

1169
MESCHKOWSKI, H.
1961

I. Die Pythagoreer

In der Tat hat ja alles, was man erkennen kann, Zahl. Denn es ist nicht möglich, irgend etwas mit dem Gedanken zu erfassen oder zu erkennen ohne diese.

Philolaos aus Kroton¹⁾

1. Der Orden

Die Ursprünge der Mathematik liegen im Dunkeln. Der Historiker, der etwa die Geschichte der Mathematik im alten Ägypten erforschen will, muß seine Einsichten aus dem Studium von nur drei größeren Dokumenten (und einigen Fragmenten) herleiten ([I 6], S. 15). Diese Papyri waren Rechenanleitungen für den praktischen Gebrauch: Die Beamten des Pharaos sollten daraus lernen, wie man Lohnsummen berechnet oder den Bedarf an Getreide für das Backen einer bestimmten Menge Brot.

Der auf sehr praktische Ziele gerichtete „Papyrus Rhind“ beginnt aber trotzdem mit gewagten Versprechungen. Er kündigt „kunstgerechtes Eindringen in alle Dinge, Erkenntnis alles Seienden, aller Geheimnisse“ an. Tatsächlich werden aber nur die „Geheimnisse“ des Multiplizierens und Dividierens enthüllt. Hinter diesem anspruchsvollen Satz steht offenbar die in den alten Kulturen allgemein verbreitete Auffassung, daß die Gesetze der Zahl nicht nur eine praktische, sondern auch eine mystische oder religiöse Bedeutung haben. Diese Denkweise werden wir später auch noch bei den Pythagoreern vorfinden.

Erst bei den Griechen ist aus der praktischen Meß- und Rechenkunst und dem mystischen Zahlenspiel jene axiomatisch fundierte und streng beweisende Wissenschaft gewachsen, die wir heute als Mathematik bezeichnen. Die Epoche der Pythagoreer ist dabei für den an kulturgeschichtlichen Zusammenhängen interessierten Historiker der Mathematik besonders wichtig, weil hier uralte mystische Bezüge neben zahlen-theoretischen oder geometrischen Aussagen stehen, die auch dem Anspruch des modernen Forschers genügen.

Uns Heutigen gilt *Pythagoras* (etwa 580–500 v. Chr.) als Mathematiker. Seine Zeitgenossen charakterisierten ihn meist anders: *Herodotos* sah

¹⁾ Aus [I 8], S. 77.

in ihm einen „bedeutenden Sophisten“. Andere kennen ihn als den Gründer eines religiösen Ordens, von dem mancherlei Wundergeschichten erzählt wurden. Die Komödiendichter schließlich stellten die Jünger des Pythagoras als arme und schmutzige Vegetarier dar und erwähnen nichts von ihren mathematischen Leistungen.

Über das Leben des *Pythagoras* ist wenig bekannt. Tatsache ist wohl, daß er in jungen Jahren eine Studienreise nach Ägypten unternahm. Vielleicht war er auch in Babylon; der Zusammenhang der pythagoräischen Arithmetik mit der babylonischen legt jedenfalls eine solche Vermutung nahe. Um 530 floh er vor dem Diktator *Polykrates* nach Kroton in Oberitalien. Dort soll er einen Kreis begeisterter Jünger um sich gesammelt haben. Er predigte ihnen die Unsterblichkeit der Seele, forderte eine Lebensführung der Enthaltsamkeit und Mäßigung und lehrte Astronomie, Mathematik, Musikwissenschaft und Philosophie.

Vielen modernen Menschen wird die im Orden der Pythagoreer gelebte enge Verbindung religiös-sittlicher Postulate mit Aussagen der exakten Forschung befremdlich erscheinen. Für die Pythagoreer war diese Einheit Grundlage ihrer Weltanschauung, in der die Mathematik ein Teil der Religion war. Nach ihrer Lehre ist Gott der Eine, und die Vielheit der Welt wird durchschaubar durch die Gesetze der Zahl. Das war die große Entdeckung der Pythagoreer: Daß die Bahnen der Sterne, aber auch die Gesetze der musikalischen Harmonie und der architektonischen Schönheit bestimmt waren durch einfache Verhältnisse ganzer²⁾ Zahlen: „Die ganze Welt ist Harmonie und Zahl“.

