

1130

MAZET, E.

1994

MAZET

LES SOPHISTES ET LA GÉOMÉTRIE

Les mathématiques ne tenaient pas dans l'enseignement des sophistes une place prépondérante. Néanmoins elles n'en étaient pas absentes, ne serait-ce que parce que la plupart d'entre eux se faisaient forts de pouvoir parler de toutes les matières spécialisées sans s'enfermer dans aucune. Platon, dans le *Protagoras* (318d - 319a), établit à cet égard une nette différence entre le sophiste d'Abdère et les autres, lorsqu'il lui fait dire: "Les autres sophistes en effet font du mal à la jeunesse; car alors que celle-ci s'est éloignée des disciplines spéciales (τέχναις), ils l'y ramènent contre son gré et la précipitent dans l'étude des spécialités en leur enseignant le calcul, l'astronomie, la géométrie, la musique (ce disant il tourna les yeux du côté d'Hippias), tandis que s'il vient auprès de moi, il n'apprendra rien d'autre que ce qu'il vient pour apprendre. Or l'objet de mon enseignement, c'est le bon conseil touchant les affaires qui le concernent proprement: savoir comment administrer au mieux les affaires de sa maison à lui, et, pour ce qui est des affaires de l'État, savoir comment y avoir plus de puissance, et par l'action et par la parole" (trad. Robin).

Les informations qui nous ont été transmises par les auteurs anciens sur les contributions des sophistes au développement des mathématiques et de la pensée mathématique sont peu nombreuses. Il n'y a que deux sophistes auxquels sont attribués des travaux proprement techniques dans ce domaine: Hippias et Antiphon (nous écartons Bryson, qui n'est pas un sophiste, mais un philosophe de l'école de Mégare). On a d'autre part dans Aristote l'écho d'une "réfutation" des géomètres par Protagoras. Ces contributions ont fait l'objet d'études séparées de la part des historiens des mathématiques et de la philosophie grecques, mais il nous a paru intéressant de leur consacrer une étude d'ensemble,

et de chercher quel lien elles peuvent avoir entre elles et quelle place elles occupent dans l'activité intellectuelle globale des sophistes. Nous étudierons, sur l'exemple de Théodore de Cyrène, tel que nous le décrit Platon, les relations entre sophistes et mathématiciens. Nous essaierons d'autre part de montrer en particulier que la fausse quadrature d'Antiphon peut se relier à la critique de la géométrie par Protagoras, et se comprendre comme un argument philosophique plutôt que comme une mauvaise solution d'un problème technique.

1. Une contribution technique à la géométrie: la quadratrice d'Hippias

Le fait que Protagoras, dans le passage de Platon cité plus haut, vise particulièrement Hippias, suggère que celui-ci donnait dans son enseignement une place plus importante aux mathématiques que les autres sophistes. De fait, nous possédons un ensemble de données convergentes qui désignent Hippias comme un sophiste qui s'occupait de mathématiques. Dans le *Petit Hippias* (366c - 368a), Platon fait de l'Éléen un expert en matière de calculs et d'art du calcul, de géométrie, d'astronomie. À vrai dire l'éloge qu'il fait de la science d'Hippias sur ces matières ne va pas sans une forte dose d'ironie. Le contentement de soi du sophiste est souligné, tandis que l'exemple choisi pour illustrer son expertise en calcul est parfaitement trivial. Plus loin Platon énumère les compétences encyclopédiques dont le sophiste se targuait, y compris dans les techniques artisanales, ce qui sous sa plume est un compliment pour le moins ambigu, car se consacrer aux techniques artisanales est indigne d'un homme libre. Indépendamment de l'intention de rabaisser ainsi Hippias, cette énumération vise manifestement à laisser entendre que notre sophiste, qui se flatte de tout savoir et de tout enseigner, est un touche-à-tout qui n'est réellement compétent en rien. Néanmoins, le *Grand Hippias* aussi parle de ses compétences en insistant en-

core une fois sur les disciplines mathématiques. Le fait que Platon soit revenu sur ce thème dans plusieurs de ses dialogues, toujours à propos du même sophiste, ne s'explique que si celui-ci avait vraiment la réputation d'un expert en sciences mathématiques, et était connu pour leur avoir donné une place non négligeable dans son enseignement.

À ces données de Platon s'ajoute un passage du commentaire de Proclus sur le premier livre des *Éléments* d'Euclide¹. À propos de l'énigmatique Mamecos ou Ameristos (le nom varie selon les manuscrits) qui serait un des premiers géomètres grecs et aurait vécu peu après Thalès, Proclus écrit que "de ce que dit Hippias d'Élis il ressort qu'il se fit une réputation en géométrie".

Malheureusement nous ignorons le caractère précis de l'ouvrage où Hippias (qui avait écrit sur de nombreux sujets) parlait de ce personnage.

Pour revenir à Platon, il faut observer que s'il paraît avoir considéré Hippias comme un médiocre mathématicien, il faut se méfier, ici comme toujours, de la malveillance du philosophe envers les sophistes. Cette malveillance générale peut d'ailleurs avoir été renforcée dans le cas d'Hippias par le fait que celui-ci, s'il est vraiment l'inventeur de la ligne connue sous le nom de quadratrice, pratiquait un style de mathématiques qui avait peu de chances de recevoir l'approbation de Platon.

Rappelons que la quadratrice est la ligne engendrée de la manière suivante (fig. 1). Une droite se meut d'un mouvement de rotation uniforme autour du sommet A d'un carré ABCD, sa position initiale étant AB et sa position finale AD. Dans le même temps, une autre droite se meut d'un mouvement de translation uniforme en restant parallèle au côté AD, sa position initiale étant BC et sa position finale AD. La quadratrice BME est engendrée par le point d'intersection M de ces deux droites. Cette

1. PROCLUS, *In Euclidem*, ed. Friedlein, p. 65.

ligne nous est principalement connue par Pappus, qui après avoir décrit sa génération, montre comment elle peut être employée pour résoudre le problème de la quadrature du cercle (d'où son nom) et celui de diviser un angle dans un rapport donné².

