

A 1178 Szabó, Árpád

672626 57:2815

"DIE MUSE DER PYTHAGOREER" ZUR FRÜHGESCHICHTE DER GEOMETRIE
SZABÓ, ÁRPÁD

HISTORIA MATH., 1974, 1, 291 - 316.

LANGUAGES: GERMAN SUMMARY LANGUAGES: ENGLISH AND HUNGARIAN :

DOCUMENT TYPE: JOURNAL

REVIEWER: H. L. L. BUSARD (VENLO)

Summaries (english french hungarian)

13 Fig 40 notes

1178 pdf
SZABO, A.
1974

SUMMARIES

Den Ausgangspunkt der Arbeit bildet der Kommentar des Proklos zum Satz Euklid Elemente I 44 über die sog. parabolischen, elliptischen, und hyperbolischen Flächeanlegungen, als über "Entdeckungen der alten pythagoreischen Muse." Der vorliegende Aufsatz behandelt vor allem die Sätze II 5, 6, 11 und 14, und weist ihren Ursprung aus der pythagoreischen Proportionenlehre nach. Die genannten Sätze haben in voreudoxischer Zeit die geometrische Lösung solcher Probleme ermöglicht, die mit den früheren Methoden der bloss arithmetischen Proportionenlehre nicht zu lösen waren.

The passage from Proclus' commentary to Euclid's Elements I 44 mentions the parabolic, elliptical and hyperbolic applications of areas as "old discoveries of the Muse of the Pythagoreans." In that connection the present article deals with the propositions: Elements II 5, 6, 11, and 14, pointing out their origin in the Pythagorean theory of proportions. These propositions provided in pre-Eudoxian times the solution of problems that could not be solved by the earlier methods of the theory of proportions for numbers only.

Proklos az euklidészi "Elemek" I 44 tételéhez írt megjegyzésében beszél a pythagoreusok muzsájának találmányáról: az ún. parabolikus, elliptikus és hyperbolikus felület-hozzáillesztésekről. A dolgozat ezzel kapcsolatban főként az Elemek II 5, 6, 11 és 14 tételeit tárgyalja és kimutatja, hogy ezeknek a tételeknek a föllállítására a régi arányelméletnek olyan problémái adtak alkalmat, amelyeket pusztán aritmetikai módszerekkel az Eudoxost megelőző korban megoldani nem tudtak.

"DIE MUSE DER PYTHAGOREER" [1]
ZUR FRÜHGESCHICHTE DER GEOMETRIE
BY ÁRPÁD SZABÓ, BUDAPEST

SUMMARIES

Den Ausgangspunkt der Arbeit bildet der Kommentar des Proklos zum Satz Euklid *Elemente* I 44 über die sog. parabolischen, elliptischen, und hyperbolischen Flächeanlegungen, als über "Entdeckungen der alten pythagoreischen Muse." Der vorliegende Aufsatz behandelt vor allem die Sätze II 5, 6, 11 und 14, und weist ihren Ursprung aus der pythagoreischen Proportionenlehre nach. Die genannten Sätze haben in voreudoxischer Zeit die geometrische Lösung solcher Probleme ermöglicht, die mit den früheren Methoden der bloss arithmetischen Proportionenlehre nicht zu lösen waren.

The passage from Proclus' commentary to Euclid's *Elements* I 44 mentions the parabolic, elliptical and hyperbolic applications of areas as "old discoveries of the Muse of the Pythagoreans." In that connection the present article deals with the propositions: *Elements* II 5, 6, 11, and 14, pointing out their origin in the Pythagorean theory of proportions. These propositions provided in pre-Eudoxian times the solution of problems that could not be solved by the earlier methods of the theory of proportions for numbers only.

Proklos az euklidészi "Elemek" I 44 tételéhez irt megjegyzésében beszél a pythagoreusok muzsájának találmányáról: az un. parabolikus, elliptikus és hyperbolikus felület-hozzáillesztésekről. A dolgozat ezzel kapcsolatban főként az Elemek II 5, 6, 11 és 14 tételeit tárgyalja és kimutatja, hogy ezeknek a tételeknek a fölállítására a régi arányelméletnek olyan problémái adtak alkalmat, amelyeket pusztán aritmetikai módszerekkel az Eudoxost megelőző korban megoldani nem tudtak.

Man liest im trefflichen Kommentar des Proklos, anlässlich des Euklidischen Satzes *Elem. I 44*, den folgenden interessanten Bericht: [2]

"Einer Tradition zufolge, die auf Eudemos zurückgeht, [3] sind das uralte Entdeckungen der pythagoreischen Muse, die

'*Flächenparabel*' <einfache Flächenanlegung>, die '*Hyperbel*' <Flächenanlegung mit Überschuss>, und die '*Ellipse*' <Flächenanlegung mit Fehlen>. Von diesen entlehnten die Neueren die Namen und übertrugen sie auch auf die sogenannten konischen Linien <Kegelschnitte> und nannten auch von diesen die eine Parabel, die andere Hyperbel und die dritte Ellipse, während jene alten ehrwürdigen Männer die mit diesen Namen bezeichneten Gebilde in der Anlage ebener Flächen an eine Strecke erblickten. Wenn nämlich eine Gerade gegeben ist, und man die gegebene Fläche der ganzen Geraden entlang sich erstrecken lässt, dann nennt man das 'die Fläche anlegen' (παράβλλειν); macht man aber die 'Länge' der Fläche grösser als die der Geraden selbst, dann spricht man von einem 'Hinausgehen' darüber (ὑπερβάλλειν); und macht man sie kleiner, so dass ein Teil der Geraden über die gezeichnete Fläche hinausragt, von einer 'Verkürzung' (ἐλλείπειν). In diesem Sinne spricht Euklid im VI. Buch von der 'Hyperbel' (VI 29) und von der 'Ellipse' (VI 28), hier aber benötigte er die 'Parabel,' wo er an eine Strecke ein, einem gegebenen Dreieck gleiches Parallelogramm anlegen wollte...."

Es haben zahlreiche Historiker die aussergewöhnliche Bedeutung dieser Worte für die Rekonstruktion der altpythagoreischen Wissenschaft, und schon längst erkannt. Es wäre auch leicht, aus der bekannten und heute in Fachkreisen überall gelesenen modernen Literatur hier sogleich zweifellos richtige Feststellungen im Zusammenhang mit dem angeführten Bericht namhaft zu machen. Ich denke an solche Beobachtungen, die nicht nur als *communis opinio* gelten, sondern die auch ich selber nur lebhaft bejahen und unterstreichen könnte.

Aber soviel ich weiss, hat doch bisher noch niemand versucht, die im Bericht erwähnten Euklidischen Sätze *geometrisch* eingehender zu interpretieren und *ihren Ursprung bloss auf Grund der 'Elemente' selbst zu rekonstruieren*. - Darum will ich hier zunächst das bisher Versäumte nachholen. Ich interpretiere also vor allem die im obigen Bericht erwähnten Euklidischen Sätze. [4] In der Interpretation folge ich überall treu und genau dem antiken *Gedankengang*. Nur die Bezeichnungsart werde ich etwas vereinfachen, um das Lesen auch für diejenigen, die an mathematische Texte weniger gewohnt sind, zu erleichtern. Das heisst: ich werde zwar, wo es nötig ist, jene geometrische Symbolsprache, die in den Gymnasien üblich ist, keineswegs ausser acht lassen. Aber in der Benutzung von *Buchstaben*, um geometrische Figuren zu bezeichnen, werde ich *sparsamer* als Euklid umgehen. Denn ich will vor allem die *Gedankenführung* selbst so klar und prägnant, wie nur möglich, herausstellen. Und ich weiss aus Erfahrung, wie in der Elementargeometrie eben das allzu häufige Benützen von Buchstaben die Aufmerksamkeit dessen, der nicht daran gewöhnt ist, ermüdet. - Dann will ich versuchen, auf jene Probleme hinzuweisen, die zur Aufstellung der fraglichen Sätze geführt haben mögen. Dabei verzichte ich einstweilen völlig auf die Auseinandersetzung mit der parallelen Forschung. [5]

I.

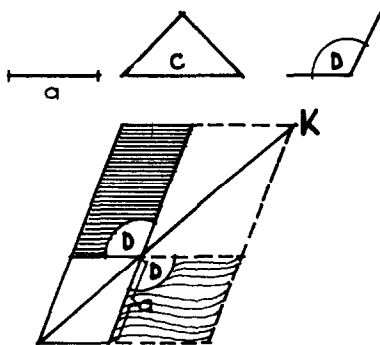
Der Satz *Elem. I 44* stellt die Aufgabe:

"An eine gegebene Strecke ein einem gegebenen Dreieck gleiches Parallelogramm in einem gegebenen geradlinigen Winkel anzulegen."