Wir müssen uns versagen, auf diese philosophischen Konzeptionen der Pythagoreer ausführlicher einzugehen. Uns soll ihre mathematische Leistung beschäftigen. Es ist freilich für den modernen Historiker der Mathematik nicht leicht, zuverlässige Aussagen über den Ursprung spezieller mathematischer Sätze und Methoden aus jener Zeit zu machen. Von *Pythagoras* selbst ist keine Zeile überliefert. Man kann daher nicht mit Sicherheit feststellen, welche Erkenntnis vom „Meister“ selbst, welche von seinen Schülern stammt. Bei der großen Verehrung für den „Wundertäter“ *Pythagoras* ist es durchaus möglich, daß ihm spätere Generationen auch solche Leistungen zuschrieben, die tatsächlich Erfolge seiner Schüler oder Epigonen sind.

Wir wollen uns darauf beschränken, von zwei Entdeckungen aus dem Kreis der Pythagoreer ausführlicher zu berichten.

²⁾ Es ist zu beachten, daß in der griechischen Mathematik die Irrationalzahlen unbekannt waren. „Zahlverhältnisse“ sind immer Verhältnisse ganzer Zahlen.

2. Der Weg zu den „pythagoreischen Zahlen“

Nikomachos von Gerasa hat in seiner Einleitung in die Zahlenlehre das Wissen der Pythagoreer über die Gesetze der ganzen Zahlen zusammengestellt. Es ist anzunehmen, daß in dieser um das Jahr 100 n. Chr. verfaßten Schrift solche Sätze zusammengefaßt sind, die tatsächlich auf *Pythagoras* selbst und seinen Kreis zurückgehen.

Die Pythagoreer veranschaulichten sich die Zahlen an Gruppen von Punkten, die man mit Sternbildern vergleichen könnte. An solchen „Punktrastern“ kann man bemerkenswerte zahlentheoretische Gesetze ablesen. So zeigt uns das in Abb. 1 dargestellte Punktschema die

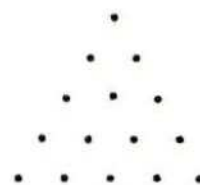


Abb. 1

„Dreieckszahlen“: In den „Zeilen“ des Dreiecks befinden sich 1, 2, 3, 4, ... Punkte, und die Anzahl der Punkte in einem n -zeiligen Dreieck stellt die Summe der ersten n natürlichen Zahlen dar. So ist z. B.

$$1 + 2 = 3, 1 + 2 + 3 = 6, 1 + 2 + 3 + 4 = 10, \dots, \text{usf.}$$

Auf diese Weise gewinnen die Pythagoreer die bekannte Folge der Dreieckszahlen:

$$1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, \dots$$

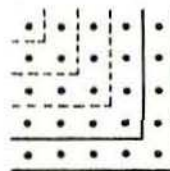


Abb. 2

Noch bemerkenswerter sind die Gesetze, die man an einem quadratischen Raster ablesen kann (Abb. 2):

Man muß offenbar zu einem quadratischen Raster mit n^2 Punkten $n + 1 + n = 2n + 1$ Punkte hinzufügen, um ein Quadrat mit $(n + 1)^2$ Punkten zu erhalten. Daraus gilt also

$$n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2. \quad (1)$$

Aus (1) kann man ablesen, daß die Differenzen aufeinanderfolgender Quadratzahlen die Folge der ungeraden Zahlen liefern. Man kann aber auch mit Hilfe der Relation (1) Gruppen von Zahlen a, b, c finden, die der „Pythagoräischen Gleichung“

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad (2)$$

genügen. Um das zu erreichen, braucht man offenbar nur $2n + 1$ in (1) zu einem Quadrat zu machen. Setzen wir also $2n + 1 = m^2$, so folgt daraus³⁾

$$n = \frac{m^2 - 1}{2}, \quad n + 1 = \frac{m^2 + 1}{2}, \quad (3)$$

Durch Substitution von (3) in (1) gewinnen wir so

$$\left(\frac{m^2 - 1}{2} \right)^2 + \left(\frac{m^2 + 1}{2} \right)^2 = m^4. \quad (4)$$

Für $m = 3, 5, 7, 9, \dots$ liefert diese Beziehung (4) pythagoräische Zahlen a, b, c , ganze Zahlen also, die der Gleichung (2) genügen:

m	a	b	c
3	3	4	5
5	5	12	13
7	7	24	25
9	9	40	41

Wahrscheinlich sind die Pythagoreer über solche zahlen-theoretischen Überlegungen auf den berühmten „Satz des Pythagoras“⁴⁾ gekommen, nicht ursprünglich durch Flächenvergleichung.