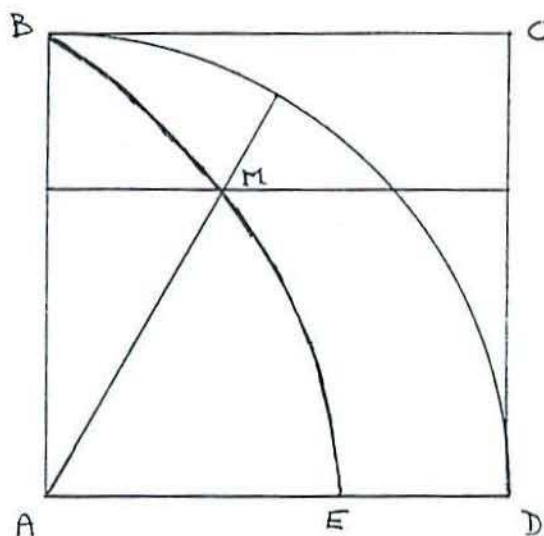


Fig. 1. La quadratrice.

L'attribution de l'invention de cette ligne à Hippias repose sur deux passages du commentaire de Proclus sur Euclide. L'un de ces passages³ dit que divers auteurs ont résolu le problème de la trisection de l'angle "par les quadratrices d'Hippias et de Nicomède". L'autre⁴ est plus précis. Énumérant divers mathématiciens qui ont donné la propriété caractéristique ($\sigma\mu\pi\tau\omega\mu\alpha$) de

2. PAPPUS, *Collection mathématique*, IV, 30 - 32 pour la définition de la quadratrice et son application à la quadrature du cercle; IV, 45 pour son application au problème de la division de l'angle dans un rapport donné.

3. PROCLUS, *op. cit.*, p. 272.

4. *Ibid.*, p. 356.

diverses lignes, il dit: "Ainsi Apollonius donne le caractère de chacune des coniques; Nicomède a fait de même pour les conchoïdes, Hippias pour les quadratrices, Persée pour les spiriques".

La question de savoir si cet Hippias est bien le sophiste du V^e siècle a été depuis longtemps débattue⁵. Il est impossible d'arriver à une conclusion absolument certaine sur ce point. A priori, l'Hippias mentionné dans ces deux passages pourrait être un auteur plus récent que notre sophiste, qui aurait nettement dégagé la définition de la quadratrice dans un ouvrage accessible directement ou indirectement à Proclus, sans nécessairement en être l'inventeur, tout comme Apollonius est cité comme celui qui a dégagé la propriété caractéristique des coniques, alors qu'il n'a pas inventé ces courbes. Mais le seul Hippias dont Proclus parle par ailleurs est bien "Hippias d'Élis", comme on l'a vu, et c'est en relation avec la géométrie qu'il en parle, même si dans cet autre passage il ne le cite qu'à titre d'autorité historique, et non à titre de géomètre. D'autre part il est certain que la quadratrice était connue dans la deuxième moitié du IV^e siècle puisque dès cette époque Dinostrate s'en était servi pour quarrer le cercle⁶. Mais ce n'est certainement pas à cette occasion que cette ligne a été introduite pour la première fois, quoique ce soit à cela qu'elle doit le nom sous lequel elle a été connue depuis. La propriété par laquelle elle permet de quarrer le cercle n'est en effet pas du tout évidente. L'occasion première de son introduction n'a pu être que le problème de la trisection de l'angle, ou plutôt le problème plus général de la division d'un angle dans un rapport donné,

5. Voir un résumé de la question au XIX^e siècle dans P. TANNERY, *Pour l'histoire des lignes et surfaces courbes dans l'Antiquité* (1884), t. II de ses *Mémoires Scientifiques*, spécialement pp. 2 - 5. Depuis, la question n'a pas progressé vers une solution définitive. On trouvera une discussion récente dans W. KNORR, *The ancient tradition of geometric problems* (1986), pp. 80 - 85.

6. PAPPUS, *Collection mathématique*, IV, 30.

problème pour lequel elle est manifestement faite. Bien entendu, rien n'oblige à penser qu'il a dû s'écouler beaucoup de temps entre cette première apparition de la quadratrice et le moment où Dinostrate s'est aperçu qu'elle pouvait aussi servir à quarrer le cercle. Mais d'un autre côté, rien ne s'oppose non plus à ce qu'elle remonte au V^e siècle. La solution du problème de la duplication du cube par Archytas, au début du IV^e siècle, montre que la résolution de problèmes géométriques au moyen de lignes ou de surfaces engendrées cinématiquement était familière aux mathématiciens de cette époque. En l'absence de tout autre candidat, comme d'objections vraiment sérieuses, il paraît raisonnable de maintenir que la première introduction de la quadratrice est due au sophiste d'Élis⁷.

7. C'est la conclusion, fort sage, de TANNERY (*op. cit.*, p. 5). Malheureusement, dans ce travail, TANNERY croit devoir attribuer à Hippias d'Élis l'utilisation de la courbe pour quarrer le cercle, revenant sur un premier jugement qu'il résume ainsi: "J'avais (...) été amené à interpréter le passage de Pappus (...) en admettant que le travail d'Hippias s'était borné à la division d'un angle donné, que Dinostrate avait le premier fait l'application de la courbe à la quadrature du cercle, et que la dénomination qui lui a été donnée correspondait à ce travail postérieur". Les arguments qu'il donne pour justifier son changement d'opinion sont peu convaincants, et ses premières conclusions nous paraissent être celles qui ont le plus de chances d'être justes.

Dans son réexamen récent de la question (cf. n. 5), W. Knorr conclut que l'Hippias mentionné par Proclus en relation avec cette ligne ne saurait être le sophiste d'Élis, mais un géomètre postérieur à Nicomède qui n'aurait fait que réunir les travaux de ses prédécesseurs. Son argumentation nous paraît viciée par le fait qu'il fait porter l'essentiel de la discussion sur la question de savoir si Hippias a pu utiliser la courbe pour quarrer (ou pour rectifier) le cercle, ce qui comme on vient de le dire n'a certainement pas été son premier usage. D'autre part Knorr, rejetant le témoignage de Pappus, dénie même à Dinostrate cet emploi de la courbe. Il fait de Dinostrate celui qui l'a introduite pour résoudre le problème de la division de l'angle, et attribue à Nicomède la découverte de son usage pour quarrer le cercle. Son argument est que la quadratrice ne permet pas

Il faut aussi noter que le pluriel employé par Proclus dans les deux passages cités n'implique pas qu'il y ait eu d'autres lignes appelées quadratrices que celle que nous connaissons, et notamment (comme le premier passage pourrait le donner à penser) qu'il y en aurait eu une due à Hippias et une autre due à Nicomède. Ce pluriel, comme le dit P. Tannery⁸, est un hellénisme: Proclus parle "des" quadratrices, bien qu'il n'y en ait essentiellement qu'une puisque toutes sont semblables entre elles, comme Archimède parle "des" spirales, bien que toutes les spirales soient semblables. Si dans le premier passage il cite aussi Nicomède à propos de la quadratrice, c'est parce que celui-ci était, comme nous le savons par Pappus, un des auteurs qui avaient appliqué cette ligne à la quadrature du cercle. Peut-être Nicomède est-il le premier qui lui ait donné ce nom. Cela expliquerait que Proclus le mentionne après avoir nommé Hippias qui, lui, serait alors mentionné à titre de premier inventeur.