Nachdem an einer Figur (hier Abb. 1) die drei Data: die Strecke a , das Dreieck C und der geradlinige Winkel D gezeigt, sowie die Aufgabe erklärt wurde, besteht die Lösung aus einem vorbereitenden und einem Hauptteil.

Als vorbereitender Teil wird ein dem Dreieck C flächengleiches Parallelogramm mit dem Winkel D konstruiert. Euklid benützt dazu einen vorangehenden Satz:

I 42: "Ein einem gegebenen Dreieck gleiches Parallelogramm in einem gegebenen geradlinigen Winkel zu errichten,"



der seinerseits den ihm vorangehenden Satz zur Anwendung gebracht hatte:

ABB. 1

I 41: "Wenn ein Parallelogramm mit einem Dreieck dieselbe Grundlinie hat und zwischen denselben Parallelen liegt, ist das Parallelogramm doppelt so gross, wie das Dreieck."

(Man erseht daraus auch, wie bei Euklid die Sätze sorgfältig aufeinander gebaut werden.)

Der Hauptteil der Lösung besteht aus den folgenden vier Schritten:

- Ist das dem Dreieck C gleiche Parallelogramm (waagrecht schraffiert in unserer Abb. 1 hergestellt, dann wird es zunächst so angebracht, dass seine längere Seite die Fortsetzung der gegebenen Strecke a (in der Richtung nach oben hinauf) bilde.
- Danach konstruiert man mit der kürzeren Seite des waagrecht schraffierten Parallelogramms und mit der gegebenen Strecke a das kleine Rhomboid (links von a).
- Die Diagonale dieses kleinen Rhomboids wird verlängert und sie schneidet in Punkt K die Verlängerung der anderen kurzen Seite des schraffierten Parallelogramms.
- Hat man den Punkt K gewonnen, dann kann man -- unter Benützung dieses Punktes -- mit noch drei Parallelen (von denen die zwei waagerechten bloss 'Verlängerungen' sind) schon die ganze Abb. 1 fertigkriegen. [6]

Fasse man nun *Abb. 1* ins Auge. Man hat ein grosses Rhomboid vor sich, das durch seine Diagonale halbiert wird. [7] Um dieselbe Diagonale liegen jedoch auch zwei kleinere Rhomboide (leere Flächen in *Abb. 1*), die ebenso halbiert werden. Diese letzteren heissen nach der Euklidischen Terminologie: 'die um die Diagonale liegenden Parallelogramme.' [8] Aus der Tatsache jedoch, dass durch dieselbe Diagonale sowohl das grosse Rhomboid, wie auch die beiden kleineren Rhomboide halbiert werden, folgt, dass die beiden schraffierten Parallelogramme der Figur (die sog. 'Ergänzungen') untereinander gleich sein müssen. Eben diese Tatsache wird bei Euklid im vorangehenden Satz ausgesprochen:

I 43: "In jedem Parallelogramm sind die Ergänzungen (παραπληρώματα) der um die Diagonale liegenden Parallelogramme einander gleich."

Ist jedoch das (dem Dreieck *C* gleiche) waagerecht schraffierte Parallelogramm in *Abb. 1* dem anderen (mit Wellenlinien schraffierten) gleich, so wurde -- im Sinne der gestellten Aufgabe -- die gegebene Fläche (*C*) an die gegebene Strecke (*a*) angelegt.

* * *

Fragt man sich nun, wie die eben zusammengefasste geistreiche Konstruktion einst gefunden wurde, so liegt die Vermutung nahe: wohl eben auf umgekehrten Wege, und nicht so, wie die einzelnen Schritte der Konstruktion in der obigen Zusammenfassung nacheinander kamen.

Nachdem man wusste, dass jedes Parallelogramm durch seine Diagonale halbiert wird, erkannte man zunächst wohl, dass jene beiden, zu den Seiten des Parallelogramms parallelen Linien, die sich in einem beliebigen Punkt der Diagonale schneiden, [10] nicht nur die kleineren, sog. 'Parallelogramme um die Diagonale' erzeugen, sondern dass dabei auch die 'Ergänzungen' der letzteren (die παραπληρώματα) untereinander gleich sein müssen. Eben diese Tatsache ermöglichte die gewünschte Konstruktion. Jene Fläche (=ein Parallelogramm), die man in ihr Gleiches (doch mit anderen Seiten) verwandeln wollte, wurde als die eine 'Ergänzung' (waagerecht schraffiertes Parallelogramm auf *Abb. 1*) aufgefasst; und die gegebene Strecke *a* (an die man das vorige Parallelogramm anlegen sollte) wurde die eine Seite des anderen gesuchten Parallelogramms (des mit Wellenlinien schraffierten).

Versucht man nun den vermutlichen historischen Ursprung derselben Konstruktion noch weiter wiederzugewinnen, so fallen zunächst die folgenden drei Tatsachen auf:

1. Die Fläche, die man an eine gegebene Strecke anlegen soll, ist als ein Dreieck (*C*) gegeben; wohl nur deswegen, weil jede geradlinige Figur sich in Dreiecke auflösen lässt. Kann man also die gestellte Aufgabe im Falle eines Dreiecks lösen, so

lässt sich auf demselben Wege auch die Flächenanlegung *jeder geradlinigen Figur* ausführen.

2. Die Figur, die man bekommen soll, ist doch ein *Parallelogramm*; und dazu noch

3. ein Parallelogramm mit einem '*gegebenen geradlinigen Winkel*.'

Diese auffallenden Einzelheiten sind wohl nur darauf zurückzuführen, dass der Verfasser der '*Elemente*' die *grösstmögliche Allgemeingültigkeit* erstrebt hatte. Gewöhnlich stellt man sich eine '*Fläche*' nicht als ein Dreieck, sondern eher als ein *Rechteck* (=rechtwinkliges Parallelogramm) vor. (Auch im alltäglichen Leben bekommt man ein *Flächenmass* eben dadurch, dass man '*Länge*' und '*Breite*' miteinander multipliziert; und diese Regel gilt eigentlich nur für *Rechtecke*.) -- Ich vermute also, dass ursprünglich der Satz I 44 hiess: [11]

"Wie verwandelt man ein Rechteck mit den gegebenen Seiten *b* und *c* in ein anderes flächengleiches Rechteck, dessen eine Seite *a* ebenfalls gegeben ist?"

Man hat diese Aufgabe im Sinne jener allgemeingültigen Konstruktion gelöst, die eben behandelt wurde.

* * *

Es wäre nun durchaus möglich, das Verwandeln eines gegebenen Rechtecks in ein anderes, ihm flächengleiches, von dem nur die *eine* Seite bekannt ist, für eine Aufgabe rein *praktisch-geometrischen Ursprungs* zu halten. Aber ich glaube *nicht*, dass man das geschickte Lösen einer bloss praktischen Aufgabe in der Antike jemals als '*Erfindung der Muse*' bezeichnet hätte. Man wird die eben behandelte Flächenanlegung eher von irgendeinem *theoretischen* Gesichtspunkt aus für wichtig gehalten haben. Man kann auch diese theoretische Bedeutung der fraglichen Lösung leicht einsehen, wenn man einige Tatsachen der antiken Mathematikgeschichte nicht aus dem Auge verliert.

Wie bekannt, hat einen sehr wesentlichen Kern der voreuklidischen Mathematik der Griechen die *Proportionenlehre* gebildet. Wie O. Toeplitz einst schrieb: "Der Begriff der Proportion spielt in der griechischen Mathematik eine weit grössere Rolle als in der heutigen, auch wie die Schule sie lehrt; denn der Griechen kleidet vieles in die Sprache der Proportionen, was wir durch den Formalismus der Rechenregeln ausdrücken. Etc." [12] Ich glaube auch schon nachgewiesen zu haben, wie sich diese Proportionenlehre -- mindestens in grossen Zügen -- entfaltet hatte. [13] Die wissenschaftliche Terminologie spricht eindeutig dafür, dass die Proportionenlehre, die bei Euklid vorliegt, ursprünglich einen Teil der *Musiktheorie* gebildet hatte. Erst später wurde die musikalische Proportionenlehre in der *Arithmetik* und nachher in der *Geometrie* weiterentwickelt. -- Ich vermute nun, dass auch das Problem der pythagoreischen Flächenanlegung (*Elem. I 44*)

historisch aus der arithmetischen Proportionenlehre entstanden war. Man fasse nämlich den folgenden Euklidischen Satz ins Auge:

IX 19: "Bei drei gegebenen Zahlen zu prüfen, ob es möglich ist, zu ihnen eine vierte proportionale Zahl zu finden."

