}$ enthalten ist, und zwar mit ihnen die Verhältnisse bildet:

$$\frac{9}{8} : \frac{6}{5} = 1 : \frac{16}{15} \quad \text{d)}$$

$$\frac{6}{5} : \frac{4}{3} = 1 : \frac{8}{5} \quad \text{e)}$$

denen zufolge er näher an der Secund als an der Quart steht; so verdient auch dieser Ton $\frac{6}{5}$ in der aufzustellenden achtgliedrigen

Tonreihe den 3. Platz einzunehmen und als eine zweite Terz bezeichnet zu werden. Hierfür spricht zugleich der Grund, dass diese andere Terz $\frac{6}{5}$ mit dem Grundtone 1 ebenfalls recht angenehm zusammenklingt.

Diese beiden Terzen $\frac{5}{4}$ und $\frac{6}{5}$, von denen die letztere die tiefere ist, haben zu einander das Tonverhältniss

$$\frac{6}{5} : \frac{5}{4} = 1 : \frac{25}{24} \quad f)$$

und liegen daher einander sehr nahe.

Höchst merkwürdig ist die Verschiedenheit der Wirkungen ihres Zusammenklingens mit dem Grundtone 1 auf das menschlich Gemüth. Während nemlich das Zusammenklingen der höheren Terz $\frac{5}{4}$ mit dem Grundtone 1

das Gemüth heiterer und fröhlicher stimmt, weckt dagegen das Zusammentönen der tieferen Terz $\frac{6}{5}$ mit dem Grundtone 1

im Gemüth eine ernste und traurige Stimmung. Deshalb nennt man die höhere Terz $\frac{5}{4}$ h a r t, d u r oder g r o s s, die tiefere Terz $\frac{6}{5}$ dagegen w e i c h, m o l l oder k l e i n.

Par.14. Interessante Bemerkung. Da wir diesen Ton $\frac{6}{5}$, den doch schon die Saite $\frac{5}{6}$ gibt, aus den früheren drei Saiten $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, oder aus den drei Tönen 2, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{4}$ abgeleitet haben, so leuchtet ein, dass die Saite $\frac{5}{6}$ ebenso wie früher die Saite $\frac{3}{4}$ für die Ermittlung der

musikalischen Töne entbehrlich ist. Hierzu mag noch bemerkt werden, dass in den, einerseits die Saitenlängen, anderseits die ihnen entsprechenden Töne ausdrückenden Brüchen, keine anderen einfachen oder Primzahlen als Faktoren vorkommen können, als die 3 kleinsten 2, 3, 5, und dass dieselben Primfaktoren auch in allen nicht nur bereits abgeleiteten, sondern auch in den noch weiterhin abzuleitenden, Werthe von Tönen darstellenden, unechten Brüchen, sowohl in den Zählern als auch in den Nennern einzig und allein vorkommen müssen; weil zur Herstellung neuer Tonwerthe nur Multiplikationen und Divisionen unechter Brüche in Anwendung kommen.

Par.15. Was in der Musiklehre Intervall zweier Töne oder zwischen 2 Tönen genannt zu werden pflegt, darf ja nicht als Unterschied der Höhen oder Tonwerthe dieser Töne angesehen werden, wozu der sonstige Gebrauch jenes Wortes berechtigen würde; denn beim Raume heisst Intervall zweier Orte oder Punkte der Zwischenraum, die Zwischenweite, die Lücke oder der Abstand zwischen ihnen, bei der Zeit ähnlich das Intervall zwischen zwei Ereignissen oder Zeitpunkten, die Zwischenzeit von dem früheren bis zum späteren. Dagegen bezeichnet das Intervall zweier Töne eigentlich und allein richtig das Mass der Aufsteigung, Erhöhung eines stetig sich erhöhenden vom tieferen jener zwei Töne aus bis zum höheren. Es gibt nemlich an, wie viel mal oder wie oft und wie (quoties) in der Höhe des höheren Tones die des tieferen enthalten ist, daher den Quotienten des (Werthes des) höheren Tones durch den des tieferen oder das steigend angeordnete Verhältniss der Höhen oder Werthe der bezeichneten zwei Töne, nachdem man sein erstes Glied mittels übereinstimmiger Theilung auf 1 den Werth des Grundtones reducirt (zurückgeleitet), folglich sein zweites Glied zu eben diesem Quotienten gemacht hat. - Desshalb dürfte es angemessen sein, das Wort "Intervall" geradehin durch "Quotient" zu ersetzen, nemlich anstatt "das Intervall zweier Töne" lieber "der Quotient des höheren Tones durch den tieferen" zu sagen.

So fanden wir (in Par.6(a)), das Intervall zwischen der Quint $\frac{3}{2}$ und der Oktav 2 gleich $\frac{4}{3}$, also eine Quart, folglich auch umgekehrt (nach Par.6 (b)), das Intervall zwischen der Quart $\frac{4}{3}$ und der Oktav 2, eine Quint $\frac{3}{2}$; das Intervall der grossen Terz $\frac{5}{4}$ und der Quint $\frac{3}{2}$ gleich $\frac{6}{5}$ (nach Par.13 (c)), daher eine kleine Terz, und umgekehrt das Intervall der kleinen Terz $\frac{6}{5}$ und der Quint $\frac{3}{2}$, eine grosse Terz $\frac{5}{4}$.

Überhaupt ist demnach das richtig begriffene Intervall zweier Töne, als Quotient des höheren Tonwerthes durch den niederen, grösser als 1, und desto näher an 1 je weniger beide Töne in der Höhe sich unterscheiden.

Zu solchen kleinen Intervallen gehören die des Grundtones 1 und der Secund $\frac{9}{8}$, dann der Quart und der Quint, nemlich $\frac{9}{8} = 1 \frac{1}{8}$, (vermöge Par.7 (a)); ferner das (in Par.13 (a)) gefundene Intervall der Secund $\frac{9}{8}$ und der grossen Terz $\frac{5}{4}$, d.i. $\frac{10}{9} = 1 \frac{1}{9}$. Diese beiden Intervalle oder Quotienten nennt man je einen ganzen Ton oder Ganzton, jedoch unterscheidend $\frac{9}{8}$ einen grossen ganzen Ton, dagegen $\frac{10}{9}$ einen kleinen ganzen Ton.

Weiter hat das Intervall der grossen Terz $\frac{5}{4}$ und der Quart $\frac{4}{3}$ den Betrag $\frac{16}{15} = 1 \frac{1}{15}$ (nach Par.13 (B)); dann das Intervall zwischen der kleinen und der grossen Terz die Grösse $\frac{25}{24} = 1 \frac{1}{24}$ (gem.Par.13 (f)); diese Intervalle heissen beziehungsweise ein grosser und ein kleiner halber Ton. Endlich besteht zwischen dem kleinen und grossen ganzen Ton, d.i. zwischen $\frac{10}{9}$ und $\frac{9}{8}$, das sehr kleine Intervall $\frac{81}{80} = 1 \frac{1}{80}$, welches ein syntonisches Komma genannt wird, und nur von feinen, musikalisch gebildeten Gehörorganen wahrgenommen werden kann.

Par.16. Die **Z w e i k l ä n g e**. Man pflegt in der neueren Musiklehre sich zu erlauben, zwei angenehm zusammenklingende verschiedene Töne hervorhebend oder vorzugsweise einen **Z w e i k l a n g** zu nennen. Diese einschränkende Benennung kommt demnach mit vollem Rechte nur den drei Verbindungen des Grundtones 1 erstlich mit der Quint $\frac{3}{2}$, dann mit der Dur-Terz $\frac{5}{4}$ und endlich mit der Moll-Ters $\frac{6}{5}$ oder den drei Tonverhältnissen

$$1 : \frac{3}{2} = 2 : 3, \quad 1 : \frac{5}{4} = 4 : 5, \quad 1 : \frac{6}{5} = 5 : 6.$$

zu, welche man auch in dem beschriebenen Sinne kurz die **Q u i n t**, die **D u r - T e r z** und die **M o l l - T e r z** zu nennen gewohnt ist.