Le style de mathématiques auquel appartient la quadratrice peut aider, comme on l'a suggéré plus haut, à rendre compte du mépris de Platon pour Hippias mathématicien. On sait en effet que le philosophe était hostile aux solutions mécaniques en géométrie, puisque même à ses amis Archytas et Eudoxe il reprochait d'avoir usé de telles méthodes pour résoudre le problème de la duplication du cube⁹. On pourrait objecter à cela que ce à

de résoudre directement le problème de la quadrature du cercle, mais seulement celui de sa rectification. L'équivalence des deux problèmes n'étant assurée que par la proposition I du traité de la *Mesure du cercle* d'Archimède, l'emploi de la courbe pour quarrer le cercle ne saurait être antérieur à cet ouvrage du Syracusain. Mais même en admettant qu'Archimède ait bien été le premier à découvrir la démonstration qu'il donne dans ce traité (ce sur quoi nous avons quelques doutes), il est peu vraisemblable qu'il ait découvert la propriété elle-même, car sa démonstration n'est qu'une version rigoureuse d'un argument heuristique très simple qui a dû être vu bien avant lui.

8. *Op. cit.*, p. 1, n. 3.

9. *Vie de Marcellus*, 14, 11; voir aussi *Propos de table*, 718e - f.

quoi Platon était hostile, c'est à l'usage de dispositifs mécaniques plutôt qu'à l'usage théorique du mouvement en géométrie. C'est bien un tel usage de dispositifs mécaniques que vise Plutarque, tandis que la génération cinématique de la quadratrice est purement théorique. Elle se prête très mal à une traduction en un instrument mécanique qui permettrait de tracer la courbe d'un trait continu comme on peut par exemple tracer la conchoïde. Mais on peut en dire autant de la solution d'Archytas, et aussi, semble-t-il, de la solution d'Eudoxe, qui est perdue¹⁰. Ce doit donc bien être le caractère cinématique de ces solutions que Platon désapprouvait. Nous avons d'ailleurs des passages de Platon lui-même qui confirment qu'à ses yeux le mouvement devait être exclu, même à titre d'outil théorique, de la géométrie. En *Rep.* VII, 526e, il demande si la géométrie "force à contempler la réalité (...) ou la génération", et la réponse qu'il donne à cette question ne fait pas de doute, étant explicitée un peu plus loin (527b): "la géométrie est connaissance de ce qui toujours existe". En 528a, il oppose l'astronomie, science du solide en mouvement, à la géométrie qui étudie le solide en soi (*αὐτὸ καὶ αὐτό*). Qui plus est, le mouvement dont il est question dans une astronomie vraiment scientifique est un mouvement intelligible, non le mouvement visible, comme Platon prend soin de le préciser en 529 d. Pour lui, donc, il y a une séparation rigoureuse entre la géométrie d'où le mouvement, non seulement sensible,

10. La solution d'Archytas est rapportée en détail par Eutocius dans son commentaire sur le traité *De la sphère et du cylindre* d'Archimède (commentaire sur la synthèse de la proposition 1 du livre II). Eutocius donne comme source Eudème de Rhodes. Quant à celle d'Eudoxe, il déclare n'en avoir trouvée qu'une version fautive, qu'il rejette comme inauthentique. Ces deux solutions sont mentionnées par Eratosthène dans sa lettre à Ptolémée Evergète, intégralement citée par Eutocius; lettre que la plupart des auteurs depuis von Wilamowitz ont tenue pour apocryphe, mais dont W. Knorr a eu raison, pensons-nous, de défendre l'authenticité (KNORR, *op. cit.*, pp. 18 - 20).

mais intelligible, est exclu, et l'astronomie qui prend en compte le mouvement intelligible. Archytas et Eudoxe pouvaient trouver grâce à ses yeux en raison d'autres aspects de leurs travaux, mais si la quadratrice était la principale contribution d'Hippias à la géométrie, on conçoit que Platon ait eu de lui une piètre opinion.

Pour l'autre contribution technique à la géométrie attribuée à un sophiste, la fausse quadrature d'Antiphon, nous pensons, comme nous l'avons dit, qu'elle peut plutôt se comprendre comme un argument philosophique, et nous en renvoyons l'étude à un chapitre ultérieur de cet article. Quant à la fausse quadrature de Bryson, nous avons déjà dit pourquoi nous l'écartons de notre propos¹¹. Mais en relation directe avec la question des contributions techniques des sophistes à la géométrie, nous voudrions montrer, sur l'exemple de Théodore de Cyrène, qu'entre le monde des sophistes et celui des véritables mathématiciens il n'y avait pas une séparation étanche, et qu'un même personnage pouvait avoir, à la frontière des deux, une position assez ambiguë.