Zum Glück brauchen wir auf die Euklidische Behandlung dieses Satzes nicht näher einzugehen. [14] Für uns wichtig ist aus diesem Theorem nur folgendes: Sind a , b , und c natürliche Zahlen, dann gibt es eine (ganze) Zahl x für die Proportion $a:b = c:x$ nur dann, wenn das Produkt bc durch a teilbar ist; sonst ist es eben nicht *möglich*, zu den drei gegebenen Zahlen eine 'vierte proportionale Zahl' zu finden.

Einen Spezialfall zu diesem Theorem bildet der vorangehende Satz:

IX 18: "Bei zwei gegebenen Zahlen zu prüfen, ob es möglich ist, zu ihnen eine dritte proportionale Zahl zu finden."

Auch an diesem Theorem ist für uns nur das folgende wesentlich: [15] Sind a und b natürliche Zahlen, dann gibt es eine ganze Zahl y für die Proportion $a:b = b:y$ nur dann, wenn b^2 durch a teilbar ist. (An einem numerischen Beispiel illustriert: es gibt eine 'dritte proportionale Zahl' für die Proportion $9:6 = 6:y$, weil $6 \cdot 6 / 9 = y = 4$ ist.)

Es geht also aus den eben zitierten arithmetischen Sätzen hervor, dass eine 'vierte proportionale Zahl' zu drei gegebenen Zahlen (bzw. eine 'dritte proportionale Zahl' zu zwei gegebenen Zahlen) *nur unter gewissen Bedingungen existiert*. (Sind die notwendigen Bedingungen *nicht* vorhanden, dann könnte man nur irgenwelche arithmetischen Äquivalente der betreffenden Aufgaben lösen, indem man z.B. die gegebenen Zahlen durch ihre geeigneten *Mehrfachen* ersetzt.) Aber es gibt gar keine solchen einschränkenden Bedingungen, wenn man anstatt 'Zahlen' mit 'Strecken' arbeitet, und wenn die Aufgabe nicht arithmetisch sondern *geometrisch* behandelt wird. Eben das Konstruieren der 'Vierten Proportionale' bzw. dasjenige der 'Dritten Proportionale' wird in den folgenden Sätzen der 'Elemente' verlangt:

VI 12: "Zu drei gegebenen Strecken die Vierte Proportionale zu finden,"

und

VI 11: "Zu zwei gegebenen Strecken die Dritte Proportionale zu finden."

Die Lösung dieser Aufgaben ist bei Euklid beinahe dieselbe, die auch heute noch in der Schule gelehrt wird. Man bekommt nämlich die 'Vierte Proportionale' zu drei gegebenen Strecken folgendermassen (s. Abb. 2): Man zieht zwei gerade Linien, die

einen beliebigen Winkel umfassen, und es werden auf der einen Linie die beiden gegebenen Strecken a und b hintereinander ($a + b = AC$), während auf der anderen die Strecke c abgetragen. Dann verbindet man die Punkte B und D , und man zieht zur Strecke BD vom Punkt C ab die Parallele CE . So bekommt man die Strecke $DE = x$, die 'Vierte Proportionale' zu den gegebenen Strecken, so dass $a:b = c:x$ wird. Denn im Dreieck AEC ist ja die Strecke BD parallel zu CE und nach einem Satz des Buches VI:

VI 2: "Zieht man in einem Dreieck parallel zu einer Seite eine gerade Linie, so teilt diese die Dreiecksseiten proportional."

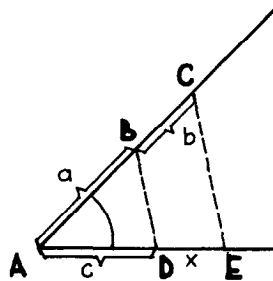


ABB. 2

Die Konstruktion der 'Dritten Proportionale' unterscheidet sich von der vorigen nur darin, dass anstatt der Strecke c in diesem Fall noch einmal die Strecke b auf der anderen Linie abgetragen wird (s. Abb. 3), und so bekommt man mit denselben Schritten, wie bei der vorigen Konstruktion, diesmal y , wobei $a:b = b:y$ ist.

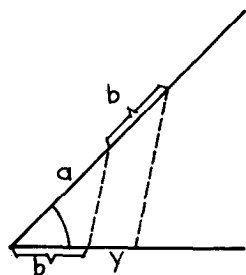


ABB. 3

Man darf jedoch bei diesen Konstruktionen folgendes nicht aus dem Auge verlieren. Werden zwei oder drei beliebige Strecken bloss in sich selbst gegeben, so wird man von vornherein nicht entscheiden können, ob diese untereinander überhaupt kommensurabel sind. Streng beweisbar ist also die eben skizzierte Konstruktion nur dann, wenn der Begriff 'Proportion' auch für inkommensurable Größen definiert ist. Auf Grund einer solchen Definition, wie im Buch VII der 'Elemente.'

VII def. 20: "Zahlen stehen in Proportion, wenn die erste von der zweiten Gleichvielfaches oder derselbe Teil oder dieselbe Menge von Teilen ist, wie die dritte von der vierten,"

könnte man die Konstruktionen VI 12 und VI 11 nie beweisen. Eben deswegen wurden diese erst im Buch VI der 'Elemente' behandelt, nachdem nämlich ihnen die allgemeingültige Definition der 'Proportion' am Anfang des Buches V schon vorausgeschickt wurde:

V def. 5: "Man sagt, dass Größen in demselben Verhältnis stehen, die erste zur zweiten wie die dritte zur vierten, wenn bei beliebiger Vervielfältigung die Gleichvielfachen der ersten und dritten den Gleichvielfachen der zweiten und vierten gegenüber, paarweise

entsprechend genommen, entweder zugleich grösser oder zugleich gleich oder zugleich kleiner sind."

Nachdem nun -- im Sinne eines Scholions [16] -- das Buch V der Euklidischen 'Elemente' mindestens im wesentlichen als das Werk des Eudoxos gilt, [17] schreibt man gewöhnlich auch die eben zitierte Definition dem Eudoxos zu, da gerade diese den wichtigsten Grundpfeiler der allgemeinen Proportionenlehre im Buch V bildet. Mit anderen Worten heisst dies auch soviel: selbst wenn man die geometrische Konstruktion der 'Vierten und Dritten Proportionale' (VI 12 und 11) auf *naiv-intuitivem Wege* früher gefunden hatte -- was nach dem Vorbild der einfachen Proportionenlehre für Zahlen (im VII. und VIII. Buch der 'Elemente') wohl möglich wäre --, auch dann wurde der exakte Beweis der genannten Konstruktionen erst nach Eudoxos, eben auf Grund der angeführten Definition möglich. -- Man hat also zunächst den Eindruck, dass die Griechen jene arithmetischen Aufgaben, die im Sinne der Sätze IX 18 und 19 *nicht lösbar* waren, auch geometrisch -- mindestens *tadellos* -- erst nach Eudoxos zu lösen gelernt hätten.

Aber dennoch hat man das Problem der 'Vierten und Dritten Proportionale' -- über die rein arithmetischen Sätze IX 19 und 18 hinausgehend (also: allgemeingültig) -- auch vor Eudoxos schon vollkommen exakt zu lösen vermocht. Die vorhin behandelte (*parabolische*) *Flächenanlegung* ermöglicht ja eben die *allgemeine Lösung dieser arithmetisch nicht immer lösbaren Aufgabe*. -- Man denke nämlich an den folgenden, sehr einfachen Satz der Proportionenlehre (für Zahlen):

VII 19: *"Stehen vier Zahlen in Proportion, dann muss das Produkt aus der ersten und vierten dem Produkt aus der zweiten und dritten gleich sein; und wenn das Produkt aus der ersten und vierten Zahl dem aus der zweiten und dritten gleich ist, dann müssen die vier Zahlen in Proportion stehen."*

Wenn also $a:b = c:d$ ist, dann auch $ad = bc$, und umgekehrt. Nachdem jedoch das Produkt zweier Zahlen geometrisch immer ein Rechteck bedeutet, [18] kann man eine *viergliedrige Proportion* auch als die *Gleichheit von zweien Rechtecken* auffassen. [19] Und eben darum: sucht man zu drei gegebenen Zahlen (a, b, c) die 'Vierte Proportionale' ($a:b = c:x$), so kann man diese Aufgabe geometrisch so auffassen: Gegeben ist ein Rechteck mit den Seiten b und c , und dieses Rechteck soll man an die gegebene Strecke a (*parabolisch*) anlegen, damit man zu bc ein anderes, ihm flächengleiches Rechteck ax bekomme. [Oder wenn man zu *zwei* gegebenen Zahlen, a und b , die 'Dritte Proportionale' sucht -- $a:b = b:y$ --, dann sagt man: Gegeben ist ein Quadrat, b^2 , und dieses Quadrat soll man an die gegebene Strecke a als flächengleiches Rechteck (ay) anlegen.]