Im weiteren Sinne erlaubt man sich auch die Vereinigung des Grundtones 1 mit der Quart $\frac{4}{3}$, obschon sie beide nur **z i e m l i c h** angenehm zusammenklingen, das Tonverhältniss $1 : \frac{4}{3} = 3 : 4$ einen Zweiklang und zwar kurzweg die **Q u a r t** zu nennen; und indem

man von der Verschiedenheit der gepaarten Töne absieht, nennt man auch die Verbindung des Grundtones 1 und der mit ihm wesentlich gleich klingenden Oktav 2 oder das Tonverhältniss 1 : 2, das wir sonst auch den Gleichklang zu nennen berechtigt sind, als einen fünften Zweiklang, die O k t a v.

Von den hier angeführten 5 Zweiklängen sind demnach die Quint, die Dur-Terz und die Moll-Terz die alleinigen eigentlichen Zweiklänge, dagegen sind es die Quart und die Oktav nur im erweiterten Sinne dieser Benennung. Alle diese 5 Zweiklänge oder vielmehr ihre Tonverhältnisse kann man aus der leicht im Gedächtniss zu behaltenden Reihe von Verhältnissen

$$1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6$$

aufstellen, wenn man diese sechs einfachen Zahlen nacheinander paar und paar in's Verhältniss stellt.

Par.17. Die tiefsten Dreiklänge. Verbindet man den Grundton und die Quint mit einer Terz, so macht diese mit dem einen jener beiden Töne eine grosse Terz, mit dem anderen eine kleine, mithin gibt jedes Paar dieser 3 Töne einen eigentlichen Dreiklang (gem. Par.16). Natürlich müssen diese 3 Töne, wenn sie gleichzeitig miteinander oder sogleich in steigender Ordnung nacheinander ertönen, als Verein der 3 Zweiklänge noch angenehmer (einschmeichelnder) als diese einzeln auf das menschliche Gehör einwirken und so erhält man einen Dreiklang oder Akkord im engsten eigentlichen Sinne und zwar den tiefsten derartigen Dreiklang. Je nachdem der Mittelton, die Terz, dur oder moll ist, nennt man den Dreiklang (Akkord) auch selbst dur oder moll. Sonach ist, wenn wir Kürze halber die Dur-Terz mit d III, und die Moll-Terz mit m III bezeichnen, der Dur-Dreiklang (Dur-Akkord)

$$I : d \text{ III} : V = 1 : \frac{5}{4} : \frac{3}{2} = 4 : 5 : 6 = 20 : 25 : 30$$

und der Moll-Dreiklang (Moll-Akkord)

$$I : m \text{ III} : V = 1 : \frac{6}{5} : \frac{3}{2} = 4 : (5 - \frac{1}{5}) : 6 = 20 : 24 : 30.$$

Es wird hierbei leicht in die Augen fallen, dass der erheiternde Dur-Dreiklang und der herabstimmende Moll-Dreiklang nur in einer Einheit der mittleren Verhältnisszahlen 25 und 24, sich unterscheiden.

Par.18. Bestimmung der Sext und Septim. Wenden wir uns nun zur Ermittlung der zur Ausfüllung der 8gliedrigen Tonreihe noch erforderlichen 2 Töne, der Sext (VI) und der Septim (VII), so müssen wir uns von der Anforderung leiten lassen, dass sie mit den tieferen Tönen gepaart, eigentliche Zweiklänge bilden sollen; sie müssen demnach beziehungsweise entweder Quinten der Secund und der Terz, oder Terzen der Quart und der Quint sein. Hier nun treten wir zur Aufg a b e einer neuen Bestimmung von Tönen mit gewissen Eigenschaften.

Ein angewiesener Ton soll nemlich um einen anderen vorgezeichneten Ton erhöht werden, d.h. wie sich der Grundton 1 zu diesem letzteren Tone, als dem Masse der Erhöhung verhält, ebenso soll sich jener gegebene zu erhöhende Ton zu dem zu suchenden verhalten. Soll z.B. der Ton $\frac{10}{9}$ (eine verminderte Secund) um eine Quart $\frac{4}{3}$ erhöht werden, so muss gleich wie der Grundton 1 sich verhält zum Tone $\frac{4}{3}$, auch der Ton $\frac{10}{9}$ zu dem verlangten Tone sich verhalten.

Da nun jedes Verhältniss seine Geltung behält, wenn seine beiden Glieder mit einerlei Zahl, hier das Verhältniss $1 : \frac{4}{3}$ mit $\frac{10}{9}$,

multiplicirt werden; so muss das zweite Glied des entstehenden gleichgeltenden Verhältnisses der verlangte Tonwerth sein; er wird demnach erhalten, wenn man mit der Erhöhungsmasse $\frac{4}{3}$ den angewiesenen Ton $\frac{10}{9}$ multiplicirt; es verhält sich nemlich

$$1 : \frac{4}{3} = \frac{10}{9} : \frac{4}{3} \times \frac{10}{9},$$

daher ist der fragliche Ton

$$= \frac{4}{3} \cdot \frac{10}{9} = \frac{40}{27} = 1 \frac{1}{\frac{27}{4}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{80}{81}$$

also eine verminderte Quint.

Von einer anderen Seite betrachtet, soll das Intervall des zu erhöhenden Tones $\frac{10}{9}$ und des gesuchten höheren, d.i. der Quotient dieses letzteren Tones, durch jenen ersteren das vorgeschriebene Erhöhungsmass $\frac{4}{3}$ sein; folglich ist der gesuchte Ton als Divident gleich dem Produkte aus jenem Theiler $\frac{10}{9}$ in diesen Quotienten, also in dieses Erhöhungsmass $\frac{4}{3}$; folglich findet man ihn ebenfalls, wenn man den angewiesenen Ton $\frac{10}{9}$ mit dem vorgezeichneten Erhöhungsmasse $\frac{4}{3}$ multiplicirt; er ist demnach wieder gleich

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{10}{9} = \frac{40}{27}.$$

In gleicher Weise hat man offenbar in jedem ähnlichen Falle vorzugehen. Ist nemlich allgemein irgend ein Ton um einen anderen zu erhöhen, so multiplicirt man ihre Tonwerthe mit einander und das entstehende Produkt gibt den Werth des gesuchten höheren Tones. Fiele hierbei dieses Product grösser als 2 aus, und läge demnach der ihm entsprechende höhere Ton in der nächst höheren Oktav von 2 bis 4, so hätte man, um diesen Ton in die stets vorausgesetzte Oktav 1 bis 2 herab zu bringen, selbstverständlich das Product durch 2 zu theilen, folglich entweder seinen Zähler zu halbiren, oder seinen Nenner zu verdoppeln. So z.B. ist die Sext der Quart

$$= \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{3} = \frac{20}{9} = 2 \cdot \frac{10}{9}, \text{ also die verminderte}$$

Secund $\left\{\frac{10}{9}\right\}$ der nächst höheren Oktav.