Die Addition der natürlichen Zahlen führt, wie wir sahen, auf die Dreieckszahlen, die Addition der ungeraden Zahlen (vgl. Abb. 2) auf die Quadratzahlen:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2.$$

³⁾ Man beachte, daß m^2 ungerade, die Brüche in (3) also ganze Zahlen sind.

⁴⁾ Dieser Satz über das rechtwinklige Dreieck war schon den Indern bekannt. Wahrscheinlich haben sie aber noch keinen Beweis für ihn gehabt.

Was für eine Zahlenfolge liefert nun die fortgesetzte Summierung der geraden Zahlen? Hier gilt

$$2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2n = 2(1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n) = n(n + 1).$$

Man kann diese Summen also durch Rechteckraster mit $n(n + 1)$ Zahlen veranschaulichen. Abb. 3 zeigt die ersten vier „Rechteckzahlen“ in einem solchen Schema. Während also die Addition der ungeraden Zahlen

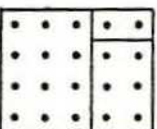


Abb. 3

auf ein quadratisches Schema führt, haben wir hier bei den geraden Zahlen ein Rechteck gewonnen, bei dem das Seitenverhältnis $(n + 1) : n$ von der Nummer n abhängig ist.

Die ungeraden Zahlen erzeugen also eine beschränkte Zahl von Formen (nämlich nur das Quadrat), die geraden dagegen eine Vielzahl nicht ähnlicher Rechtecke. Daraus schlossen die Pythagoreer auf eine Einschränkung

ungerade — beschränkt
gerade — unbeschränkt.

Wir werden heute den Pythagoreern natürlich in solchen Schlüssen nicht mehr folgen. Trotzdem sollte man das Andersartige in der Denkweise vergangener Jahrhunderte respektieren. Es scheint uns nicht angemessen, hier von „müßigen Spekulationen“ und von „Wahnwitz“ zu reden (A 6], S. 114). Die Pythagoreer haben einen Fehler begangen, der auch in unserer Zeit keineswegs ganz ausgerottet ist: Sie haben unzulässig verallgemeinert. Das geschah nicht nur bei ihrer Entsprechung zwischen Ungeradem und Beschränktem, Geradem und Unbeschränktem, das geschah auch in der Formulierung ihrer grundlegenden These „Alles ist Zahl“.

Es ist eine schöne Eigenart der mathematischen Wissenschaften, daß sie wilde Spekulationen nicht ungestraft durchgehen lassen. Früher oder später wird an handfesten Gegenbeispielen deutlich, daß der unheimlich verallgemeinernde Forscher sich geirrt hat. Im Bereich der „Geisteswissenschaften“ haben dagegen ungesicherte Spekulationen

zuweilen ein recht langes Leben: Sie sind nicht so eindeutig zu widerlegen.

Die Entdeckung von inkommensurablen Strecken ist wohl das erste Beispiel für ein solches Veto der Mathematik gegen allzu allgemeine Thesen⁵⁾. Bald nach dem Tode des Meisters entdeckten die Pythagoreer in gewissen Figuren inkommensurable Strecken, Strecken also, deren Längen nicht in einem durch ganze Zahlen ausdrückbaren Verhältnis stehen. Das einfachste Beispiel eines solchen Paares inkommensurabler Strecken liefern die Seite a und die Diagonale d eines Quadrats. Gäbe es eine Relation $d:a = p:q$ mit ganzen Zahlen p und q , so wäre wegen $d^2 = 2a^2$ die Quadratwurzel aus 2 rational: $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Man kann leicht zeigen, daß das nicht richtig ist⁶⁾.

Bei wissenschaftlichen Entdeckungen ist häufig der erste Zugang zu neuen Bereichen der Forschung nicht der, der sich später als der einfachste herausstellt. Und so haben auch die Pythagoreer nicht zuerst am Quadrat, sondern am regulären Fünfeck inkommensurable Strecken entdeckt.