Ich fasse also die einfachste und gewöhnlichste Flächenanlegung der Pythagoreer -- den Satz *Elem. I 44* -- als die allgemeine (geometrische) Lösung der 'Vierten und Dritten Proportionale,' bzw. genauer: als *die Lösung des Äquivalentes einer solchen Aufgabe* auf, die man in der Arithmetik nur unter gewissen Bedingungen zu lösen vermocht hatte (vgl. IX 19 und 18). Die geometrische Transformation einer arithmetischen Aufgabe war -- im Falle der einfachen (parabolischen) Flächenanlegung -- geistreich und interessant; aber wirklich bedeutend wurde dieselbe Transformation erst im Falle der *elliptischen* und *hyperbolischen* Flächenanlegung.

II.

Der eingangs zitierte Bericht des Proklos erwähnt, dass Euklid von der 'Ellipse' und der 'Hyperbel' im VI. Buch redet. In der Tat wird dort die 'elliptische Flächenanlegung' als Aufgabe in der folgenden Form gestellt:

VI 28: "An eine gegebene Strecke ein einer gegebenen geradlinigen Figur gleiches Parallelogramm so anzulegen, dass ein einem gegebenen ähnliches Parallelogramm fehlt, etc."

Dagegen heisst die Aufgabe der 'hyperbolischen Flächenanlegung':

VI 29: "An eine gegebene Strecke ein einer gegebenen geradlinigen Figur gleiches Parallelogramm so anzulegen, dass ein einem gegebenen ähnliches Parallelogramm überschiesst."

Anstatt diese Sätze sogleich eingehender zu behandeln, möchte ich hier zunächst auf die folgenden Tatsachen aufmerksam machen.

Die 'elliptische Flächenanlegung' wird insgesamt vierzehnmal als Hilfssatz in den 'Elementen' benützt. Und man findet alle diese vierzehn Fälle im Buch X. [20] Man hat also zunächst den Eindruck, dass man die wahre Bedeutung dieses Satzes (VI 28) auch gar nicht richtig ermessen könnte, ohne dabei gleichzeitig auch das *allerschwerste* (und vielleicht auch das *allerschönste!*) Buch der gesamten Euklidischen 'Elemente,' nämlich das Buch X zu berücksichtigen.- Es steht dagegen völlig anders um die 'hyperbolische Flächenanlegung' (VI 29); diese wird nur ein einziges Mal in den 'Elementen,' nämlich als Hilfssatz zur Lösung der Aufgabe VI 30 angewendet. Und das Theorem VI 30 (die stetige Teilung) ist doch nur eine Variante zum Satz II 11.- Eben diese letztere Beobachtung ermöglicht die folgende Vereinfachung meiner Aufgabe -- *völlig im Einklang mit der gesamten einschlägigen modernen Literatur.*

T. L. Heath bemerkte anlässlich der 'elliptischen Flächenanlegung' (VI 28), dass ein Spezialfall dieser Aufgabe hiesse:

"An eine gegebene Strecke ein einer gegebenen geradlinigen Figur gleiches Rechteck so anzulegen, dass dabei ein Quadrat fehlt,"

und dass man diese spezielle Form der Aufgabe mit Hilfe des Satzes II 5 lösen könnte. [21] Ebenso bemerkte er anlässlich der 'hyperbolischen Flächenanlegung' (VI 29), dass eine Spezialform dieser anderen Aufgabe wäre:

"An eine gegebene Strecke ein einer gegebenen geradlinigen Figur gleiches Rechteck so anzulegen, dass dabei ein Quadrat überschiesst,"

und dass man diese andere Aufgabe mit Hilfe des Satzes II 6 lösen könnte. [22]

Es wäre selbstverständlich möglich, zahlreiche Belege dafür namhaft zu machen, dass heute in der Fachliteratur die beiden Sätze II 5 und II 6 *einstimmig* als einfachere Varianten, oder als Spezialfälle zu den Sätzen VI 28 und VI 29 gelten. [23]- Man darf dabei die wesentlichen Unterschiede zwischen den Sätzen im Buch II einerseits, und denjenigen im Buch VI andererseits natürlich nicht verwischen. Es handelt sich nicht bloss darum, dass die Sätze im Buch VI allgemeingültiger sind und mit *Proportionen* arbeiten, während die ihnen entsprechenden Sätze im Buch II begrenztere Spezialfälle darstellen, und sich des Begriffes 'Proportion' gar nicht bedienen. Ausserdem sind II 5 und II 6 einfache *bewiesene Theoreme*, während man es in den ihnen entsprechenden VI 28 und VI 29 mit *Konstruktionsaufgaben* zu tun hat.- Aber ich glaube dennoch das Problem der 'elliptischen Flächenanlegung' anstatt VI 28 an Hand des Satzes II 5 und dasjenige der 'hyperbolischen Flächenanlegung' anstatt VI 29 an Hand des anderen Satzes, II 6 erörtern zu dürfen, obwohl es zugegeben werden muss: es gibt kein Wort in den Sätzen II 5 und II 6, das auf die 'Ellipse' bzw. auf die 'Hyperbel' hinweisen würde.

* * *

Bevor ich nun den Euklidischen Wortlaut der 'elliptischen' und der 'hyperbolischen Flächenanlegung' (II 5 und II 6) zitierte, möchte ich hier zunächst an den vermutlichen Ursprung dieser Sätze erinnern, wie ich diesen in den letzten Jahren auch schon in zwei verschiedenen Arbeiten zu rekonstruieren versucht hatte. [24] (Man fasse zum folgenden noch einmal die obige Abb. 1 ins Auge.)

Die pythagoreischen Flächenanlegungen gehen von den folgenden Tatsachen aus:

a) Jedes Parallelogramm wird durch seine Diagonale halbiert (I 34).

b) Zieht man durch einen beliebigen Punkt der Diagonale -- auf unserer Abb. 1 durch jenen Punkt, in dem die beiden

Scheitelwinkel D sich berühren -- zwei Parallelen zu den beiden nebeneinanderliegenden Seiten des Parallelogramms, so entstehen insgesamt vier neue Parallelogramme, von denen

c) die beiden 'um die Diagonale liegenden Parallelogramme' sowohl untereinander, wie auch dem ursprünglichen Parallelogramm *ähnlich* sind;

d) dagegen sind die beiden 'Ergänzungen' (=parapleromata; die schraffierten Flächen in Abb. 1) gewöhnlich nicht ähnlich, aber immer *flächengleich* untereinander.

Versuche man nun diese Erkenntnisse auf ein beliebiges Quadrat, x^2 anzuwenden (s. Abb. 4). Die beiden zu den nebeneinanderliegenden Seiten des Quadrats parallelen Linien schneiden sich jetzt im Punkt O der Diagonale. Die 'um die Diagonale liegenden Parallelogramme' sind diesmal zwei Quadrate, von denen das eine hier als y^2 bezeichnet wurde, während das andere (das kleine Quadrat rechts oben auf Abb. 4) unbezeichnet blieb. Die beiden 'Ergänzungen' (=parapleromata) habe ich mit p_1 und p_2 kenntlich gemacht. Es sei ausserdem noch erwähnt, dass jene Figur, die aus den beiden 'Ergänzungen' (p_1 und p_2) sowie aus dem kleinen Quadrat rechts oben besteht, nach der pythagoreischen Terminologie einen besonderen Namen führte; sie hiess: 'Gnomon.'

Man liest bei Euklid selbst:

II def. 2: "In jedem Parallelogramm soll ein beliebiges der um die Diagonale liegenden Parallelogramme zusammen mit den beiden Ergänzungen (=parapleromata) Gnomon heissen." [25]

Der grösseren Übersichtlichkeit zuliebe zeige ich den für uns wichtigen 'Gnomon' der Abb. 4 auch als eine besondere Skizze: Abb. 5.