Soll man nun die Sext zur Quint der Secund, und die Septim zur Quint einer der Terzen machen, so hat man:

$$\text{die VI} = \frac{3}{2} \cdot \frac{9}{8} = \frac{27}{16},$$

$$\text{die VII} = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} = \frac{15}{8}, \text{ oder}$$

$$\text{die VII} = \frac{3}{2} \cdot \frac{6}{5} = \frac{9}{5}.$$

Will man hingegen die Sext zur Terz der Quart, und die Septim zur Terz der Quint machen, so erhält man, entweder wenn die Terz dur sein soll

$$\text{die VI} = \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{5}{3},$$

$$\text{die VII} = \frac{5}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{15}{8},$$

oder wenn die Terz moll sein soll

$$\text{die VI} = \frac{6}{5} \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{5},$$

$$\text{die VII} = \frac{6}{5} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{5},$$

Par.19. Die Tonleiter n. Eine auf die eben beschriebene Weise vervollständigte achtgliedrige Reihe aufsteigend geordneter musikalischen Töne, pflegt man ein Tonleiter und zwar eine diatonische zu nennen, insofern man sie von einer ausgedehnten unterscheidet, welche man eine chromatische zu nennen gewohnt ist. Unseren Ergebnissen gemäss haben wir 2 Dur-Tonleitern und 2 Moll-Tonleitern, je nachdem ihre Terz dur oder moll ist. Wir stellen sie im Nachfolgenden mit Berücksichtigung der Bestimmungsweisen ihrer Sexten und Septimen geordnet zusammen, fügen ihnen die theils ganze, theils halbe Töne betragenden, Intervalle (Quotienten) der Paare unmittelbar nacheinander folgender Töne bei und bemerken die Anzahlen ihrer Zwei- und Dreiklänge.

I. Durtonleiter, deren Sext und Septim die Quinten der Secund und Terz sind:

$$1, \frac{9}{8}, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{27}{16}, \frac{15}{8}, 2,$$

$$\frac{9}{8}, \frac{10}{9}, \frac{16}{15}, \frac{9}{8}, \frac{9}{8}, \frac{10}{9}, \frac{16}{15}.$$

Sie enthält:

$$4 \text{ Quinten } 1 : \frac{3}{2} = \frac{9}{8} : \frac{27}{16} = \frac{5}{4} : \frac{15}{8} = \frac{4}{3} : 2,$$

$$2 \text{ Durterzen } 1 : \frac{5}{4} = \frac{3}{2} : \frac{15}{8},$$

$$1 \text{ Mollterz } \frac{5}{4} : \frac{3}{2},$$

$$2 \text{ vermind. Mollterzen } \frac{9}{8} : \frac{4}{3} = 1 : \frac{32}{27} = 1 : \frac{6}{5} \cdot \frac{80}{81}$$

$$\text{und } (\frac{27}{16} : 2) = 1 : \frac{32}{27} = 1 : \frac{6}{5} \cdot \frac{80}{81}$$

$$1 \text{ Durdreiklang } 1 : \frac{5}{4} : \frac{3}{2} \text{ und}$$

$$1 \text{ Molldreiklang } \frac{5}{4} : \frac{3}{2} : \frac{15}{8}.$$

II. Durtonleiter, deren Sext und Septim Durterzen der Quart und Quint sind:

$$1, \frac{9}{8}, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{15}{8}, 2.$$

$$\frac{9}{8}, \frac{10}{9}, \frac{16}{15}, \frac{9}{8}, \frac{10}{9}, \frac{9}{8}, \frac{16}{15}.$$

Dieselbe enthält:

$$3 \text{ Quinten } 1 : \frac{3}{2} = \frac{5}{4} \cdot \frac{15}{8} = \frac{4}{3} : 2$$

und eine um ein Komma $\frac{80}{81}$

$$\text{verminderte Quint } \frac{9}{8} : \frac{5}{3} = 1 : \frac{40}{27} = 1 : \frac{3}{2} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{40}{27} \right) = 1 : \frac{3}{2} \cdot \frac{80}{81},$$

$$3 \text{ Durterzen } 1 : \frac{5}{4} = \frac{4}{3} : \frac{5}{3} = \frac{3}{2} : \frac{15}{8},$$

$$2 \text{ Mollterzen } \frac{5}{4} : \frac{3}{2} = \frac{5}{3} : 2$$

und eine um ein Komma $\frac{80}{81}$

$$\text{verminderte Mollterz } \frac{9}{8} : \frac{4}{3} = 1 : \frac{32}{27} = 1 : \frac{6}{5} \left(\frac{5}{6} \cdot \frac{32}{27} \right) = 1 : \frac{6}{5} \cdot \frac{80}{81},$$

$$2 \text{ Durdreiklänge } 1 : \frac{5}{4} : \frac{3}{2} = \frac{4}{3} : \frac{5}{3} : 2,$$

$$1 \text{ Molldreiklang } \frac{5}{4} : \frac{3}{2} : \frac{15}{8}$$

$$\text{und einen angenäherten Molldreiklang } \frac{9}{8} : \frac{4}{3} : \frac{5}{3}.$$

III. Molltonleiter, deren Sext und Septim Quinten der Secund und Mollterz sind:

$$1, \frac{9}{8}, \frac{6}{5}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{27}{16}, \frac{9}{5}, 2,$$

$$\frac{9}{8} \quad \frac{16}{15} \quad \frac{10}{9} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{16}{15} \quad \frac{10}{9}.$$

Sie enthält:

$$4 \text{ Quinten } 1 : \frac{3}{2} = \frac{9}{8} : \frac{27}{16} = \frac{6}{5} : \frac{9}{5} = \frac{4}{3} : 2,$$

$$1 \text{ Durterz } \frac{6}{5} : \frac{3}{2} \text{ und}$$

$$1 \text{ vergrößerte Durterz } \frac{4}{3} : \frac{27}{16} = 1 : \frac{81}{64} = 1 : \frac{5}{4} \cdot \frac{81}{80},$$

$$2 \text{ Mollterzen } 1 : \frac{6}{5} = \frac{3}{2} : \frac{9}{5} \text{ und}$$

$$2 \text{ verminderte Mollterzen } \frac{9}{8} : \frac{4}{3} = 1 : \frac{32}{27} = 1 : \frac{6}{5} \cdot \frac{80}{81}$$

$$\text{und } \frac{27}{16} : 2 = 1 : \frac{32}{27} = 1 : \frac{6}{5} \cdot \frac{80}{81},$$

$$1 \text{ Durdreiklang } \frac{6}{5} : \frac{3}{2} : \frac{9}{5} \text{ und}$$

$$1 \text{ angenäherten Durdreiklang } \frac{4}{3} : \frac{27}{16} : 2,$$

$$1 \text{ Molldreiklang } 1 : \frac{6}{5} : \frac{3}{2}.$$

IV. Molltonleiter, deren Sext und Septim Mollterzen der Quart und Quint sind:

$$1, \frac{9}{8}, \frac{6}{5}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \frac{9}{5}, 2,$$

$$\frac{9}{8} \quad \frac{16}{15} \quad \frac{10}{9} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{16}{15} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{10}{9}$$

Dieselbe enthält:

$$3 \text{ Quinten } 1 : \frac{3}{2} = \frac{6}{5} : \frac{9}{5} = \frac{4}{3} : 2,$$

$$2 \text{ Durterzen } \frac{6}{5} : \frac{3}{2} = \frac{8}{5} : 2,$$

$$3 \text{ Mollterzen } 1 : \frac{6}{5} = \frac{4}{3} : \frac{8}{5} = \frac{3}{2} : \frac{9}{5} \text{ und}$$

$$1 \text{ verminderte Mollterz } \frac{9}{8} : \frac{4}{3} = 1 : \frac{32}{27} \neq 1 : \frac{6}{5} \cdot \frac{80}{81},$$

$$1 \text{ Durdreiklang } \frac{6}{5} : \frac{3}{2} : \frac{9}{5},$$

$$2 \text{ Molldreiklänge } 1 : \frac{6}{5} : \frac{3}{2} = \frac{4}{3} : \frac{8}{5} : 2.$$

Par. 20. Die üblichen Tonleitern. In den zur Erheiterung der Gemüther bestimmten Musikstücken wird als Grundlage von den im vorigen Paragraph unter I. und II. aufgestellten 2 Durtonleitern gegenwärtig durchwegs die zweite verwendet, weil sie, die wir hier rechnend aufgefunden haben, eigentlich von nachdenkenden Musikern nach und nach empirisch auf dem Wege der Anwendung, Erfahrung und Verbesserung zusammengestellt worden ist und weil sie, im Vergleich mit der ersten Durtonleiter, zwar gleich viel (4) Quinten, dagegen um 1 Durterz und um 1 Mollterz, sowie um 1 Durdreiklang und um 1 Molldreiklang mehr als diese enthält.