2. Théodore de Cyrène, sophiste spécialisé en mathématiques?

Platon, dans le *Théétète* (178a), nous apprend que Théodore de Cyrène avait été l'élève de Protagoras. Cette information est loin de n'avoir qu'un intérêt anecdotique. Plusieurs fois (161a, 162b, 168c, 171c, 183b - c) Platon insiste sur la fidélité du mathématicien à la mémoire de son ancien maître, et sur l'amitié qui les avait liés. De plus, en 164e - 165a, Théodore admet im-

11. Sur Bryson, voir MULLER R., *Les Mégariques, fragments et témoignages*, Paris, Vrin, 1985, pp. 66 - 69 et 174 - 179. Sa "fausse quadrature" du cercle est en fait un argument non-constructif pour établir l'existence d'un carré égal au cercle à partir de l'existence d'un carré plus grand et d'un carré plus petit que le cercle. La nature exacte de l'argument reste discutée.

plicitement qu'il eût pu devenir à son tour un sophiste, à l'imitation de son maître: "En fait, Socrate, ce n'est pas moi qui en suis le tuteur [de la doctrine de Protagoras, comparée par Socrate à une orpheline], c'est bien plutôt Callias, le fils d'Hipponicos. Quant à nous, nous nous sommes un peu trop vite détourné des raisonnements abstraits pour nous tourner vers la géométrie¹²". Théodore a donc choisi de se *spécialiser*, de se consacrer à ces τέχνη que Protagoras considérait comme plus nuisibles qu'utiles à la formation des jeunes gens. En enseignant les mathématiques, il fait exactement ce que son maître reprochait à Hippias.

En fait, Théodore a plus d'un trait commun avec les sophistes. D'abord le public auquel ses cours s'adressent, qui est celui des jeunes gens de bonne famille, tel Théétète. Manifestement notre géomètre a une longue expérience de cet enseignement, acquise à Athènes et ailleurs: "De tous les jeunes gens, sache-le, que j'aie jamais rencontrés (et ils sont fort nombreux, ceux avec qui j'ai été en relation!) jusqu'à présent mon expérience ne m'en a fait connaître aucun qui fût si merveilleusement doué de sa nature etc." (144a).

Théodore a ouvert depuis peu un cours de mathématiques à Athènes. Il arrivait de Cyrène, sa patrie (143c), mais ce qu'il dit dans le passage qu'on vient de citer ne permet pas de douter

12. La manière dont Théodore parle de sa "conversion" à la géométrie est intéressante. Il déclare s'être détourné des *ψιλῶν λόγων*, expression qu'à la suite de plusieurs traducteurs nous avons rendue par "raisonnements abstraits". Le sens premier de *ψιλός* est "chauve", d'où "dépouillé, dénudé". L. Robin, qui traduit par "purs raisonnements", nous semble interpréter assez correctement l'expression, tout en la forçant peut-être un peu, en disant qu'il s'agit des "raisonnements tout formels et, par conséquent, dans la pensée de Théodore, vides de substance, qui sont ceux des dialecticiens". "Raisonnements abstraits", avec la nuance un peu péjorative que le mot peut avoir, nous paraît mieux rendre cette idée que "purs raisonnements". Il est certain que Théodore ne se sent pas à l'aise dans les discussions qui sortent de son domaine technique. Il se montre très réticent à se laisser entraîner par Socrate dans un débat dia-

qu'il ait derrière lui une longue carrière de professeur itinérant, exactement comme l'étaient les sophistes. De plus, comme eux, il vit de son enseignement: "il est – nous dit-il encore de Théétète – en matière d'argent, d'une extrême libéralité" (144d). Ainsi, il n'y a pas de doute: professionnellement, Théodore est un sophiste, si l'on définit le sophiste comme un homme qui fait métier de donner aux jeunes gens de bonne famille un enseignement intellectuel de niveau élevé. Ce qui le distingue des autres sophistes, du moins de ceux que nous connaissons quelque peu, c'est le caractère spécialisé de son enseignement, volontairement limité aux mathématiques.

C'est sans doute à cette spécialisation qu'il doit de trouver grâce aux yeux de Platon pour l'aspect mercantile de son activité. Une des choses, en effet, que Platon reproche aux sophistes ordinaires, comme on le voit au début du *Protagoras*, c'est de se faire payer un salaire pour ne donner aucune compétence en rien de déterminé: "Tu projettes à cette heure de te rendre auprès de Protagoras, dans l'intention de lui payer, pour tes fins personnelles, un salaire en argent: sais-tu ce qu'est celui auprès duquel tu vas aller et ce que toi, ainsi, tu deviendras? C'est comme si (...) on te demandait: à quel titre (...) veux-tu, à Hippocrate [de Cos] payer un salaire? Que répondrais-tu? – Je répondrais que c'est à titre de médecin. – Et en vue de devenir quoi? – De devenir médecin etc." (*Prot.* 311b - c). Si Théodore est une sorte de sophiste, du moins sait-on quelle marchandise intellectuelle il vend!

En définitive, le cas de Théodore nous montre que certains mathématiciens ont pu vivre et travailler à la manière des sophistes, après avoir été formés à leur école. Et il nous suggère cette réflexion qu'au fond, il n'y a peut-être pas autant de différence entre un Hippias et un Théodore qu'on peut en avoir l'impres-

lectique (146b, 162b), et s'il finit par s'y résigner par fidélité à la mémoire de son ami Protagoras (169c), il s'en retire avec empressement dès qu'il estime avoir rempli ce devoir (183c).

sion à une lecture superficielle de Platon qui, visiblement, avait plus de sympathie pour celui-ci que pour celui-là¹³.

Bien entendu il resterait à savoir de qui Théodore avait reçu sa formation *proprement mathématique*. Ce ne peut pas être de Protagoras lui-même puisque celui-ci se refusait à enseigner les τέχναι. Au tournant du IV^e siècle, un jeune homme doué comme Théétète pouvait apprendre les mathématiques d'un quasi-sophiste comme Théodore. Mais qu'en était-il lorsque Théodore avait l'âge de Théétète et suivait les cours de Protagoras (ce qui ne doit pas se situer beaucoup plus tard que 450 ou 440, car dans le *Théétète* Théodore apparaît déjà comme un homme âgé en 399, et il dit lui-même que sa spécialisation a été précoce)? En fait, on bute ici sur le problème de la transmission du savoir mathématique au V^e siècle, sur laquelle il faut avouer qu'on ne sait pas grand chose. Il est douteux en tout cas que la réponse soit dans le rattachement à une école mathématique constituée, si tant est qu'il en ait existé alors (on pense évidemment à l'école pythagoricienne, mais que sait-on réellement de l'activité mathématique des Pythagoriciens dans le troisième quart du V^e siècle?). Platon ne suggère rien qui aille dans ce sens, et la manière dont Théodore parle de son orientation vers la géométrie ne laisse pas supposer qu'il ait reçu sa première formation mathématique ailleurs que dans le milieu intellectuel qui entourait Protagoras, sans qu'on puisse avancer aucun nom.