Es genügt nun ein Blick auf Abb. 4, um einzusehen, dass die Differenz der beiden Quadrate -- $x^2 - y^2$ -- gerade der 'Gnomon' wird. Man kann jedoch denselben 'Gnomon' -- wie die beiden Figuren, Abb. 6 und Abb. 7, zeigen -- auf zwei verschiedene Weisen in je ein Rechteck verwandeln. Entweder wählt man nämlich jene Möglichkeit, die die Abb. 6 zeigt: die ganze Fläche, die aus dem kleinen Quadrat rechts oben und aus der mit p_2 bezeichneten 'Ergänzung' besteht, wird verlegt und sie wird als eine Art 'Verlängerung nach links zu der 'Ergänzung' p_1 hinzugefügt; oder: die andere Möglichkeit wird durch Abb. 7 veranschaulicht: man verlegt nur die mit p_2 bezeichnete 'Ergänzung' und man fügt diese als 'Verlängerung nach links zu'

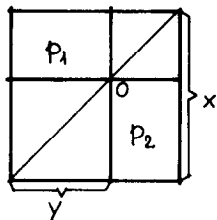


ABB. 4

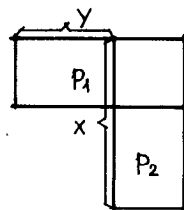


ABB. 5

der 'Ergänzung' p_1 hinzu. In beiden Fällen erreicht man -- mit der Umwandlung des 'Gnomons' in ein Rechteck --, dass die Differenz der beiden Quadrate ($x^2 - y^2$ -- der ursprüngliche

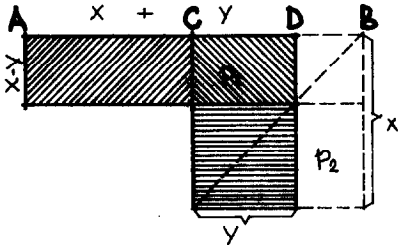


ABB. 6

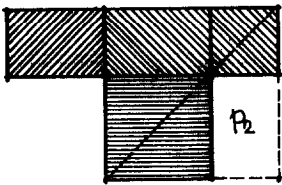


ABB. 7

'Gnomon' auf Abb. 4 und 5) als ein Rechteck erscheint. (Übrigens habe ich in beiden Fällen, Abb. 6 und Abb. 7, mit der Schraffierung zeigen wollen, dass die Summe der schraffierten Flächen -- je eines Quadrats [26] und eines Rechtecks -- gerade das ursprüngliche Quadrat ausmacht.)

Der Vergleich der beiden Figuren (Abb. 6 und Abb. 7) zeigt sogleich auch den wesentlichen Unterschied der beiden Flächenanlegungen. Man sieht besonders an Abb. 7, dass das kleine 'Quadrat um die Diagonale' (rechts oben) -- das auf Abb. 4 unbezeichnet geblieben war -- nach rechts überschiesst. (Das ist die 'hyperbolische Flächenanlegung,' die wir später als Satz II 6 der

'Elemente' behandeln wollen.) Dagegen fehlt dasselbe kleine Quadrat (rechts oben) in jener Flächenanlegung, die die Abb. 6 zeigt. Das ist die sog. 'elliptische' Form, die wir demnächst als Satz II 5 bei Euklid erörtern werden.

* * *

Und nun fasse man den Euklidischen Wortlaut der 'elliptischen Flächenanlegung' ins Auge. (Man kann diesen Satz sogleich an Abb. 6 illustrieren. Darum unterbreche ich Euklids Text mehrmals in eckigen Klammern mit Hinweisen auf Abb. 6.)

II 5: "Teilt man eine Strecke [AB] sowohl in gleiche [AC = CB = x] als auch in ungleiche Abschnitte [AD = x+y, bzw. DB = x-y], so ist das Rechteck aus den ungleichen Abschnitten [(x+y) . (x-y)] zusammen mit dem Quadrat über der Strecke zwischen den Teilpunkten [CD² = y²] dem Quadrat über der Hälfte [AC² = CB² = x²] gleich."

Der Satz besagt also, dass auf Abb. 6 die Summe des schraffierten Rechtecks -- (x+y) . (x-y) -- und des schraffierten Quadrats (y²) gleich dem Quadrat x² ist: (x+y) . (x-y) + y² = x². Oder man kann auch eine andere -- für unsere späteren Zwecke günstigere -- Bezeichnungsart einführen. Man gehe nämlich vom Rechteck der Abb. 6 aus, und es seien die Seiten des Rechtecks: AD = x+y = a, bzw. DB = x-y = b. In diesem Fall wird

$$y^2 = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \text{ und } x^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$$

Und derselbe Satz II 5 besagt dann in unserer Formelsprache:

$$ab + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$$

Es käme nun als nächster Schritt in meiner Erörterung das Untersuchen dessen, wozu eigentlich die 'elliptische Flächenanlegung' bei Euklid benutzt wird? *Zu welchem Zweck hat man eigentlich diesen Satz ausgearbeitet?* Bevor ich jedoch auf diese, zweifellos wichtigere Frage einging, möchte ich hier noch einen interessanten Zug jener Strategie hervorheben, mit der Euklid seinen Satz II 5 aufgebaut hatte. (Man beachte zum folgenden noch einmal die drei Figuren: Abb. 4, 5, und 6.)-Meiner Vermutung nach entstand der geprüfte Satz (II 5) in den folgenden zwei Schritten:

1. Man subtrahierte zunächst von einem grösseren Quadrat (x^2) aus ein kleineres (y^2), und man sah, dass dabei ein 'Gnomon' übrigblieb. (Von vornherein gegeben waren natürlich x und y , die Seiten der beiden Quadrate.)

2. Erst als man den übriggebliebenen 'Gnomon' in ein Rechteck verwandelte -- indem man nämlich die Fläche, die aus dem kleinsten Quadrat (rechts oben) und aus der mit p_2 bezeichneten 'Ergänzung' besteht, verlegte, und als eine Art 'Verlängerung nach links zu' der anderen 'Ergänzung' p_1 hinzufügte --, entstand auf Abb. 6 die Strecke AB, die Verdoppelung der ursprünglichen Quadratseite, x .

Euklids Strategie ist nun gerade die Umkehrung dieses ganzen Prozesses. Er geht von der Strecke AB selbst aus. Diese Strecke muss halbiert werden, damit man die Seite jenes grösseren Quadrats (x^2) bekomme, von dem aus das kleinere subtrahiert wird. Die Seite des kleineren Quadrats (y^2) kann Euklid auch gar nicht anders umschreiben, als: *'die Strecke zwischen den Teilpunkten'* -- nachdem nämlich die ursprüngliche Strecke (AB) 'in gleiche und in ungleiche Abschnitte geteilt wurde.' Ja, der Verfasser der 'Elemente' geht so weit in der Umkehrung jenes Prozesses, der von mir als ziemlich einfaches Schema rekonstruiert wurde, dass er auch nicht von einer Subtraktion (eines kleineren Quadrates von einem grösseren aus) redet; er sagt lieber: die Summe des betreffenden Rechtecks (AD.DB) und des Quadrats (CD^2) macht das Quadrat CB^2 aus.- Zweifellos steht diese Euklidische Strategie im Dienste einer Vorbereitung. Der Satz II 5, die 'elliptische Flächenanlegung' ist nämlich nur ein Hilfssatz, zu einem viel wichtigeren und bedeutenderen Theorem.

Die wichtigste Rolle der 'elliptischen Flächenanlegung' besteht in den 'Elementen' darin, dass sie als Hilfssatz zur folgenden Konstruktion herangezogen wird: [27]

II 14: *"Ein einer gegebenen geradlinigen Figur gleiches Quadrat zu errichten."*

Euklids vorbereitender Schritt zur Lösung dieser Aufgabe besteht darin, dass die gegebene geradlinige Figur in ein Rechteck verwandelt wird. (Jede geradlinige Figur wird über das Rechteck hindurch in ein flächengleiches Quadrat verwandelt.) Den wesentlichsten Kern der Konstruktion (II 14) bildet -- wie man gleich sehen wird -- die *Quadrierung des Rechtecks*. Man erreicht dies durch eine geistreiche Verbindung der eben behandelten 'elliptischen Flächenanlegung' mit dem sog. 'Pythagoreischen Lehrsatz' (I 47). Subtrahiert man nämlich -- nach dem Pythagoreischen Lehrsatz -- vom Quadrat auf der Hypotenuse aus das Quadrat auf der einen Kathete, so bekommt man das Quadrat auf der anderen Kathete. Darum konstruiert man jetzt

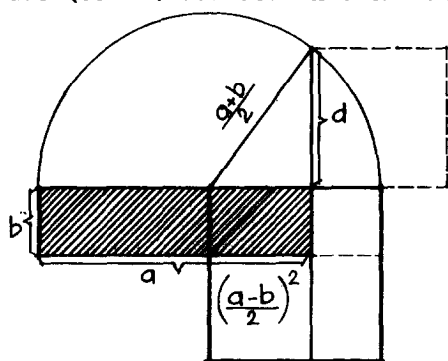


Abb. 8

-- wie Abb. 8 zeigt -- von den Seiten des gegebenen Rechtecks (a und b) aus ein grösseres Quadrat: $[(a+b)/2]^2$; dies wird das Quadrat auf der Hypotenuse: während das kleinere Quadrat, konstruiert von den Seiten desselben Rechtecks aus: $[(a-b)/2]^2$ als das Quadrat auf der einen Kathete aufgefasst wird. Die Differenz dieser beiden Quadrate wird -- im Sinne der 'elliptischen Flächenanlegung' -- das Rechteck ab (links auf Abb. 8); während dieselbe

Differenz im Sinne des Pythagoreischen Lehrsatzes als das Quadrat auf der anderen Kathete (d^2 auf Abb. 8) erscheint. Darum ist nun im Sinne der Konstruktion $ab = d^2$.