In der Lehre von der angewandten Musik werden die Töne in Abtheilungen oder Fächer von je 8, eine diatonische Tonleiter bildenden Tönen, abgesondert; weil jeder Ton an seiner Oktav einen dem Wesen nach gleichen und ihn bloss verstärkenden Klang hat. Jede solche stönige Abtheilung heisst selbst eine Oktav und diese Oktaven unterscheidet man nach der Höhe ihrer Töne in folgender Weise:

Die tiefste heisst die Contra-Oktav, die nächst höhere die grosse, die ihr unmittelbar folgende die kleine, und die weiteren höheren die eingestrichene, zweigestrichene Oktav u.s.w.

In der angewandten Musik müssen sämtliche gebrauchte Töne bestimmte festgestellte sein, damit nicht nur alle gleichartigen Instrumente, sondern auch die mit ihnen zugleich spielenden anders construirten, jeden vorkommenden Ton in völlig gleicher Höhereitönen lassen. Hierzu ist erforderlichlich dass gewisse leitende oder zum Anhalt oder zur Stütze dienende Töne in dem Gehör jedes genügend gebildeten Musikers für das Stimmen seines Instrumentes vollständig ausgeprägt seien, wofern er nicht etwa mittels entsprechender Stimmgabeln diese fixen Töne hervorgerufen vermöchte. Die Töne der Oktaven werden entweder durch besondere Silben oder durch Buchstaben des lateinischen Alphabets und zwar so bezeichnet und benannt, dass alle im Verhältniss der Oktav stehenden Töne, deren Tonwerthe nemlich in den Verhältnissen der Potenzen der Zahl 2 stehen, durch einerlei Silben oder Buchstaben bezeichnet, aber nach Verschiedenheit der Oktavenfächer anderweitig unterschieden werden. Zur näheren Erklärung legen wir die Töne der grossen Oktav, welche nemlich durch grosse Buchstaben des lateinischen Alphabets bezeichnet

werden, zu Grunde, nehmen den tiefsten dieser Töne als Grundton oder Prim an, theilen ihnen die Tonwerthe nach der soeben hervorgehobenen 2. Durtonleiter zu, und fügen diesen letzteren auch noch die obige Reihe der Intervalle bei:

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	2,
	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$,
C	D	E	F	G	A	H	c.

Par.21. Die Molltonleiter n. Von den beiden in Par. 19 III und IV zusammengestellten Molltonleitern dürfte der letzteren wenigstens in Bezug auf Harmonie einiger Vorzug vor der ersteren einzuräumen sein. Obschon diese letztere um eine Quint weniger und der Durterzen und Durdreiklänge mit jener gleichviel enthält, besitzt sie doch um eine Mollterz und um einen Molldreiklang mehr als jene Tonleiter.

Zur Benennung und Bezeichnung der Töne dieser zweiten Molltonleiter müssen wir in Bezug auf die, zur Bildung neuer Tonleitern für beliebige Grundtöne nothwendigen, Erhöhung und Erniedrigung der musikalischen Töne um je einen kleinen halben Ton $\frac{25}{24}$, und deren sprachliche Andeutung kurz Folgendes voranschicken. Dass ein Ton um einen kleinen halben Ton erhöht, folglich sein Tonwerth mit $\frac{25}{24}$ multiplicirt worden ist, wird dadurch angedeutet, dass man dem ihn bezeichnenden Buchstaben die Silbe is anhängt; dagegen wenn er um einen kleinen halben Ton erniedrigt, daher sein Tonwerth durch $\frac{25}{24}$ getheilt worden

ist, dem ihn bezeichnenden Buchstaben die Silbe es beigefügt wird. So z.B., wenn D und E in diesem Masse erhöht werden, übergeben sie in Dis und Eis, dagegen wenn sie erniedrigt werden, in Des und Eës (Es).

Auf diese Weise finden wir insbesondere:

$$\text{Dis} = D \cdot \frac{25}{24} = \frac{9}{8} \cdot \frac{25}{24} = \frac{75}{64},$$

$$\text{Eës} = E : \frac{25}{24} = \frac{5}{4} \cdot \frac{24}{25} = \frac{6}{5} = \text{kleine Terz},$$

$$\text{Aës} = A : \frac{25}{24} = \frac{5}{3} \cdot \frac{24}{25} = \frac{8}{5} = \text{kleine Sext},$$

$$\text{Hes} = H : \frac{25}{24} = \frac{15}{8} \cdot \frac{24}{25} = \frac{9}{5} = \text{grössere kleine Septim.}$$

Bei Benützung dieser Ergebnisse erhalten wir aus der oben (in Par.19 IV) gefundenen die eigentliche und richtige Molltonleiter:

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{9}{5}$	2,
	$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$,
C	D	Es	F	G	As	Hes	c.

Eine andere rechnende Ermittlung der musikalischen Töne und Tonleitern.

Par.22. Diese Ermittlung stützt sich auf folgende zwei Grundsätze:

I. Da alle in der Musik verwendbaren Töne bezüglich ihrer Höhe zwischen dem Grundtone und seiner Oktav liegen, so sind ihre Werthe insgesamt m i t t l e r e oder M i t t e l - w e r t h e oder M i t t e l zwischen den Tonwerthen 1 und 2 dieser beiden Grenztöne.

II. Wenn die Werthe der Töne als regelmässige Brüche - wie gewöhnlich - dargestellt werden, so dürfen ihre ganzzahligen Nenner und Zähler (gemäss Par.14) durch keine andere Primzahl als 2, 3, 5 (ohne Rest) theilbar sein, weil sonst ein solcher Ton sich von den anderen mittönenden schrill und missklingend unterscheiden würde. (Wie Chladni in seiner Akustik, 1802, nachgewiesen hat.).

Zur Befolgung des ersten Grundsatzes ist zuvörderst erforderlich zu erforschen, welche A r t Bestimmung von Mitteln zwischen tieferen und höheren Tönen leicht andere brauchbare Töne zu liefern vermöge; wobei wir uns hier jedesmal bloss auf je z w e i gegebene Töne beschränken und alle Tonwerthe in der Gestalt gewöhnlicher rationaler Brüche voraussetzen.

1. Das einfachste M i t t e l zweier rationalen Zahlen ist ihr a r i t h m e t i s c h e s, nemlich ihre halbe Summe; dasselbe wird zwar rational ausfallen, allein der zweiten Forderung selten genügen, wie folgende Fälle zeigen:

$$\frac{1}{2} (1 + 2) = \frac{3}{2},$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{9}{8} + \frac{15}{8} \right) = \frac{3}{2},$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{6}{5} + \frac{9}{5} \right) = \frac{3}{2},$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} + 2 \right) = \frac{5}{3},$$

2. das g e o m e t r i s c h e M i t t e l zweier Zahlen, d.i. die zweite Wurzel aus deren Produkte, wird, weil derlei Wurzelziehungen aus Brüchen nur selten genau ausführbar sind, bloss wenige derartige Mitteltöne rational geben, wie z.B.:

$$\sqrt{1 \cdot \frac{16}{9}} = \frac{4}{3}, \quad \sqrt{\frac{9}{8} \cdot 2} = \frac{3}{2}, \quad \sqrt{\frac{6}{5} \cdot \frac{15}{8}} = \frac{3}{2}, \quad \sqrt{\frac{5}{4} \cdot \frac{9}{5}} = \frac{3}{2}$$