3. Die Entdeckung der stetigen Teilung

Jamblichos aus Chalkis (etwa 283–330) berichtet im ersten Buch seines Werkes „Über die pythagoräische Philosophie“⁷⁾, das der *Pythagoras*-Schüler *Hippasos* als erster „die aus 12 Fünfecken zusammengesetzte Kugel beschrieb und deshalb als ein Gottloser im Meere umgekommen“ sei. Ferner habe er „als erster das Wesen der Meßbarkeit und Unmeßbarkeit an Unwürdige verraten“. Deshalb sei er nicht nur aus dem pythagoräischen Bunde ausgestoßen worden, sondern ihm sei auch ein Grab bereitet worden wie einem, der gänzlich aus dem Kreise seiner früheren Gefährten verschwinden soll⁸⁾.

Der Zorn der am Buchstaben der pythagoräischen Lehre Hängenden war verständlich: *Hippasos* hatte mit dem Nachweis inkommensurabler

⁵⁾ Über weitere Beispiele dieser Art siehe z. B. [A 12]!

⁶⁾ Der Beweis steht u. a. in [A 12], S. 10 f.

Diese Gegenbeispiele zur pythagoräischen These stammen aus dem Bereich der abstrakten Mathematik. Wir wollen nicht verhehlen, daß dagegen die moderne Physik immer wieder auf ganzzahlige Gesetze im Bereich der Atomforschung stößt. Darin liegt eine gewisse Rechtfertigung für die Schlußweise der Pythagoreer.

⁷⁾ Ausführliche Literaturangaben zu den Ausführungen dieses Abschnitts finden sich bei *S. Heller* [I 9].

⁸⁾ Eine ähnliche Notiz findet sich in einem Scholion zum 10. Buch des Euklid, vgl. [A 12] S. 8.

Strecken die pythagoräische Grundlehre in Frage gestellt, und er hatte sich offenbar nicht gescheut, diese Erkenntnis „Unwürdigen“ (d. h. nicht dem Orden angehörenden Leuten) weiterzugeben.

Jamblichos berichtet uns ferner, daß es nach dem Tode des Meisters zu einer Spaltung unter den Jüngern des *Pythagoras* gekommen sei: Die „Akusmatiker“ (*ἀκουσματικοί*) waren die Anhänger der „reinen Lehre“, die auf das Wort des Meisters schwuren. Die „Mathematiker“ dagegen, die mit *Hippasos* von der Existenz inkommensurabler Strecken überzeugt waren, bemühten sich um weitere Fortschritte in der mathematischen Wissenschaft. Es ist einleuchtend, daß sie an dem Nachweis weiterer Paare inkommensurabler Strecken interessiert waren, und tatsächlich fanden sie bald heraus, daß auch die Seite eines Quadrats und seine Diagonale kein gemeinsames Maß haben können.

Die Historiker der Mathematik weisen uns heute nach ([I 9], S. 9), daß die stetige Teilung (der „Goldene Schnitt“) zur Zeit des *Hippasos* noch gar nicht bekannt war. Es ist also zu fragen, wie er überhaupt ein

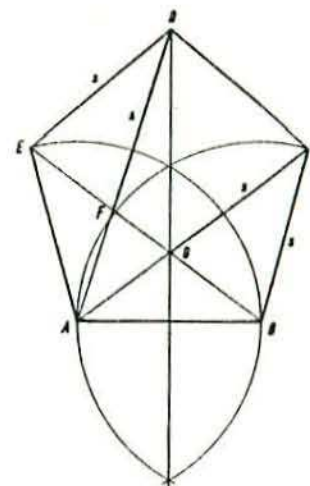


Abb. 4

reguläres Fünfeck zeichnen und daran die Inkommensurabilität von Seite und Diagonale nachweisen konnte. Die Antwort⁹⁾ auf die erste Frage können wir an Abb. 4 ablesen.

Mit Hilfe des Satzes über die Winkelsumme im Dreieck und über die

⁹⁾ Wir folgen dabei im wesentlichen *S. Heller* [I 9].

Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck kann man alle Winkel dieser Figur als Vielfache von 36° berechnen. Man erkennt dann (aus der Umkehrung des Satzes über die Basiswinkel!), daß die Dreiecke EFD und CBG gleichschenklige sind. Wir haben also

$$FD = ED = CG = CB = s.$$

Damit ist aber die Möglichkeit einer Konstruktion der Figur durch „Einschiebung“ gegeben: Man zeichnet zuerst AB , das Mittellot dieser Strecke und den Kreis um B mit dem Radius AB . Jetzt schiebt man ein „Einschiebelineal“, auf dem die Strecke s markiert ist, zwischen dem Mittellot und dem Kreis um B so ein, daß auch A auf dem Lineal liegt. Liegt der (von A aus gezählte) erste Markierungspunkt auf dem Kreis (in F), so liefert uns der zweite auf dem Mittellot liegende Markierungspunkt die Ecke D . Entsprechend gewinnt man C (und G). E ist dann durch die Kreise um A und D mit s bestimmt.

Nun ist eine Konstruktion mit dem Einschiebelineal etwas anderes als eine mit Zirkel und Lineal, und man darf annehmen, daß auch die Pythagoreer diesen Unterschied sahen. Immerhin: Dieses Verfahren lieferte ihnen die Existenz eines regulären Fünfecks, und daraus ist nun

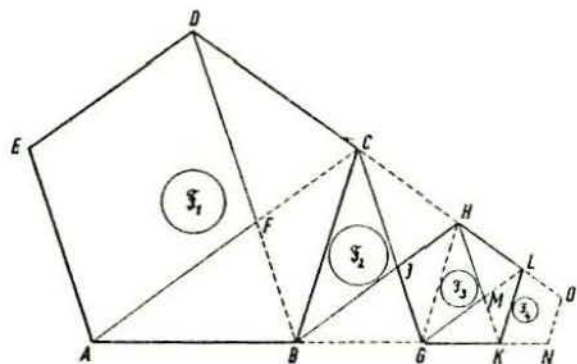


Abb. 5

der Nachweis inkommensurabler Strecken nicht schwer. Dazu braucht man nur darauf hinzuweisen, daß man an ein beliebiges reguläres Fünfeck $\mathfrak{F}_1$ eine unendliche Folge immer kleinerer Fünfecke $\mathfrak{F}_n$ anlagern kann (Abb. 5). Das geschieht so, daß man jeweils den kleineren Diagonalenabschnitt (CF beim ersten Fünfeck $\mathfrak{F}_1$) zur Seite des folgenden

Fünfecks macht. In Abb. 5 sind $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ ($BGHCF$), $\mathfrak{F}_3$ ($GKLHJ$) und $\mathfrak{F}_4$ ($KNOLM$) eingezeichnet¹⁰⁾.

An der Abbildung liest man nun sofort die folgenden Beziehungen zwischen den Seiten s_n und den Diagonalen d_n der Fünfecke ab:

$$s_n = d_{n-1} - s_{n-1}, \quad d_n = s_{n-1}. \quad (5)$$

Hätten nun s_1 und d_1 ein gemeinsames Maß ε , so wäre etwa

$$s_1 = M_1 \cdot \varepsilon, \quad d_1 = N_1 \cdot \varepsilon$$

mit positiven ganzen Zahlen M_1 und N_1 .

Daraus folgt nach (5)

$$s_2 = (N_1 - M_1) \cdot \varepsilon = M_2 \cdot \varepsilon, \quad d_2 = M_1 \cdot \varepsilon = N_2 \cdot \varepsilon. \quad (6)$$

Dabei ist aber

$$M_2 < M_1, \quad N_2 < N_1.$$

Die Fortsetzung dieses Verfahrens führt auf

$$M_{n+1} < M_n, \quad N_{n+1} < N_n.$$

Dies Verfahren muß aber nach endlich vielen Schritten abbrechen, weil die M_r und N_r positive ganze Zahlen sind. Da man aber den Anlagerungsprozeß ad infinitum fortsetzen kann, ist die Annahme eines gemeinsamen Maßes ε für die Seite und die Diagonale des regulären Fünfecks falsch.

Es entsteht nun die interessante Frage, wie die „Mathematiker“ unter den Epigonen des Pythagoras von diesen Einsichten weiterfanden zu der einfachen Beziehung

$$d(d - s) = s^2 \quad (7)$$

zwischen der Diagonale d und der Seite s des regulären Fünfecks. Diese Beziehung (7) ist ja die Grundlage für die Konstruktion nach dem „Goldenen Schnitt“, die heute jedem Schüler bekannt ist.