Ich vermute nun, dass die Methode der 'elliptischen Flächenanlegung' (II 5) ursprünglich eben zum Zwecke des *Verwandeln eines beliebigen Rechtecks in ein flächengleiches Quadrat* ausgearbeitet wurde. Denn diese Art Flächenverwandlung war doch ein *bedeutender Vorstoss* der frühgriechischen Mathematik, wie man dies aus dem folgenden ersieht.

a) Der terminus technicus der griechischen Mathematik für das Verwandeln eines Rechtecks in flächengleiches Quadrat hiess: τετραγωνίζειν. Über den 'tetragonismos' schreibt einmal Aristoteles -- in einer Erörterung über die verschiedenen Arten von 'Definitionen': [28] "Gewöhnlich sind die Definitionen Schlusssätzen ähnlich, wie z.B.: 'Was ist der tetragonismos?' -- 'Die Konstruktion eines dem Rechteck (ἑτερόμυκτος) flächengleichen Quadrates.' Eine solche Definition ist ein Schlusssatz. Derjenige aber, der behauptet, dass der 'tetragonismos' das Auffinden der Mittleren Proportionale ist, der macht auch den Grund der Sache namhaft."-- Man ersieht aus diesen Worten des Aristoteles, dass man sich -- selbst zu seiner Zeit noch -- dessen vollkommen bewusst war: die geometrische Konstruktion,

wie man ein Rechteck quadriert, war ursprünglich ein Problem der *Proportionenlehre*.

b) Das Problem der Mittleren Proportionale tauchte zuerst in der *Arithmetik* auf. Man denke an die beiden folgenden Sätze:

VIII 18: *"Zwischen zwei ähnlichen ebenen Zahlen gibt es eine Mittlere Proportionalzahl,"*

und

VIII 20: *"Lässt sich zwischen zwei Zahlen eine Mittlere Proportionalzahl einschalten, so müssen die Zahlen ähnliche ebene Zahlen sein."*

Man muss zum Verständnis dieser beiden Sätze wissen, dass nach der Euklidischen Terminologie a und b dann 'ähnliche ebene Zahlen' sind, wenn für sie die folgende Faktorenzerlegung $a = cd$, und $b = ef$ möglich ist -- wobei noch $c:e = d:f$ sein muss. -- Ist eine solche Faktorenzerlegung (und eine solche Proportion der betreffenden Faktoren) für zwei beliebige natürliche Zahlen, a und b , nicht möglich -- sind also a und b keine 'ähnliche ebene Zahlen' --, dann gibt es für sie auch gar keine Mittlere Proportionalzahl. Darum hat man nun mit der 'elliptischen Flächenanlegung' (II 5) und mit der Methode, wie man ein beliebiges Rechteck in ein flächengleiches Quadrat verwandelt (II 14), das geometrische Äquivalent einer arithmetisch nicht immer lösbaren Aufgabe gefunden. [29] Man ging auch in diesem Fall, wie bei der einfachen (parabolischen) Flächenanlegung, von dem oben einmal schon zitierten Satz VII 19 aus:

"Stehen vier Zahlen in Proportion, dann muss das Produkt aus der ersten und vierten dem Produkt aus der zweiten und dritten gleich sein."

Dieser Satz heisst ja für den Fall der Mittleren Proportionale soviel: sucht man eine Zahl x für die Proportion $a:x = x:b$, so ist diese arithmetische Aufgabe dem geometrischen Problem äquivalent: $x^2 = ab$. Man soll ein dem Rechteck ab flächengleiches Quadrat (x^2) konstruieren.

c) Man war sich auch später noch völlig im klaren darüber, dass die altpythagoreische Flächenanlegung (und darunter die Verwandlung eines beliebigen Rechtecks in ein flächengleiches Quadrat) eine hervorragende Leistung der theoretischen Mathematik ermöglicht hatte. Darum bezeichnet der oben zitierte Text des Proklos diese Entdeckungen als 'Erfindungen der Muse der Pythagoreer' (τῆς τῶν Πυθαγορείων Μούσης εὐρήματα), und er redet von 'jenen alten und ehrwürdigen (göttlichen!) Männern' (ἐκεῖνων τῶν παλαιῶν καὶ θεῶν ἀνδρῶν), die diese Konstruktionen erfunden hatten. -- Gerade in diesem Sinne erblickt auch Platon [30] das Wesen der Geometrie 'in dem Ähnlich-Machen (ὁμοίωσις) der der Natur nach nichtähnlichen Zahlen -- dank gewissen Eigentümlichkeiten der Flächen (πρὸς τὴν τῶν ἐπιπέδων μοῖραν). -- Sinnvoll

wird diese sonderbare Ausdrucksweise nur dann, wenn man sich folgendes überlegt: Es gibt eine Mittlere Proportionalzahl nur zu zwei 'ähnlichen ebenen Zahlen.' Sind also die Seiten irgendeines Rechtecks *keine* 'ähnliche ebene Zahlen,' so kann man dieses Rechteck *arithmetisch* auch nicht in ein flächengleiches Quadrat verwandeln, da es zu seinen Seiten *keine* Mittlere Proportionalzahl gibt. Verwandelt man ein solches Rechteck dennoch in ein flächengleiches Quadrat, so hat die Geometrie sozusagen 'Wunder gewirkt': als ob die der Natur nach nicht-ähnlichen Zahlen (die Seiten des betreffenden Rechtecks) ähnlich geworden wären. Und dies ist, wie Platon betont, *'in der Tat kein menschliches, sondern ein göttliches Wunder -- mindestens in den Augen derjenigen, die des Verständnisses fähig sind.'* [31]

d) Die Entdeckung dessen, wie man ein beliebiges Rechteck in ein flächengleiches Quadrat verwandelt, hat auch das Einführen eines vollkommen neuen und grundlegenden Begriffes der griechischen Geometrie veranlasst. Man überlege sich nämlich folgendes. Man weiss aus zahlreichen (auch arithmetisch möglichen) Fällen, dass *die Seite eines einem gegebenen Rechteck flächengleichen Quadrats die Mittlere Proportionale zu den Rechteckseiten ist.* Aber man weiss auf der anderen Seite aus der Arithmetik, dass es nur zu zwei 'ähnlichen ebenen Zahlen' eine Mittlere Proportionalzahl gibt. Verwandelt man also ein solches Rechteck in ein flächengleiches Quadrat, dessen Seiten -- *a* und *b* *nicht* 'ähnliche ebene Zahlen' sind, so bekommt man ein recht merkwürdiges Quadrat; dessen Seitenlänge nämlich sich *zahlenmässig* gar nicht ausdrücken lässt; ja, die Länge dieser Seite lässt sich *linear* gar nicht messen. (Es gibt gar keine Längeneinheit, deren verschiedene Mehrfachen sowohl die Rechteckseiten -- die 'nicht ähnlichen ebenen Zahlen' *a* und *b* --, wie auch die entsprechende Quadratseite sein könnten.) Aber man kennt auf der anderen Seite das *Flächenmass* des betreffenden Quadrats doch ganz genau: es ist dem Flächenmass des verwandelten Rechtecks gleich. Darum führt man nun einen neuen Begriff für die derartigen Quadrate ein; sie werden als $\delta\upsilon\sigma\acute{\alpha}\mu\epsilon\iota\varsigma$ = *'Quadratwerte von Rechtecken'* bezeichnet. [32] Man misst also anstatt der Länge der betreffenden *linear inkommensurablen Strecken* das auf sie errichtete Quadrat. Der Begriff $\delta\upsilon\sigma\acute{\alpha}\mu\epsilon\iota\varsigma$ (= *'Quadratwert eines Rechtecks'*) ist also unserem Begriff 'Quadratwurzel' ziemlich nahe verwandt, ohne damit identisch zu sein. - Ich vermute nun, dass die Schöpfung dieses Begriffes ('*dynamis*') und damit die Entdeckung jener '*linear inkommensurablen Strecken*' ($\epsilon\upsilon\theta\epsilon\iota\alpha\iota\ \acute{\alpha}\sigma\acute{\upsilon}\mu\mu\epsilon\tau\rho\omicron\iota\ \mu\acute{\eta}\kappa\epsilon\iota$; vgl. *Elem. X def. 3*), die '*quadratisch kommensurabel*' ($\delta\upsilon\sigma\acute{\alpha}\mu\epsilon\iota\ \sigma\acute{\upsilon}\mu\mu\epsilon\tau\rho\omicron\iota$) sind, auf dieselbe altpythagoreische Zeit fällt, die auch die '*elliptische Flächenanlegung*' bzw. das '*Quadrieren des Rechtecks*' erfunden hatte.