3. Dieselben Mängel finden wir auch bei dem, von alten griechischen Philosophen wegen seiner Beziehung auf die musikalischen Tonverhältnisse sogenannten h a r m o n i s c h e n M i t t e l zweier Zahlen, nemlich wenn diese a und b heissen bei dem Quotienten

$$\frac{ab}{\frac{1}{2}(a+b)} = \frac{2ab}{a+b},$$

der demnach als die dritte geometrische Proportionale zum arithmetischen und geometrischen Mittel beider Zahlen erscheint. Derlei seltenere Mittelbrüche sind:

$$\frac{2 \cdot 1 \cdot 2}{1+2} = \frac{4}{3}, \quad \frac{2 \cdot 1 \cdot \frac{3}{2}}{1+\frac{3}{2}} = \frac{6}{5}, \quad \frac{2 \cdot 1 \cdot \frac{5}{4}}{1+\frac{5}{4}} = \frac{10}{9}, \quad \frac{2 \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{15}{8}}{\frac{5}{4} + \frac{15}{8}} = ;$$

Par.23. Ganz anders steht es dagegen mit dem allgemeinen arithmetischen Mittel zweier gleichartigen Grössen, insbesondere zweiere ganzen oder gebrochenen rationalen Zahlen, dessen Ausdruck wir hier kurz abzuleiten Veranlassung nehmen.

Zur begründenden Ableitung der hierfür verwendbaren Berechnungs-Weise von Mitteln, wenn auch - da es hier genügt - nur zwei Grössen, betrachten wir zuerst überhaupt zwei gleichartige Grössen, gewöhnlich zwei Zahlen, D und E, von denen D die kleinere sein soll. Da nun bestehen offenbar die Vergleichen

$$D = D < E$$

$$D < E = E$$

daher, wenn wir die ersteren mit irgend einer absoluten ganzen oder gebrochenen Zahl h, die anderen mit einer eben solchen Zahl k multipliciren und die Paare unter einander stehender Produkte addiren, erhalten wir

$$(h + k) D < hD + kE < (h + k) E,$$

folglich wenn wir durch h + k theilen, die Ungleichungen

$$D < \frac{hD + kE}{h + k} < E.$$

Ihnen gemäss muss der Quotient

$$\frac{hD + kE}{h + k},$$

weil er grösser als die kleinere, dagegen kleiner als die grössere der zwei Grössen D und E ist, ein Mittel (medium) dieser beiden sein. Man nennt dasselbe ein arithmetisches Mittel und berechnet es, indem man die beiden vorgelegten Grössen mit je einer beliebiger absoluten Zahl multiplicirt und die Summe der Produkte durch die Summe der Multiplikatoren theilt. - Seine Grösse hängt demnach bei demselben Grössen- oder Zahlenpaare von den gewählten Multiplikatoren h, k, oder vielmehr nur von ihrem Quotienten h : k ab, so dass bei einer regelmässigen Änderung dieses Quotienten beliebig viele arithmetische Mittel derselben zwei Zahlen erhalten werden.

Wird in dem soeben aufgestellten Quotienten zunächst das erste Glied des Dividends durch das erste des Divisors, und nachher das zweite Glied des Dividends durch das zweite des Divisors getheilt, so nimmt er folgende Gestalten an:

$$\frac{hD + kE}{h + k} = D + \frac{E - D}{h + k} \cdot k = E - \frac{E - D}{h + k} \cdot h.$$

Ihnen zufolge verhalten sich die Unterschiede (Abstände) dieses Mittelwerthes von beiden es einschränkenden Grössen D + E wie k : h oder $\frac{1}{h} : \frac{1}{k}$ d.h. wie umgekehrt die ihnen zugewiesenen Multiplikatoren; mithin unterscheidet es sich von derjenigen Grenzgrösse weniger (als von der anderen), welche den grösseren Multiplikator hat,

Die Wählbarkeit der Multiplikatoren h, k hat zur erwünschten Folge, dass jede zwischen zwei bestimmten Zahlen D und E ~~xxx~~ so liegende Zahl F, dass $E - F > D$ ist, (zu 1. F kleiner als E dagegen grösser als D), als ein allgemein arithmetisches Mittel dieser Zahlen dargestellt, also

$$F = \frac{hD + kE}{h + k}$$

gemacht werden kann; wofern h und k passend bestimmt werden.

Multiplizieren wir hierzu den Nenner weg und scheiden die Produkte mit h von denen mit k, so finden wir

$$h(F - D) = k(E - F)$$

und sonach die Proportion

$$h : k = E - F : F - D,$$

deren beide Unterschiede positiv sind, daher auch die fraglichen Multiplikatoren h, k wie erforderlich p o s i t i v sein müssen.

Par.24. Die in unserer Betrachtung der musikalischen Töne vorkommenden Fälle bedingen, dass die Mittel rationaler und regelmässiger Brüche mit absoluten ganzzahligen Nennern und Zählern wie $\frac{A}{a}$, $\frac{B}{b}$ gesucht werden sollen, Ersetzen wir demnach im

Obigen D durch $\frac{A}{a}$ und E durch $\frac{B}{b}$, so wie auch ihr Mittel F durch $\frac{C}{c}$, so wird obiger Ausdruck des allgemeinen arithmetischen Mittels

$$\frac{C}{c} = \left(h \frac{A}{a} + k \frac{B}{b} \right) : (h + k)$$

und umgekehrt das Verhältniss der zu seiner Darstellung notwendigen Multiplikatoren h und k

$$h : k = \frac{\frac{B}{b} - \frac{C}{c}}{\frac{C}{c} - \frac{A}{a}} = a (Bc - bC) : b (Ca - cA).$$

Hier drängt sich nun entschieden die Untersuchung des wichtigen einfachen S o n d e r f a l l e s auf, wo man absichtlich die Multiplikatoren h, k der vorliegenden Brüche b e z i e h u n g s w e i s e entweder deren Nenner a, b selbst, oder überhaupt gewisse Vielfache ma, nb derselben sein lässt.

Das Mittel $\frac{C}{c}$ der Brüche $\frac{A}{a}$ und $\frac{B}{b}$ ist demnach für jene ganz besondere Wahl

$$\frac{C}{c} = \frac{A + B}{a + b},$$

d.i. gleich der Summe ihrer Zähler, gebrochen durch die Summe ihrer Nenner; für diese letztere allgemeinere Wahl dagegen

$$\frac{C}{c} = \frac{Am + Bn}{am + bn},$$

daher gilt hiefür dieselbe Berechnungsweise, wenn man früher die 2 Brüche mittels übereinstimmiger Multiplikationen ihrer Bestandstücke umgestaltet hat. - Dieses Mittel liegt demjenigen der beiden Brüche (gem. Par.23) näher, der von den zwei addirten Nennern, a, b, oder ma, nb, den grösseren besitzt.

Dieses Mittel zweier Brüche kann wegen der gleichstimmigen Summierung der Bestandstücke der 2 Brüche füglich ein s u m m a t i v e s (Nachgebildet dem Worte "Summation", die "additiv" dem Worte "Addition".) M i t t e l jener Brüche genannt und hier einfach bloss durch

$$M \left(\frac{A}{a}, \frac{B}{b} \right) = \frac{Am + Bn}{am + bn}$$

bezeichnet werden, Dasselbe ändert sich natürlich mit den Multiplikatoren m , n , und muss, um als musikalischer Tonwerth zu gelten, noch der Forderung des II. Grundsatzes genügen.

Damit umgekehrt irgend ein zwischen $\frac{A}{a}$, $\frac{B}{b}$ liegender Bruch $\frac{C}{c}$, wobei

$$\frac{B}{b} > \frac{C}{c} > \frac{A}{a}$$

bedungen wird, ein summatives Mittel beider sein könne, muss gemäss obiger Proportion wegen $h = am$, $k = bn$, sich verhalten

$$m : n = Bc - bC : Ca - cA.$$

Die letzteren Unterschiede von Produkten absoluter (positiver) ganzen Zahlen sind als allmälliche Umstaltungen der allerersten positiven Unterschiede $E - F$ und $F - D$, eben so wie diese positiv und überdies ganze Zahlen, und müssen endlich, nachdem sie von allen gemeinschaftlichen Theilern befreit sind, in dem vorhin gegebenen Ausdrucke des $\frac{C}{c}$ anstatt der ihnen proportionirten Multiplikatoren m , n eingestellt werden.