3. La critique de la géométrie par Protagoras

Si Protagoras faisait profession de ne pas enseigner les mathématiques, il ne les ignorait pas, et Aristote nous a conservé le

13. En fait, la manière dont Platon parle de Théodore n'est pas exempte d'une légère ironie, mais c'est une ironie bonhomme, on peut même dire affectueuse, qui teinte le souvenir que le philosophe avait gardé de son premier maître en mathématiques.

souvenir d'une "réfutation" (ἐλεγχος) de la géométrie par le sophiste d'Abdère:

"Et les lignes sensibles ne sont pas davantage le genre de lignes dont parle le géomètre, car aucune des choses sensibles n'est droite ou circulaire de la manière qu'il suppose; le cercle, en effet, ne touche pas la règle en un point, mais de la manière que Protagoras disait qu'il la touche, lorsqu'il réfutait (ἐλέγχων) les géomètres" (*Met B 2*, 997b35 - 998a4).

Protagoras s'était donc livré à une critique de la géométrie. La façon dont Aristote s'exprime ne suggère pas que ce soit dans un ouvrage spécialement consacré à cela, et nous verrons que cette critique pouvait fort bien trouver place dans le fameux traité *De la vérité*. Le sens de cette critique est assez clair à travers ce qu'en dit le Stagirite, si peu que ce soit. Ce que le sophiste reprochait aux géomètres, c'est de prêter aux objets des propriétés qu'ils n'ont pas en réalité. Dans l'exemple cité c'est, pour un cercle et une droite – entendez un corps circulaire et un corps droit, comme le marque le mot "règle" (κανών) – la propriété de se toucher en un seul point. Aristote ne précise pas explicitement comment Protagoras décrivait le contact du cercle et de la droite. On comprend bien néanmoins que ce que devait dire le sophiste, c'est que ce contact se fait suivant une zone de quelque étendue. Cette critique peut paraître triviale aujourd'hui, mais il faut l'envisager dans le contexte du V^e siècle. Il n'existait pas alors, autant que nous puissions en juger, d'épistémologie des mathématiques. Les mathématiciens avaient l'habitude de manipuler des objets idéalisés. Mais c'était là une *pratique* qui n'avait pas encore fait l'objet d'une réflexion philosophique. Ou du moins cette réflexion, si elle existait, n'avait pas abouti à des réponses nettes quant au statut des objets mathématiques et à leur rapport aux objets sensibles. L'attitude que Platon prête à Théodore de Cyrène (cf. note 12 ci-dessus) témoigne du fait que les mathématiciens, ou du moins certains d'entre eux, étaient peu enclins à quitter le terrain solide, à leur sentiment, de leur spécialité pour

se laisser entraîner sur le terrain mouvant des débats dialectiques. En fait, c'est cette situation philosophique que nous révèle la critique du sophiste d'Abdère. Lui, du moins, apportait à la question du statut des objets mathématiques une réponse nette, négative et radicale: les géomètres parlent d'objets qui n'existent pas.

Cette attitude s'accorde-t-elle avec ce que nous savons par ailleurs de la doctrine de Protagoras en ce qui concerne la théorie de la connaissance? Rappelons comment Platon, dans le *Théétète*, nous présente celle-ci. Selon lui, Protagoras tient que la science d'identifie à la sensation. Quand Socrate interroge Théétète sur la définition de la science, la première que propose le jeune homme est celle-ci: "la science n'est pas autre chose que la sensation" (151e). Immédiatement, Socrate identifie cette conception de la science à une thèse de Protagoras: "Il se peut bien, en vérité, que, sur la nature de la science, elle ne soit pas méprisable, la thèse que tu viens d'énoncer! Bien au contraire, c'est la thèse même de Protagoras; mais il a dit ces mêmes choses d'une autre façon: L'homme, déclare-t-il en effet à peu près, est la mesure de toutes choses, pour celles qui sont, mesure de leur être, et pour celles qui ne sont pas, mesure de leur non-être". Cette maxime fameuse du sophiste d'Abdère avait fortement frappé Platon. Il la cite deux fois, dans le *Cratyle* (386a) et dans le présent passage du *Théétète*. Dans les deux cas, il l'interprète de la même manière: "Tels m'apparaissent à moi les objets, tels ils sont pour moi, tels ils t'apparaissent à toi, tels ils sont pour toi". Dans le *Théétète*, il appuie cette interprétation d'un exemple, celui du courant d'air qui, de deux hommes, fait frissonner l'un et pas l'autre. Pour le premier ce courant d'air est froid, pour le second il ne l'est pas, Il n'y a aucune réalité à chercher au delà de nos perceptions sensibles.

Protagoras n'a certainement jamais écrit noir sur blanc que la science est identique à la sensation, car alors Platon n'aurait pas eu à alléguer qu'il l'avait dit "d'une autre façon". Il n'en est pas moins vrai que son relativisme se fonde très largement sur un

axiome à peu près équivalent, comme le montre le fameux fragment sur l'existence des dieux: "Des dieux je ne puis savoir ni qu'ils existent, ni qu'ils n'existent pas, ni quelle est leur forme; bien des circonstances empêchent de le savoir: l'absence de données sensibles et la brièveté de la vie" (fragment B4). On voit aisément que d'un tel axiome Protagoras pouvait très naturellement tirer sa réfutation de la géométrie. Le cas de la géométrie est assez particulier: si un courant d'air peut être perçu comme froid par un homme et comme tiède par un autre, aucun homme ne perçoit les objets tels que les géomètres les supposent, donc les objets dont ils parlent sont absolument inexistant¹⁴. On peut ainsi parfaitement concevoir, comme nous le disions plus haut, que la réfutation de la géométrie par Protagoras ait fait partie de son traité *De la vérité*.