Von S. Heller [19] stammt eine recht plausible Hypothese über den Weg, der von den Einsichten des Hippasos zu der Gleichung (7) geführt hat.

¹⁰⁾ Man erhält eine andere brauchbare Folge von Fünfecken $\mathfrak{F}_n^*$, wenn man in $\mathfrak{F}_1^* = \mathfrak{F}_1$ alle fünf Diagonalen einzeichnet und damit ein neues, kleineres Fünfeck $\mathfrak{F}_2^*$ gewinnt. Die Wiederholung dieses Verfahrens liefert dann eine Folge von Fünfecken, die zu den Fünfecken ungerader Nummer unseres ersten Verfahrens kongruent sind:

$$\mathfrak{F}_n^* = \mathfrak{F}_{2n-1}.$$

Sehr bald fanden die „Mathematiker“ heraus, daß auch die Seite und die Diagonale eines Quadrats kein gemeinsames Maß haben. Der Nachweis wird auch in diesem Falle so geführt, daß man eine geeignete Folge von immer kleineren Quadraten herstellt. Hat das Quadrat $\mathcal{Q}_n$ die Seite s_n und die Diagonale d_n , so ist $\mathcal{Q}_{n+1}$ definiert als das Quadrat mit der Seite $d_n - s_n$. Zwischen den beiden Quadraten bestehen nun, wie man sofort einsieht¹¹⁾, die Relationen

$$s_{n+1} = d_n - s_n, \quad d_{n+1} = s_n - s_{n+1}. \quad (8)$$

Aus (8) kann man unschwer die Inkommensurabilität von Diagonale und Seite nachweisen.

Wichtig ist uns aber jetzt, daß man diese Ordnung der Konstruktion auch umkehren kann. Vertauscht man in (8) n mit $n+1$, so gewinnt man damit

$$d_{n+1} = 2s_n + d_n; \quad s_{n+1} = d_n + s_n. \quad (9)$$

Auf diese Weise hat man die Möglichkeit, eine Folge immer größer werdender Quadrate zu definieren. Man geht aus von einem willkürlich gewählten Quadrat $\mathcal{Q}_1^*$ als „Einheit“ mit der Seite s_1 und der Diagonale d_1 und konstruiert dann nach (9) die größeren Quadrate $\mathcal{Q}_2^*$, $\mathcal{Q}_3^*$, $\mathcal{Q}_4^*$...

Der Sinn dieses Verfahrens ist nicht sofort ersichtlich. Aber hier hilft die ins Mythische zurückgreifende Philosophie der Pythagoreer weiter. Nach *Theon von Smyrna* trägt die „Einheit“ ($\mu\upsilon\omicron\alpha\varsigma$) wie ein Samenkorn alle Eigenschaften des künftigen Lobewesens in sich. Sie ist in unserem Fall auch fähig, das Verhältnis von Durchmesser und Seite des Quadrats zu erzeugen. „Wie die Einheit bei allen Dingen gemäß dem obersten und dem einem Samenkorn ähnlichen Verhältnis am Anfang steht, so wird auch das Verhältnis von Durchmesser zur Seite in der Einheit gefunden.“

Das heißt praktisch: Man kann sich auch eine Folge von Vierecken herstellen, bei der in der „Einheit“, also im ersten Viereck, die Seite gleich der Diagonalen ist. Dieses „Samenkorn“ ist also kein Quadrat, sondern eine Raute. Mit Hilfe von (9) kann man nun aus dieser „Einheit“ neue Rauten gewinnen, die nun allerdings einem Quadrat immer „ähnlicher“ werden. Nach (9) gewinnt man für die Maßzahlen dieser Rauten $\mathcal{R}_n$:

	s_n	d_n
$\mathcal{R}_1$	1	1
$\mathcal{R}_2$	2	3
$\mathcal{R}_3$	5	7
$\mathcal{R}_4$	12	17
$\mathcal{R}_5$	29	41

¹¹⁾ Vgl. [A 12] S. 10.

Abb. 6 zeigt die Rauten $\mathcal{R}_1$ und $\mathcal{R}_3$ dieser Folge. Man kann leicht zeigen, daß der Quotient $\frac{d_n}{s_n}$ gegen $\sqrt{2}$ konvergiert.