Par.25. Zur Grundlage der Darstellung der musikalischen Tonwerthe als summatives Mittel anderer bereits so dargestellten Tonwerthe dient der Nachweis, dass jeder Tonwerth, $\frac{C}{c}$ als ein

derartiges Mittel des Grundtones $1 = \frac{1}{1}$ und seiner Oktav

$2 = \frac{2}{1}$ d.i. $\frac{m + 2n}{m + n}$ sich darstellen lässt. Machen wir nemlich in der letzten Proportion $A = a = 1 = b$ und $B = 2$, so übergeht sie in

$$m : n = 2c - C : C - c,$$

folglich da c und C , also auch die letzteren Unterschiede keinen Theiler gemeinschaftlich haben, müssen diese Unterschiede selbst für m und n oben eingestellt werden. Z.B. ist um

$\frac{C}{c} = \frac{32}{27}$ als $M \left(\frac{1}{1}, \frac{2}{1} \right)$ darzustellen, haben wir

$$m = 54 - 32 = 22, n = 32 - 27 = 5$$

und in der That ist

$$\frac{22 + 10}{22 + 5} = \frac{32}{27}.$$

Nachdem dieser Hauptfall erwiesen ist, muss auch jeder, zwischen 2 bereits gefundenen solchen Mitteln $\frac{A}{a}$ und $\frac{B}{b}$ enthaltene

Bruch $\frac{C}{c}$, als summatives Mittel derselben sich darstellen lassen; wie z.B. der zwischen $\frac{10}{9} = 1 \frac{1}{9}$ und $\frac{5}{3} = 1 \frac{2}{3}$ enthaltene Bruch

$$\frac{32}{27} = 1 \frac{5}{27}.$$

Denn hier ist $A = 10$, $a = 9$, $B = 5$, $b = 3$, $C = 32$, $c = 27$, also

$$m : n = (5.27 - 3.32) : (32.9 - 27.10) = (135 - 96) : (288 - 270) = 39 : 18 = 13 : 6$$

und wirklich ist

$$M\left(\frac{10}{9}, \frac{5}{3}\right) = \frac{10 \cdot 13 + 5 \cdot 6}{9 \cdot 13 + 3 \cdot 6} = \frac{160}{135} = \frac{32}{27}.$$

Par.26. Diese nunmehr abgeschlossene allgemeine Lehre von den summativen Mitteln zwischen Paaren regelmässiger Brüche, benütze wir jetzt zur geordneten wirklichen Berechnung der Zahlwerthe musikalischer Töne.

Zunächst bestimmen wir zwischen dem Grundton oder der Prim 1 und der Oktav 2 den ausgezeichneten Mittelton

$$M\left(\frac{1}{1}, \frac{2}{1}\right) = \frac{1+2}{1+1} = \frac{3}{2}, \text{ die Quint;}$$

dann zwischen dieser und dem tieferen Grundtone 1 die diesem schrittweise dadurch sich nähernden Mittel; indem wir $\frac{1}{1}$ nach

und nach mit $\frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4}$ u.s.w. vertauschen; nemlich:

$$M\left(\frac{1}{1}, \frac{2}{1}\right) = M\left(\frac{2}{2}, \frac{2}{1}\right) = \frac{4}{3}, \text{ die Quart,}$$

$$M\left(\frac{1}{1} = \frac{3}{3}, \frac{2}{1}\right) = \frac{3+2}{3+1} = \frac{5}{4}, \text{ die grosse Terz,}$$

$$M\left(\frac{1}{1} = \frac{4}{4}, \frac{2}{1}\right) = \frac{4+2}{4+1} = \frac{6}{5}, \text{ die kleine Terz, u.s.w.}$$

Wie bereits früher (Par.25) angedeutet wurde, muss ein Mittel zwischen einer von 2 Grenzzahlen und einem Mittel beider wieder ein Mittel zwischen den Grenzzahlen selbst sein. Demzufolge können wir die Grundzahl $\frac{1}{1}$ als untere Grenze festhalten, dagegen

die obere Grenze schrittweise durch die ihr sich mehr und mehr nähernden Mittel ersetzen, indem wir mit der bereits gefundenen Quint $\frac{3}{2}$ beginnen. Auf diese Weise finden wir nach und nach

$$M\left(\frac{1}{1}, \frac{3}{2}\right) = \frac{1+3}{1+2} = \frac{4}{3}, \text{ die Quart,}$$

$$M\left(\frac{1}{1}, \frac{4}{3}\right) = \frac{1+4}{1+3} = \frac{5}{4}, \text{ die grosse Terz,}$$

$$M\left(\frac{1}{1}, \frac{5}{4}\right) = \frac{1+5}{1+4} = \frac{6}{5}, \text{ die kleine Terz.}$$

Bei Fortsetzung dieser leicht begreiflichen Rechnungsweise stossen wir sogleich auf die summativen Mittel $\frac{7}{6}, \frac{8}{7}$, später auf $\frac{11}{10}, \frac{12}{11}, \frac{13}{12}$ u.a.m., deren Nenner oder Zähler Primzahlen grösser als 5 sind und dem obigen zweiten Grundsatz gemäss keine Werthe musikalischer Töne darstellen können. Dagegen finden wir nach und nach folgende für unseren Zweck dienliche summative Mittel:

$$M\left(\frac{1}{1} = \frac{3}{3}, \frac{6}{5}\right) = \frac{3+6}{3+5} = \frac{9}{8},$$

die Secund und auch der grosse ganze Ton,

$$M\left(\frac{1}{1}, \frac{9}{8}\right) = \frac{1+9}{1+8} = \frac{10}{9},$$

eine verminderte Secund und ein kleiner ganzer Ton; ferner, allerdings ziemlich gekünstelt, die Mittelwerthe:

$$M\left(\frac{1}{1} = \frac{6}{6}, \frac{10}{9}\right) = \frac{6+10}{6+9} = \frac{16}{15}, \text{ ein grosser halber Ton,}$$

$$M\left(\frac{1}{1} = \frac{9}{9}, \frac{16}{15}\right) = \frac{9+16}{9+15} = \frac{25}{24}, \text{ ein kleiner halber Ton,}$$

$$M\left(\frac{1}{1} = \frac{56}{56}, \frac{25}{24}\right) = \frac{56+25}{56+24} = \frac{81}{80}, \text{ endlich das Komma.}$$

Par.27. Auf diese Weise haben wir uns in den Besitz der unterhalb der Quint $\frac{3}{2}$ liegenden tieferen Töne der diatonischen Tonleitern gesetzt und wollen nun noch die Werthe der höheren oberhalb der Quint $\frac{3}{2}$ bis zur Oktav 2 hinauf reichenden Töne berechnen.