Man sieht auch, dass die '*elliptische Flächenanlegung*' (II 5) und die davon untrennbare '*Quadrierung eines beliebigen Rechtecks*' (II 14) ebenso die *geometrische Lösung* einer arithmetisch nicht

immer lösbarer Aufgabe (d.h. in diesem Fall des Auffindens der 'Mittleren Proportionale') darstellen, wie auch die einfache (parabolische) Flächenanlegung (I 44) ein solches Problem der Vierten und Dritten Proportionale *geometrisch* (ohne Proportionen, mit Flächentransformation) gelöst hatte, das sich *arithmetisch* nicht immer lösen liess.- Natürlich hat man später -- nachdem Eudoxos den Begriff der 'Grösse' (μέγεθος) eingeführt und seine *allgemeine Proportionallehre* ausgearbeitet hatte (man vgl. dazu besonders das Buch V der *Elemente*) -- das Problem der Mittleren Proportionale auch unmittelbar, *ohne Flächentransformation* (siehe den Satz VI 13 bei Euklid) lösen können. Die historische Bedeutung der 'elliptischen Flächenanlegung' (II 5) und der 'Quadrierung der Rechtecke' (II 14) besteht eben darin, dass diese Sätze schon in der Zeit vor Eudoxos eine geometrisch äquivalente Lösung für eine mit den alten Mitteln nicht-lösbare Aufgabe der Proportionallehre boten.

III.

Und jetzt wollen wir den anderen, noch interessanteren Fall, die sog. 'hyperbolische Flächenanlegung' der Pythagoreer (II 6) näher ins Auge fassen.

Wie ich oben schon darauf hingewiesen hatte, bildete den Ausgangspunkt sowohl für die 'elliptische' wie auch für die 'hyperbolische' Flächenanlegung -- die *Subtraktion* eines kleineren Quadrates (y^2) von einem grösseren aus (x^2 ; vgl. Abb. 4). Der Unterschied der beiden Fälle -- ob 'Ellipse' oder 'Hyperbel' -- besteht bloss darin, wie die Differenz der Subtraktion, der übriggebliebene 'Gnomon' in ein Rechteck verwandelt wird. Wie die Abb. 7 zeigt, wird bei der 'hyperbolischen Flächenanlegung' nur die mit p_2 bezeichnete 'Ergänzung' (= *parapleroma*) als eine Art 'Verlängerung nach links zu' oben der 'Ergänzung' p_1 hinzugefügt.

Ausserdem wird diesmal -- im Interesse der späteren Anwendung des Satzes II 6 -- auch noch eine andere, vom 'elliptischen' Fall *abweichende Bezeichnungsart* eingeführt. (Man vgl. zum folgenden die Abb. 9, eine Wiederholung der vorigen Abb. 7 -- doch mit neuen Bezeichnungen.)- Im Falle der 'elliptischen Flächenanlegung' bezeichnete man nämlich das grössere Quadrat -- von dem aus ein kleineres subtrahiert wurde -- als $x^2 = [(a+b)/2]^2$. Diesmal wird dasselbe grössere Quadrat als:

$[(a/2) + x]^2$ bezeichnet.- Das kleinere Quadrat, das subtrahiert wurde, war im früheren Fall, bei der 'elliptischen'

Form: $y^2 = [(a-b)/2]^2$; dagegen wird dasselbe beim 'hyperbolischen' Fall: $(a/2)^2$. (Wie man sieht, ermöglicht diese andere Bezeichnungsart sogleich auch, dass das 'überschiessende kleine

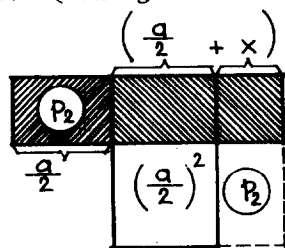


Abb. 9

Quadrat' -- die sog. ὑπερβολή, rechts oben auf Abb. 7 und 9 -- als x^2 bezeichnet werde. [33] Man wird den Vorteil dieser anderen Bezeichnungsart später, bei der Anwendung des Satzes II 6 sogleich einsehen.) Und jetzt fassen wir noch den Euklidischen Wortlaut des Satzes ins Auge. (Den Text unterbreche ich mehrmals in eckigen Klammern mit Hinweisen auf Abb. 9.)

II 6: "Halbiert man eine Strecke $[a/2 = a/2]$ und setzt man ihr irgendeine Strecke gerade an $[x]$, so ist das Rechteck aus der ganzen Strecke mit Verlängerung und der Verlängerung $[(a+x) \cdot x]$ zusammen mit dem Quadrat über der Hälfte $[(a/2)^2]$ dem Quadrat über der aus der Hälfte und der Verlängerung zusammengesetzten Strecke $[((a/2) + x)^2]$ gleich."

Der ganze Satz besagt also dasselbe -- nur mit anderen Bezeichnungen --, was auch der Satz der 'elliptischen Flächenanlegung' (II 5) besagt hatte: die Summe jenes Rechtecks, das aus dem 'Gnomon' entstand -- $(a+x) \cdot x$ -- und des Quadrats $(a/2)^2$ [das subtrahiert wurde] macht das grössere Quadrat $[(a/2) + x]^2$ aus: $(a+x) \cdot x + (a/2)^2 = [(a/2) + x]^2$; oder was damit gleichbedeutend ist: Subtrahiert man von einem grösseren Quadrat aus $[(a/2) + x]^2$ ein kleineres: $(a/2)^2$, so bleibt ein Rechteck: $(a+x) \cdot x$ übrig.

Warum dieser 'hyperbolische' Fall (II 6) -- als eine Variante zum Satz II 5 -- formuliert und noch einmal bewiesen wurde, das versteht man nur dann, wenn man die Anwendung dieses Satzes näher ins Auge fasst.

Die 'hyperbolische Flächenanlegung' wird -- wenn man jetzt ihre späteren Anwendungen im Buch X ausser acht lässt [34] -- nur zweimal in den 'Elementen' als Hilfssatz benutzt, nämlich zur Konstruktion II 11 und zum Beweis des Satzes III 36. (Der letztere ist übrigens nur ein Spezialfall der erstgenannten Konstruktion!) Und was die Konstruktion II 11 betrifft, sie ist die 'flächengeometrische Variante der sog. 'stetigen Teilung':

VI 30: "Eine gegebene begrenzte gerade Linie stetig zu teilen." [35]

Mit anderen Worten heisst dies soviel: die Strecke a soll so geteilt werden, dass ihre beiden Teile -- x und $(a-x)$ -- die Proportion ergeben: $a:x = x:(a-x)$. (Ein interessanter Spezialfall der Mittleren Proportionale!) -- Offenbar dieselbe Proportion wird im Buch II 'flächengeometrisch' folgendermassen formuliert:

II 11: "Eine gegebene Strecke so zu teilen, dass das Rechteck aus der ganzen Strecke und dem einen Abschnitt dem Quadrat über dem anderen Abschnitt gleich ist."

Die Strecke a soll also mit ihren beiden Teilen -- x und $(a-x)$ -- die Gleichung eines Rechtecks und eines Quadrats befriedigen: $a(a-x) = x^2$.