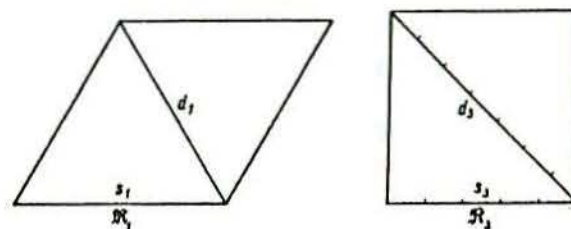


Abb. 6

Aus (9) folgt nämlich

$$2s_n^2 - d_n^2 = (-1)^{n+1}, \quad (10)$$

also (in moderner Terminologie)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n^2}{s_n^2} = 2.$$

Wir wollen den Beweis für die Beziehung (10) hier nicht bringen, um Wiederholungen zu vermeiden. Für Fünfecke soll nämlich gleich eine ähnliche Aussage abgeleitet werden¹²⁾.

Nach einer durchaus einleuchtenden Vermutung von *S. Heller* [I 9] dürften die Pythagoreer auf eine ähnliche Weise über eine Folge von Fünfecken zur Entdeckung des „Goldenen Schnittes“ gekommen sein. Beim Nachweis der Inkommensurabilität von Diagonale und Seite des Fünfecks hatten wir eine Folge von immer kleiner werdenden Fünfecken benutzt. Kehren wir – ähnlich wie im Falle des Quadrats – die Ordnung in der Erzeugung der Fünfecke um! Vertauscht man in (5) n mit $n-1$, so hat man in

$$d_n = s_{n-1} + d_{n-1}; \quad s_n = d_{n-1} \quad (11)$$

das Bildungsgesetz einer Folge von Fünfecken mit wachsender Größe der Seiten und Diagonalen.

Auch hier kann man sich nun als „Samen“ oder „Einheit“ ein Fünfeck denken, bei dem $s = d = 1$ gilt. Dann gewinnt man aus (11) für die

¹²⁾ Den schon bei *Theon von Smyrna* verzeichneten Beweis von (10) findet man z. B. bei *van der Wuerden* [I 6] S. 207.

Folge¹³⁾ (nicht regulärer!) Fünfecke F_n die folgenden Zahlen für die Seiten bzw. Diagonalen:

s_n	1	1	2	3	5	8	13	21	...
d_n	1	2	3	5	8	13	21	34	...

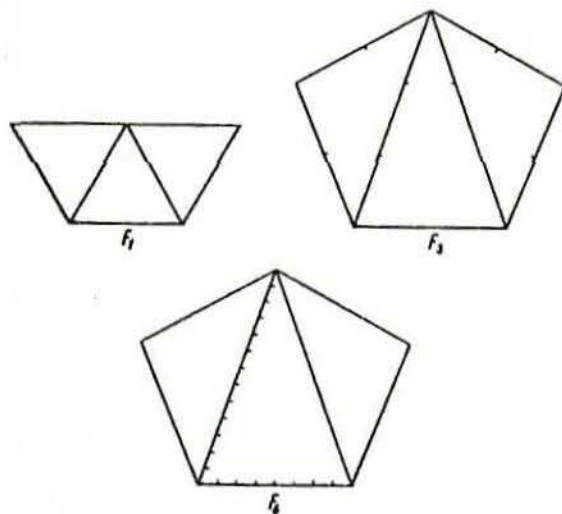


Abb. 7

Abb. 7 zeigt die Fünfecke F_1 , F_2 und F_3 . Auch hier lehrt die Anschauung, daß die Fünfecke mit wachsender Nummer n dem regulären immer „ähnlicher“ werden. Um diese vage Formulierung durch eine präzise Aussage zu ersetzen, wollen wir aus (11) die Relation

$$d_n(d_n - s_n) - s_n^2 = (-1)^n \quad (12)$$

ableiten:

Durch das Abtragen der Seite s_n auf der Diagonalen d_n eines Fünfecks der Folge F_n wird die Diagonale so geteilt, daß das Rechteck aus der Diagonalen und ihrem kleineren Abschnitt abwechselnd um die Einheit größer oder kleiner ist als das Quadrat über dem größeren Abschnitt s_n .

¹³⁾ Die Folge s_n ist die bekannte Fibonacci-Folge $\text{Fib}(n)$, die durch die Differenzgleichung

$$\text{Fib}(n+1) = \text{Fib}(n) + \text{Fib}(n-1)$$

und die Anfangsbedingungen $\text{Fib}(1) = \text{Fib}(2) = 1$ charakterisiert ist. Für d_n gilt: $d_n = \text{Fib}(n+1)$. Das folgt sofort aus (11).