Cette critique de Protagoras réduisait la géométrie à néant, pour autant qu'on admettait son axiome fondamental. Elle ne laissait subsister aucune place, aucun statut possible pour les objets idéaux sur lesquels raisonne le géomètre. Mais en même temps elle traduisait, chez le sophiste d'Abdère, une nette prise de conscience de ce caractère idéal. C'est bien ainsi que l'entend Aristote, puisque c'est précisément à propos – et à l'appui – de la différence de statut entre lignes sensibles et lignes géométriques qu'il la cite. Par là, cette critique, pour destructrice qu'elle se soit voulue, a pu contribuer efficacement à la formation d'une philosophie des mathématiques, en invitant certains esprits à assumer l'idéalité des objets mathématiques qu'elle mettait en lumière. C'est précisément ce qu'a fait Platon. Il n'est évidemment pas question de dire que le statut de l'objet mathématique chez Platon a été déterminé uniquement par la nécessité de répondre à

14. Cf. GUTHRIE W.K.C., *A History of Greek Philosophy*, t. III, p. 267: "Consistent with this was his attack on mathematicians for dealing in abstractions, describing straight lines, circles and so forth as no man perceives them, and as, therefore, they do not exist".

la critique de Protagoras. Les sources de la pensée de Platon sont beaucoup plus complexes. Il est indéniable que Protagoras est, parmi ses prédécesseurs, un de ceux qui ont le plus influencé, par réaction, la genèse de sa philosophie, mais ce n'est pas seulement par cet aspect relativement étroit que constitue sa critique de la géométrie. Néanmoins la conception platonicienne de l'objet mathématique repose bien, en quelque sorte, sur un retournement de la critique du sophiste: il est bien vrai que les objets sensibles n'ont jamais les propriétés que suppose le géomètre, mais ce sont les objets sensibles qui en un certain sens n'existent pas; les objets mathématiques, eux, sont réels précisément parce que ce sont des objets idéaux.

4. La "quadrature" d'Antiphon

Elle fait partie de plusieurs fausses solutions du problème de la quadrature du cercle dont Aristote parle en divers endroits. Il y a trois personnages à qui il en attribue: Hippocrate de Chio, Antiphon et Bryson. Les allusions d'Aristote à ces fausses quadratures sont toujours très brèves et peu explicites, mais ses commentateurs (Alexandre d'Aphrodise, Simplicius, Themistius, Philopon) se sont appliqués à les éclairer. Néanmoins les explications qu'ils donnent laissent elles-mêmes place à diverses interprétations.

Des trois personnages cités, Hippocrate de Chio est le seul qui apparaît comme un mathématicien professionnel, et ses travaux sont assez bien connus. S'il n'a pas résolu le problème de la quadrature du cercle, il a été le premier à quarrer géométriquement certaines figures curvilignes, et il a attaqué la quadrature du cercle elle-même par une méthode tout-à-fait rationnelle et dont il n'était nullement déraisonnable a priori de penser qu'elle pouvait aboutir. Il passait pour avoir prétendu, ou cru, à tort, avoir résolu le problème, et Aristote s'est fait l'écho de cette opinion (*Soph. El.* 11, 171b 12 - 18). La nature, et la réalité même,

de cette erreur, restent matière à discussion¹⁵, mais Aristote est net sur un point: l'erreur d'Hippocrate – ou à lui attribuée – était celle d'un géomètre, elle consistait en un faux raisonnement à partir des vrais principes de la géométrie. Pour les fausses quadratures d'Antiphon et de Bryson, il dit au contraire qu'elles se situaient en dehors des principes de la géométrie. En ce qui concerne celle de Bryson, nous renvoyons à la note 13 ci-dessus. Voici ce qu'Aristote dit de celle d'Antiphon (*Phys* I, 2, 185a 14 - 17):

"On n'est pas obligé de réfuter toutes les difficultés qui peuvent être soulevées, mais seulement celles qui sont déduites faussement des principes; quant à celles qui ne le sont pas, on n'y est pas tenu. Par exemple, il convient de réfuter géométriquement la qua-

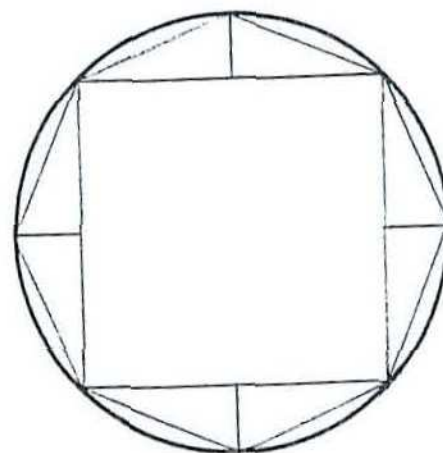


Fig. 2. La quadrature d'Antiphon.

15. Cf. LLOYD D., The alleged fallacy of Hippocrates of Chios, *Apeiron* 20 (1987) pp. 103 - 127.

drature par les segments ¹⁶, mais il n'y a pas lieu de réfuter ainsi celle d'Antiphon¹⁷.

Ce qu'était l'argument d'Antiphon a été exposé à peu près de la même manière par Simplicius et par Themistius ¹⁷. Partant d'un polygone inscrit, un carré par exemple, on divise les arcs de cercle en deux, et on ajoute sur les côtés du carré quatre triangles isocèles, de manière à obtenir un octogone inscrit (cf. fig. 2). L'argument essentiel est alors le suivant:

"On fait cela continuellement (ἀεὶ), jusqu'au moment où, la figure plane [i.e. le cercle] étant épuisée, on aura de cette manière inscrit dans le cercle un polygone dont les côtés, à cause de leur petitesse, coïncideront avec la circonférence du cercle".

Puisqu'on sait quarrer tout polygone, on pourra quarrer le cercle en quarrant le polygone qui coïncide avec lui. Les commentateurs, anciens et modernes, ont généralement considéré que l'argument d'Antiphon était fondé sur une conception atomiste de la ligne. C'est ainsi qu'au dire de Simplicius l'entendait Eudème, le disciple d'Aristote historien de la géométrie. Ce que disait Eudème, c'est qu'en faisant coïncider un certain polygone avec la circonférence, Antiphon supprimait le principe géométrique "qui dit que les grandeurs sont indéfiniment divisibles". Invoker ce principe est bien aristotélécien, et permet de comprendre pourquoi, selon le Stagirite, la quadrature d'Antiphon n'est pas "déduite faussement des principes" de la géométrie.