Hierfür ertheilen wir dem zu suchenden Mittelton T als summativem Mittel dieser zwei Grenztöne $\frac{3}{2}$ und $\frac{2}{1}$ die allgemeine Form $\mathbb{T}$

$$T = \frac{3m + 2n}{2m + n}; \text{ indem wir } m, n \text{ absolute ganze}$$

Zahlen von 1 an allmählich aufsteigend und von gemeinsamen Theilern frei uns vorstellen. Gehen wir dabei nicht weiter, als dass der Nenner in T die Zahl 30 noch nicht erreiche, und beschränken wir uns stets auf musikalische Töne T, so finden wir nach und nach, dass bloss folgende Ternen der Zahlen m, n, T zusammengehören:

$$m = 1, 1, 1, 2, 2, 7, 5,$$

$$n = 1, 3, 6, 1, 5, 2, 6,$$

$$T = \frac{5}{3}, \frac{9}{5}, \frac{15}{8}, \frac{8}{5}, \frac{16}{9}, \frac{25}{16}, \frac{27}{16}.$$

Par.28. Aus den hier ausgerechneten Tonwerthen vermögen wir jetzt schon die üblichen Dur- und Molltonleitern wohlbegründet zusammenzustellen. Da nemlich deren unecht gebrochene Tonwerthe zur unerlässlichen Harmonie der Töne durch die möglichst kleinsten Nenner und Zähler dargestellt werden sollen; so können nur folgende nach aufsteigenden Nennern geordnete Töne in diese Tonleitern aufgenommen werden, als:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{8}{5}, \frac{9}{5}, \frac{9}{8} \text{ und } \frac{15}{8}.$$

In beiden Tonleitern stehen als Grenzstufen fest:

Der Grundton oder die Prim 1 als die unterste Stufe, und die achte Stufe die Oktav 2 als die höchste. Von den Zwischentönen ist der Haupt- oder abtheilende Ton $\frac{3}{2}$ nicht nur ein summatives, sondern auch das arithmetische Mittel des Grundtones $\frac{1}{1}$ und der Oktav $\frac{2}{1}$ (Par. 22,1).

Steigt man nun von der Prim 1 zum Tone $\frac{3}{2}$ auf, so beträgt der Quotient der Aufsteigung $\frac{3}{2} : 1 = \frac{3}{2}$; erhebt man sich von $\frac{3}{2}$ zur Oktav 2 hinauf, so ist der Quotient der Steigung $2 : \frac{3}{2} = \frac{4}{3}$; daher verhalten sich diese zwei Quotienten wie $\frac{3}{2} : \frac{4}{3}$ oder wie 9 : 8; folglich muss der Ton $\frac{3}{2}$ in der oberen Abtheilung der Tonleitern, die unterste also in der Tonleiter selbst die fünfte Stufe einnehmen, d.i. die Quint ebenfalls unverrückbar sein.

Als nächster Ton der obigen Reihe mit dem nächst höheren Nenner 3 ist der Ton $\frac{4}{3}$; er ist das einfache summative Mittel zwischen dem Grundton $\frac{1}{1}$ und der Quint $\frac{3}{2}$, nemlich

$$\frac{1 + 3}{1 + 2} = \frac{4}{3}$$

und liegt dem Tone $\frac{3}{2}$ näher als der Prim, daher ist dieser Ton $\frac{4}{3}$ zunächst unter die fünfte Tonstufe also auf die vierte, als seinen unverrückbaren Platz, zu setzen und wird somit zur Quart. Der nach $\frac{4}{3}$ in der obigen Reihe kommende Ton $\frac{5}{3}$ hat bei demselben

Nenner 3 den höheren Zähler 5, er ist das summative Mittel der Quint $\frac{3}{2}$ und der Oktav $\frac{2}{1}$, nemlich

$$\frac{3 + 2}{2 + 1} = \frac{5}{3}$$

und liegt daher näher an der Quint, als an der Oktav und kann die sechste Tonstufe einnehmen, daher die Sext sein.

Nach diesem Tone $\frac{5}{3}$ kommt in der voranstehenden Reihe mit dem nächst höheren Nenner 4 und dem vorhergehenden Zähler 5 der Ton $\frac{5}{4}$; er ist nicht allein das summative Mittel zwischen der Quint $\frac{3}{2}$ und dem Grundtone

$$\frac{2}{2} = \frac{3 + 2}{2 + 2},$$

sondern auch das arithmetische Mittel dieser beiden Töne

$$= \frac{1}{2} (1 + \frac{3}{2}),$$

ja auch das summative Mittel zwischen dem Grundtone 1 und der Quart $\frac{4}{3}$, nemlich

$$\frac{1 + 4}{1 + 3} = \frac{5}{4};$$

er liegt demnach nicht allein unterhalb der Quint, sondern auch noch unterhalb der Quart und nimmt daher die dritte Tonstufe ein und gilt als grosse oder Durterz.

Zwischen diesem dritten Tone $\frac{5}{4}$ und dem Grundtone 1 liegt ihr arithmetisches Mittel

$$\frac{1}{2} (1 + \frac{5}{4}) = \frac{9}{8},$$

welches auch das summative Mittel zwischen $\frac{5}{4}$ und der Prim $\frac{4}{4}$ ist, da

$$\frac{5 + 4}{4 + 4} = \frac{9}{8}$$

ist. Dieser in der obigen Tonreihe als vorletzter aufgezählte Ton darf demnach auf der zweiten Tonstufe seinen ständigen Platz einnehmen und die Secund heissen. - Damit stimmt die Wahrnehmung überein, dass die Quint als Secund der Quart angesehen, die Aufsteigung von dieser zu jener, den Quotienten

$$\frac{3}{2} : \frac{4}{3} = \frac{9}{8},$$

daher denselben Tonwerth der Secund gibt.

Der noch zu bestimmen übrige Ton, die Septim, kann entweder als Secund der Sext $\frac{5}{8} \cdot \frac{9}{5}$, oder umgekehrt als Sext der Secund $\frac{9}{8} \cdot \frac{5}{3}$, daher $= \frac{15}{8}$, oder auch als grosse Terz der Quint $\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4}$ auch $= \frac{15}{8}$ dargestellt werden; sodass der letzte Ton $\frac{15}{8}$ in der obigen Tonreihe als die Septim die achttönige Tonleiter ausfüllt.

Sonach haben wir so wie früher in Par. 20 die nachstehende Durtonleiter:

$$1, \frac{9}{8}, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{15}{8}, 2.$$

Par.29. Der Ton, welcher in der zu Anfang des Par.28 aufgeführten Tonreihe nach dem Tone $\frac{5}{4}$ den nächst höheren Nenner und Zähler hat, nemlich $\frac{6}{5}$, ist das summative Mittel sowohl zwischen der Quart $\frac{4}{3}$ und der Prim $\frac{2}{5}$, nemlich

$$\frac{\frac{4}{3} + \frac{2}{5}}{2} = \frac{6}{5},$$

als auch summatives Mittel zwischen der unterhalb der Quart $\frac{4}{3}$ liegenden grossen Terz $\frac{5}{4}$ und der Prim $\frac{1}{2}$, d.i.

$$\frac{\frac{5}{4} + \frac{1}{2}}{2} = \frac{6}{5};$$

er liegt demnach nur wenig unterhalb der grossen Terz aber doch noch oberhalb der Secund $\frac{9}{8}$ und wird demnach als Stellvertreter

der grossen Terz auf die dritte Tonstufe unter dem Namen die kleine oder Moll-Terz gestellt, die Molltonleiter begründen.

In dieser Tonleiter ist die Sext die kleine Terz der Quart, nemlich

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} = \frac{8}{5},$$

oder umgekehrt die Quart der kleinen Terz, d.i.

$$\frac{6}{5} \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{5}.$$

Endlich ist die Septim wieder anzusehen als Secund der Sext, nemlich

$$\frac{8}{5} \cdot \frac{9}{8} = \frac{9}{5},$$

oder umgekehrt als Sext der Secund d.i.

$$\frac{9}{5} \cdot \frac{8}{9} = \frac{8}{5},$$

oder auch noch die kleine Terz der Quint, nemlich

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{6}{5} = \left(\frac{9}{5}\right),$$

sonach sind auch die vorhin ausgelassenen einfachen Töne $\frac{6}{5}, \frac{8}{5}, \frac{9}{5}$ der in Par. 28 aufgestellten 11gliederigen Reihe

von Tönen als kleine Terz, kleine Sext und kleine Septim in die Tonreihe aufgenommen worden und wir besitzen demnach sowie in Par. 21 die richtige Molltonleiter:

$$1, \frac{9}{8}, \frac{6}{5}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \frac{9}{5}, 2.$$

Eine dritte Ausmittlung der musikalischen Tonwerthe und der diatonischen Tonleitern.