Über die Eigenschaften dieser Folge siehe z. B. [I 10], S. 17.

Der Beweis kann leicht durch vollständige Induktion geführt werden. (12) ist offenbar richtig für $n=1$: Hier ist ja $d_1 = s_1 = 1$. Nehmen wir an, daß (12) richtig sei für $n=k-1$:

$$d_{k-1}(d_{k-1} - s_{k-1}) - s_{k-1}^2 = (-1)^{k-1}. \quad (13)$$

Nach (11) folgt daraus:

$$s_k^2 - s_k(d_k - s_k) - (d_k - s_k)^2 = (-1)^{k-1}$$

oder

$$d_k(d_k - s_k) - s_k^2 = (-1)^k.$$

Also gilt (12) für alle natürlichen Zahlen n .

Wir haben hier¹⁴⁾ das Prinzip der vollständigen Induktion benutzt. Kann man annehmen, daß das schon den Pythagoreern bekannt war? Es wird oft behauptet, daß *Pascal*¹⁵⁾ als erster dieses Beweismittel benutzt habe. Nach *van der Waerden* ([I 6], S. 207) haben aber tatsächlich schon die Pythagoreer die Beziehung (10) durch einen Schluß begründet, den man als „Induktion“ bezeichnen darf. Danach ist es auch denkbar, daß auch auf dem Wege zur stetigen Teilung ein solches Verfahren benutzt wurde. Aus der Gleichung (10) kann man auf die für das Quadrat gültige Relation $d^2 = 2s^2$ schließen. Es liegt deshalb nahe, wegen (12) die Gültigkeit von (7) für das reguläre Fünfeck zu vermuten.

Diese Formel läßt sich geometrisch so interpretieren:

Trägt man im regulären Fünfeck die Seite auf der Diagonale ab, so wird die Diagonale so geteilt, daß das Rechteck aus der Diagonalen und der Differenz gleich dem Quadrat über der Seite ist.

Es dürfte den „Mathematikern“ unter den Jüngern des Pythagoras nicht schwergefallen sein, die Durchführung dieser heute unter der Bezeichnung „Goldener Schnitt“ jedem Gymnasiasten bekannten Teilung mit Zirkel und Lineal korrekt auszuführen. *S. Heller* weist darauf hin, daß die Durchführung ähnlicher Konstruktionen damals schon geläufig war. Es kam also nur darauf an, die Gültigkeit von (7) herauszufinden.

Vorläufig haben wir aber nur die Vermutung plausibel gemacht, daß (7) richtig sei. Der vollständige Beweis macht aber jetzt keine Schwierigkeiten. Man kann nämlich leicht zeigen (das steht schon im „Euklid“ IV 10), daß ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Basis gleich dem

¹⁴⁾ *S. Heller* verzichtet auf den Induktionsschluß.

¹⁵⁾ Siehe dazu Kap. IV!

größeren Abschnitt des stetig geteilten Schenkels ist, eben jene Winkelseigenschaft hat, die für das Dreieck ACD (Abb. 4) im regulären Fünfeck charakteristisch ist: Die Basiswinkel dieses Dreiecks sind doppelt so groß wie der Winkel an der Spitze.

Archimedes hat einmal gesagt, daß derjenige, der einen Lehrsatz als erster ohne Beweis ausspricht, kein geringeres Verdienst hat als derjenige, der als erster den Satz beweist. Diese These wird durch die Geschichte der stetigen Teilung bestätigt. In unserem Fall bestand in der Tat die wesentliche Schwierigkeit darin, die Relation (7) erst einmal herauszufinden. War sie als Vermutung ausgesprochen, so fiel es nicht mehr schwer, sie zu beweisen.

Cf. H. Meschkowski: Denkweisen großer Mathematiker. Braunschweig 1963, 4: Hinsichtlich der Frage, ob der pythagoreische Lehrsatz auf geometrischem oder auf zahlentheoretischem Wege gefunden wurde, fällt auf, daß diejenigen, die die griechische Mathematik als autochthone Leistung ansehen, für die erstere, diejenigen, die sie auf orientalische Einflüsse beziehen, für die letztere Auffassung eintreten.