De fait, des arguments relevant d'un atomisme mathématique semblent avoir été employés vers la même époque par un mathé-

16. Il semble que cette quadrature ne soit autre que celle d'Hippocrate (cf. l'article cité dans la note précédente).

17. SIMPLICIUS, *In Aristotelis physicorum librorum quattuor priores commentaria*, ed. DIELS, pp. 54 sq. — THEMISTIUS, *In Aristotelis physica paraphrasis*, ed. SCHENKL, pp. 3 - 4.

maticien plus considérable qu'Antiphon, à savoir Démocrite, pour résoudre des problèmes analogues. Considérons la proposition selon laquelle une pyramide est le tiers du prisme ayant même base et même hauteur qu'elle, et la proposition analogue relative au cône et au cylindre. Au témoignage d'Archimède, ces

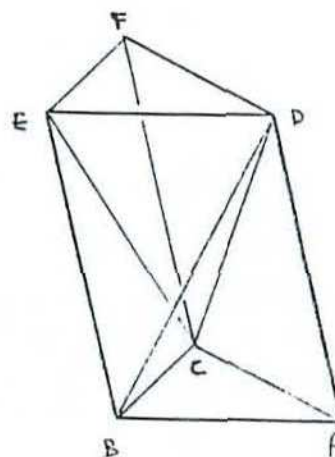


Fig. 3.

propositions ont été démontrées pour la première fois par Eudoxe, mais le mérite en revient pourtant en partie à Démocrite "qui le premier a fait apparaître sans démonstration (χωρίς ἀποδείξεως ἀποφαινόμενῳ) cette propriété de ladite figure"¹⁸. L'argument de Démocrite, qui n'avait donc, au dire d'Archimède, qu'une valeur heuristique, était certainement le suivant.

18. Archimède, *De la sphère et du cylindre*, préambule, pour l'attribution à Eudoxe; *De la méthode*, préambule, pour l'attribution à Eudoxe et la reconnaissance du rôle de Démocrite. Remarquons que celui-ci avait certainement donné un argument persuasif, sinon démonstratif, comme le marque le verbe ἀποφαίνειν employé par Archimède. Au reste, bien qu'on n'ait pas de témoignage sur la mathématique pratique en Grèce au V^e siècle, il est peu probable que les propriétés en question n'aient pas été

On commence par remarquer qu'un prisme triangulaire se divise en trois pyramides comme suit (cf. fig. 3 ci-contre et prop. XII, 7 des *Éléments*). On montre que les trois pyramides ABCD, BCDE, CDEF sont égales, de sorte que chacune d'elles est le tiers du prisme. L'égalité de ces trois pyramides résulte de ce qu'elles ont des bases égales et des hauteurs égales (par exemple ABCD et BCDE ont les bases ABD et BDE égales comme moitiés du parallélogramme ABDE, et la même hauteur). On utilise donc ici une proposition qui dit que des pyramides à bases

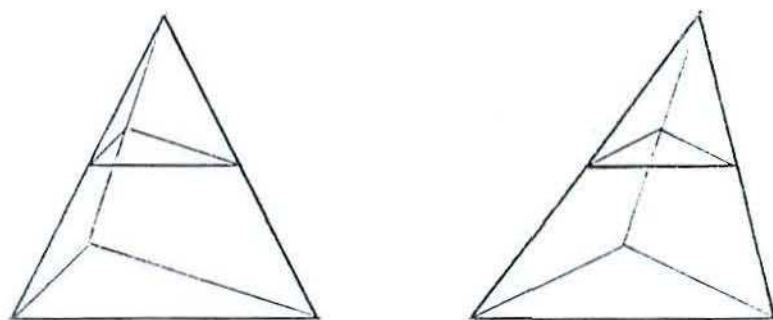


Fig. 4. L'argument de Démocrite.

triangulaires qui ont des bases égales et des hauteurs égales sont égales, et c'est cette proposition qui fait difficulté. Elle ne peut se démontrer rigoureusement que par la méthode d'exhaustion inventée par Eudoxe. C'est ici sans doute qu'en l'absence de cette méthode se plaçait l'argument heuristique de Démocrite, qu'on peut reconstituer ainsi (cf. fig. 4). On coupe les deux pyramides par des plans parallèles au plan des bases. Par un argument de similitude, les triangles correspondants sont alors égaux, et Démocrite en "déduisait" l'égalité des pyramides en considérant celles-ci comme composées d'un empilement ou d'un agrégat de triangles. Le passage de la proposition relative à la pyramide à la

déjà connues sous forme de formules pour le calcul des volumes, comme elles l'étaient des Égyptiens du Moyen-Empire.

proposition relative au cône se faisait vraisemblablement par un argument qui était essentiellement celui qu'on attribue à Antiphon.

L'argument employé pour "faire apparaître" l'égalité des pyramides des bases égales et des hauteurs égales peut a priori se comprendre de deux manières, soit dans le cadre d'un atomisme mathématique qu'il ne serait pas très étonnant de trouver chez Démocrite, théoricien par ailleurs de l'atomisme en physique, soit dans le cadre d'une méthode d'indivisibles telle que celle qu'emploie Archimède dans le traité *De la méthode* où, précisément, il cite l'Abdérain comme utilisateur, avant lui, d'un argument heuristique. Qu'en fait il se soit bien agi d'atomisme mathématique, c'est ce qu'implique le fragment B CLV de Démocrite, dès qu'on veut bien admettre qu'il n'est pas sans rapport avec la question. Ce fragment, qui nous a été transmis par Plutarque¹⁹, citant Chrysippe, est une interrogation au sujet

19. L'interprétation de ce passage a généralement été obscurcie par le fait que le mot $\tau\eta\mu\alpha$ a été compris comme signifiant "section", alors qu'il a son sens normal de "segment". GUTHRIE (*op. cit.*, t. II, p. 487, n. 2) note que "the word $\tau\eta\mu\alpha$ at its first occurrence evidently means the two pieces into which the cone is cut". Mais il ne paraît pas avoir vu que dans sa deuxième occurrence il désigne tous les segments découpés par tous les plans parallèles, ces segments ayant bien droit à ce nom car ce sont des solides d'épaisseur microscopique. Et les cercles dont il est question ensuite sont la même chose.