Par.30. Diese Ausmittlung fusst auf folgende drei Grundsätze:

I. Der Zähler des als regelmässiger Bruch dargestellten Werthes jedes Tones unterhalb der Oktav muss grösser als sein Nenner, jedoch kleiner als das Doppelte des Nenners sein; weil jeder solche Tonwerth selbst grösser als 1, dagegen kleiner als 2 ist.

II. Nenner und Zähler eines jeden Tonwerthes dürfen keine anderen Primzahlen als 2, 3, 5 zu Faktoren oder Theilern haben, weil man sonst nach Chladni schrille für die Musik ungeeignete Töne erhielte (vergl. Par. 14).

III. In keinem gebrochenen Tonwerthe können Nenner und Zähler einen gemeinschaftlichen Theiler besitzen, da dessen Beseitigung durch Theilung den Tonwerth durch kleinere Zahlen darstellen, also auf einen bereits bekannten zurückleiten würde. Desswegen dürfen weder die Nenner noch die Zähler solcher Brüche alle drei Primzahlen 2, 3 und 5 zugleich zu Faktoren haben; sondern sie können bloss entweder Potenzen je einer einzigen, oder Produkte von Potenzen zweier dieser Primzahlen sein. Ist demnach der zur Bildung einer derartigen Bruches gewählte Nenner durch eine, oder durch zwei derselben drei Primzahlen theilbar, so darf es sein Zähler nicht auch sein.

Par.31. Unsere nächste Aufgabe ist es nun, die Reihe aller derjenigen Zahlen, welche diesen dreierlei Anforderung genügen, bis zu einer gewissen höchsten Zahl auszuforschen, wofür wir hier die Zahl 200 wählen. Zu diesem Zwecke schreiben wir in eine Zeile die Zahl 2 und ihre nacheinander folgenden Potenzen, indem wir diese Zahl wiederholt und so weit nöthig mit sich selbst multipliciren; dann tellen wir in eine zweite Zeile die Zahl 3, und hinter sie ihre durch öfterr Multiplikation mit sich selbst sich ergebenden Potenzen; ebenso schreiben wir in einer dritten Zeile die dritte Primzahl 5 und hinter sie ihre leicht zu berechnenden Potenzen.

Hierauf multipliciren wir sämtliche Zahlen der ersten Reihe, d.i. alle Potenzen von 2, der Ordnung nach, ohne jedoch jene gewählte höchste Zahl 200 zu überschreiten, mit sämtlichen Potenzen erst von 3, dann von 5, und endlich noch die Potenzen der Zahl 3 mit denen von 5 und schreiben die beziehlich gleichartigen Produkte in eine vierte, fünfte Zeile u.s.f.

Bei diesem Vorgang finden wir den nachstehenden Anfang der Zusammenstellung der in Frage stehenden Zahlen:

2^m) 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, ...

3^n) 3, 9, 27, 81, ...

5^p) 5, 25, 125, ...

$2^m 3^n$) 6, 12, 24, 48, 96, 192, ...; 18, 36, 72, 144, ...
54, 108, ...; 162, ...

$2^m 5^p$) 10, 20, 40, 80, 160, ...; 50, 100, 200, ...

$3^n 5^p$) 15, 45, 135, ...; 75, ...

Ordnen wir nun die hier gefundenen Zahlen nach ihrer Höhe aufsteigend, so erhalten wir folgende Zahlenreihe:

2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 27, 32, 36, 40, 45, 48, 50, 54, 64, 72, 75, 80, 81, 96, 100, 108, 125, 135, 144, 160, 162, 192, 200.

Par. 32. Da wir aus diesen Zahlen die unecht gebrochenen musikalischen Tonwerthe aufzustellen haben, so müssen wir sie paarweise, eine als Nenner, eine andere grössere als Zähler in je einen Bruch verbinden, daher die ganze Reihe dieser Zahlen als eine Elementenreihe zu Paaren, zu zweien, zur zweiten Klasse combiniren; demnach diese Zahlen (Elemente) in ihrer Ordnung nach und nach zu Nennern wählen, und: dem I. Grundsätze gemäss zu jedem Nenner seinen Zähler aus der Reihe der ihm folgende Elemente, also grösser als er, jedoch noch kleiner als sein Doppeltes, dem III. Grundsätze entsprechend so wählen, dass beide Elemente des aufzustellenden Bruches keinen gemeinsamen Theiler besitzen.

Dieses Verfahren ist demnach ein eigenthümlich beschränktes Verbindung (Combiniren) der gegebenen Elementenreihe in Paare und könnte ebenso wie diese Reihe beliebig weit ausgedehnt werden.

Dem Gesagten zufolge gehört

zu 2 als Nenner nur 3 als Zähler und gibt den Bruch $\frac{3}{2}$;

zu 3 als Nenner passen 4 und 5, daher geben sie die Brüche $\frac{4}{3}$ und $\frac{5}{3}$;

zu 4 als Nenner taugt nur 5 als Zähler und gibt den Bruch $\frac{5}{4}$;

und aus diesen Beispielen wird wohl Jedermann leicht ersehen, dass die zunächst sich ergebenden Brüche nachstehende sind:

$$\frac{6}{5}, \frac{8}{5}, \frac{9}{5}, \frac{9}{8}, \frac{15}{8}.$$

Die so gefundenen gebrochenen neuen Tonwerthe, deren Nenner die Zahl 8 noch nicht übersteigen, können nur zwischen dem Grundtone 1 und seiner Oktave 2 entweder nach den Grundsätzen der Par. 16-21, oder nach den Vorgängen der Par. 28 und 29 in aufsteigender Reihenfolge einerseits in die Durtonleiter, andererseits in die Molltonleiter wissenschaftlich zusammengestellt werden.

Par. 33. Setzen wir dieses combinatorische Verfahren fort, so finden wir, dass den Nennern

6, 10, 12, 36, 40, 48, 54, 100, 144, u.a.m.,

kein Zähler, also auch kein Bruch entspricht, und wir erhalten sonach folgende Reihe von Tonwerthen:

$$\frac{10}{9}, \frac{16}{15}, \frac{25}{16}, \frac{27}{16}, \frac{25}{18}, \frac{27}{20}, \frac{25}{24}, \frac{27}{25}, \frac{32}{25}, \frac{36}{25}, \frac{48}{25}, \frac{32}{27}, \frac{40}{27}, \frac{50}{27}, \frac{45}{32}, \frac{64}{45},$$

$$\frac{81}{50}, \frac{75}{64}, \frac{81}{64}, \frac{125}{64}, \frac{125}{72}, \frac{128}{75}, \frac{81}{80}, \frac{100}{81}, \frac{125}{81}, \frac{128}{81}, \frac{160}{81}, \frac{125}{96}, \frac{125}{108}, \frac{128}{125},$$

$$\frac{144}{125}, \frac{162}{125}, \frac{192}{125}, \frac{135}{128}, \text{ u.m. dgl.}$$

Par. 34. Zum Schlusse möge noch angedeutet werden, wie die durch solchen Vorgang gefundenen Brüche in die bestehenden diatonischen und chromatischen Tonleitern eingefügt werden können. Nachdem man nemlich die Zahlwerthe der Töne dieser Tonleitern in Decimalbrüche von drei oder vier Decimalen verwandelt hat, macht man dasselbe auch mit den combinatorisch ermittelten Brüchen; dann wird man leicht ersehen, wie jeder der letzteren Brüche mit einem gewissen der ersteren entweder genau, oder wenigstens angenähert und wie nahe er übereinstimme, daher auch der jenem Bruche entsprechende Ton seine Benennung und Bezeichnung erhalten kann.