La reconstitution que nous avons donnée de l'argument de Démocrite est celle qui est adoptée par la plupart des auteurs. M. CAVEING (*La constitution du type mathématique de l'idéalité dans la pensée grecque*, thèse, 1977, t. 3, pp. 1459 - 1450), en a proposé une autre qui, telle qu'il la présente (comme une méthode de calcul approché), n'implique ni atomisme mathématique, ni indivisibles. Le témoignage d'Archimède nous semble viser autre chose qu'une simple méthode de calcul approchée, mais en modifiant un peu l'idée de CAVEING, on peut sans invraisemblance attribuer à Démocrite une sorte d'"arithmétique des infinis" à la Wallis, qui aurait plus d'affinité avec l'atomisme mathématique qu'avec une méthode d'indivisibles continus.

des segments découpés dans un cône par un plan parallèle à la base. Démocrite se demandait, "lorsqu'un cône est coupé par un plan parallèle à la base, ce qu'on doit penser des surfaces des segments, si elles sont égales ou inégales; si elles sont inégales, elles rendront le cône irrégulier, avec de nombreuses indentations en forme de marches d'escalier et des aspérités; et si elles sont égales, les segments seront égaux, et le cône, étant composé de cercles égaux et non inégaux, aura manifestement acquis le caractère du cylindre". Cette question montre comment Démocrite conçoit le découpage d'un solide en deux segments par un plan: ce dernier ne détermine pas *une surface commune* aux deux segments, mais *deux surfaces contiguës* dont chacune limite un des segments. Lorsqu'on passe de la considération d'un seul plan à celle de tous les plans parallèles à la base, comme Démocrite le fait dans la suite du passage, cette conception aboutit à considérer le cône comme composé d'un empilement de cercles ayant chacun un précédent et d'un suivant, et non comme un agrégat continu d'indivisibles²⁰.

Un tel atomisme mathématique prêtait à contestation, et c'est peut-être ce genre de conception que vise Platon quand il écrit dans la *République* (VII, 528d), à propos de la stéréométrie, qu'en ce domaine "l'état de la recherche est risible". Mais il semble bien que Démocrite lui-même était conscient des difficultés inhérentes à son argument, et à l'atomisme *mathématique*. Le fragment B CLV, en même temps qu'il nous révèle cet atomisme, nous montre que l'Abdéritain se rendait compte des difficultés que soulevait la conception d'un solide comme un empilement de couches minces. Nous voyons aussi que ces difficultés, telles qu'il les formule, sont propres à l'atomisme mathématique; car du point de vue de l'atomisme physique, il n'y a rien de choquant à ce que le cône présente, à l'échelle atomique, des indentations et des aspérités. C'est seulement par rapport à la repré-

sentation *idéale* que le géomètre se fait du cône que cela est choquant. Et nous voyons par là que Démocrite bute, comme son compatriote Protagoras, quoique par une voie différente, sur le problème du statut de l'objet mathématique comparé à l'objet physique.

D'après ce qu'on vient de dire, il est peu vraisemblable que Démocrite ait présenté son argument comme une véritable démonstration. Le fait qu'Aristote ne le mentionne jamais comme auteur de fausses démonstrations géométriques tendrait même à montrer qu'il s'en était expliqué: à défaut de voir clairement que son argument était heuristique, il avait dû admettre qu'il n'était pas parfaitement démonstratif.

Démocrite pouvait, dans le cadre du même atomisme mathématique, justifier l'identification du cercle et du polygone inscrit, qui lui permettait de passer du théorème sur la pyramide au théorème sur le cône. Mais là aussi, il ne pouvait pas considérer la démonstration comme entièrement satisfaisante, dès l'instant qu'il était conscient des difficultés inhérentes à l'atomisme mathématique.

Il n'en va pas de même avec Antiphon. Selon Aristote, le sophiste prétendait que son argument résolvait réellement la quadrature du cercle, et cela dans le but de briller aux yeux d'un public ignorant: "[sa démonstration] s'adresse à la foule, qui ne sait pas ce qui est possible et ce qui est impossible dans chaque science" (à vrai dire, Aristote dit cela à propos de Bryson, mais il ajoute aussitôt qu'il en est de même pour Antiphon; *Soph. El.*, 172a). Assurément, si Antiphon avait quelque originalité, celle-ci résidait plutôt dans l'*affirmation sans réserves de la validité* de l'identité du cercle avec le polygone plutôt que dans cette identification elle-même: c'est cela, en définitive, qui le différencie de Démocrite. Et c'est là qu'une autre interprétation de sa motivation autre que celle, peu flatteuse, que donne Aristote est possible. L'assertion selon laquelle il vient un moment où le polygone coïncide avec le cercle peut se comprendre dans la ligne de la critique de la géométrie par Protagoras. Le rapprochement

20. *De communis notitiis adversus Stoicos*, 1079.

avec Protagoras est d'ailleurs suggéré par un passage du commentaire d'Alexandre d'Aphrodise sur la *Physique*, cité par Simplicius dans son propre commentaire (p. 55). Là où Eudème disait qu'Antiphon supprimait le principe de la divisibilité indéfinie des grandeurs, Alexandre, de son côté, écrivait: "Le géomètre pose en principe que le cercle touche la droite en un point, mais Antiphon supprime ce principe". Cela ne se comprend guère dans la présentation du raisonnement d'Antiphon en termes de polygones inscrits, tels que la donnent Simplicius et Themistius, et on peut penser qu'Antiphon avait aussi présenté sa quadrature en termes de polygones circonscrits: le lien avec la critique de Protagoras se fait alors tout naturellement. Au demeurant, que l'on raisonne en termes de polygones inscrits ou de polygones circonscrits, la conclusion, du point de vue de Protagoras, sera la même: il viendra un moment où le polygone coïncidera avec la circonférence parce qu'il ne s'en distinguera plus pour la sensation, et que la sensation est toujours adéquate à la réalité. Alors la quadrature du cercle sera effectivement résolue. Le problème tel que le posent les géomètres, et qui ainsi posé paraît insoluble, est un problème vide puisque le cercle tel que le conçoivent les géomètres, qui ne coïncide jamais avec le polygone, n'existe pas.

Bien entendu, cette interprétation est incompatible avec celle qui consiste à voir dans l'argument d'Antiphon un recours à l'atomisme mathématique, puisque l'atomisme est une doctrine qui prétend atteindre une réalité non sensible sous-jacente à la sensation, et qu'ainsi il tombe sous la critique de Protagoras autant que le continu idéal de la géométrie classique.

Edmond MAZET

MAZET, Edmond. – *Les sophistes et la géométrie*. RPhA 1994 12: 201-224.
 • Étude de la contribution apportée par les sophistes au développement de la géométrie. Est notamment examiné le cas de Théodore de Cyrène, à travers le Théétète de Platon. [66-11059]