Die Lösung dieser Aufgabe wird durch eine ähnliche geistreiche Verbindung der 'hyperbolischen Flächenanlegung' (II 6) mit dem

Pythagoreischen Lehrsatz erreicht, wie auch das Quadrieren des Rechtecks (II 14: die flächengeometrische Variante des Suchens der gewöhnlichen Mittleren Proportionale zu zwei Grössen) aus einer Verbindung der 'elliptischen Flächenanlegung' (II 5) mit dem Pythagoreischen Lehrsatz bestand.

Nachdem man aus dem Satz II 6 weiss, dass die Differenz der beiden Quadrate $[(a/2) + x]^2 - (a/2)^2$ dem 'hyperbolischen Rechteck: $(a+x) \cdot x$ gleich ist (s. Abb. 9), konstruiert man jetzt ein solches rechtwinkliges

Dreieck (s. Abb. 10), dessen beide Katheten a und $a/2$ sind, und dessen Hypotenuse $(a/2) + x$ wird. Darum wird nun im Sinne der 'hyperbolischen Flächenanlegung' die Differenz der beiden vorhin genannten Quadrate, das Rechteck:

$$[(a/2) + x]^2 - (a/2)^2 = (a+x) \cdot x,$$

während im Sinne des

Pythagoreischen Lehrsatzes die Differenz derselben beiden

Quadrate (auf der Hypotenuse, bzw. auf der einen Kathete) das Quadrat auf der anderen Kathete wird:

$$[(a/2) + x]^2 - (a/2)^2 = a^2.$$

Darum darf man aufschreiben:

$$(a+x) \cdot x = a^2 \dots\dots\dots (1)$$

Doch fasse man jetzt -- indem man auch diese wichtige Gleichung (1) nicht vergisst -- die Abb. 11 (eine Wiederholung der Abb. 10) noch einmal ins

Auge. Wie diese Abb. 11 zeigt,

ist das schraffierte Rechteck, $a \cdot x$, ein gemeinsamer Bestandteil sowohl des grösseren Rechtecks -- $(a+x) \cdot x$ --, wie auch des Quadrats a^2 . Lässt man diesen

gemeinsamen Bestandteil weg, so müssen die übriggebliebenen Teile -- das leergelassene Rechteck $a \cdot (a-x)$ auf der einen, und das 'hyperbolische' x^2 auf der anderen Seite -- untereinander gleich bleiben: $a \cdot (a-x) = x^2 \dots\dots\dots (2)$ [36]

Und das ist gerade die Lösung der flächengeometrisch formulierten 'stetigen Teilung,' der Aufgabe II 6.

* * *

Zum Schluss wollen wir die gemeinsamen Züge der pythagoreischen Flächenanlegungen noch einmal ins Auge fassen.

Es wurde oben darauf hingewiesen, dass die einfache Flächenanlegung (I 44) ein nicht immer lösbares Problem der

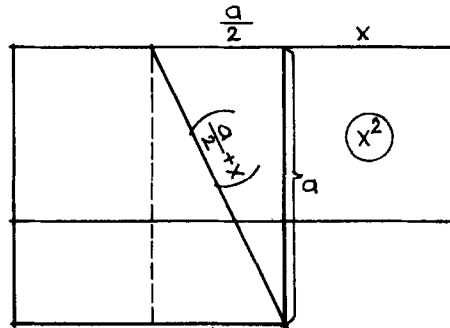


Abb. 10

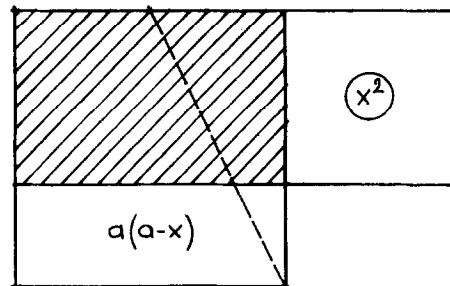


Abb. 11

Proportionenlehre -- die *Vierte Proportionale* zu drei gegebenen, bzw. die *Dritte Proportionale* zu zwei gegebenen Zahlen -- gelöst hatte. Aber diese geistreiche Konstruktion hat noch zu keiner grundlegend neuen Errungenschaft der Mathematik geführt. (Man hätte nämlich das Problem der Vierten und Dritten Proportionale auch *arithmetisch* immer lösen können; entweder so, dass man ausser den ganzen Zahlen auch die *Brüche* als 'Zahlen' [37] gelten lässt, oder -- was damit gleichbedeutend ist: man hätte anstatt der ungünstigen gegebenen Zahlen mit ihren geeigneten Mehrfachen die arithmetisch äquivalente Aufgabe lösen können.)

Die 'elliptische Flächenanlegung' (II 5) und das Quadrieren des Rechtecks (II 14) haben schon zu einer grundlegend neuen Errungenschaft geführt. Es gibt zu zwei beliebigen Zahlen *nicht immer, nur unter gewissen Bedingungen* eine Mittlere Proportionalzahl. Die flächengeometrische Lösung des Problems der Mittleren Proportionale war suzusagen gleichbedeutend mit jener Erkenntnis, dass es auch *Strecken gibt, die linear inkommensurabel und nur quadratisch kommensurabel sind*. Darum hat diese Erkenntnis auch das Einführen des neuen mathematischen Begriffes 'dynamis' (= 'Quadratwert eines Rechtecks') veranlasst.

Noch eindeutiger verlässt man den Bereich der 'Zahlen' -- die bis dahin als 'aus diskreten Einheiten bestehend' gedacht wurden -- mit der 'stetigen Teilung.' Wie der Scholiast betont: man kann dieses Problem (II 11 -- wozu die 'hyperbolische Flächenanlegung,' II 6, der unentbehrliche Hilfssatz ist) mit *Rechensteinen* (d.h. also mit 'Zahlen,' die aus irgendwelchen 'Einheiten' bestehen) nie lösen: [38] οὐ δέικνυται διὰ ψήφων. Es gibt *keine drei ganzen Zahlen (und auch keine drei Brüche) a, x, und (a-x), die die Proportion $a:x = x:(a-x)$ befriedigten.* [39]

Die 'stetige Teilung' ist also ein beachtenswerter Spezialfall der 'Mittleren Proportionale,' der sich nie mit Zahlen ausdrücken lässt. Umso interessanter wäre es zu wissen, wie die Alten Pythagoreer auf den Gedanken dieser Proportion gekommen sein mögen. Da die Quellen nichts darüber verraten, kann man diese Frage nur mit *Vermutungen* beantworten. Aber ich glaube, ziemlich

naheliegend ist doch die folgende Vermutung.

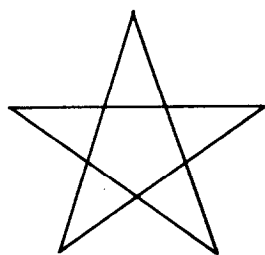


Abb. 12

Man weiss, dass das *Pentagramm* (Abb. 12), das man aus den Diagonalen eines regelmässigen Fünfecks bekommt, ein heiliges Symbol der Pythagoreer war. [40] Es genügt nun ein Blick auf die Abb. 13, um einzusehen, dass die Diagonale a (= AC) des regelmässigen Fünfecks durch die andere Diagonale (BD) in Punkt F in zwei ungleiche Abschnitte geteilt wird, von denen der längere (x) der Seite des Fünfecks gleich ist. Man fasse nun zunächst das gleichschenklige Dreieck ABC ins

Auge, dessen grösster Winkel bei B (ein Winkel des regelmässigen Fünfecks) 108° beträgt. Folglich können die beiden Basiswinkel

dieses Dreiecks nur je 36° sein. Doch hat man daselbst auch ein anderes, kleineres gleichschenkliges Dreieck BCF, dessen Basiswinkel bei C und B gleichfalls je 36° sind; folglich muss der grösste Winkel auch dieses letzteren Dreiecks (BCF) bei F 108° sein. Bei beiden gleichschenkligen Dreiecke -- ABC und BCF -- sind also *ähnlich*. Die entsprechenden Seiten der ähnlichen geradlinigen Figuren sind jedoch *verhältnissgleich*. [41] Das Verhältnis der Basis-Strecken der beiden gleichschenkligen Dreiecke -- $a:x$ -- muss dem Verhältnis der beiden Schenkel -- $x:(a-x)$ -- gleich sein. Bezeichnet man also die

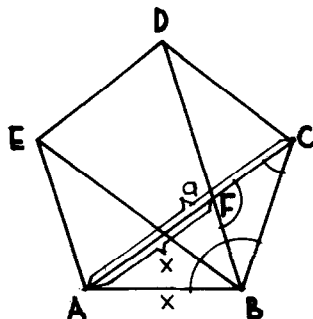


ABB. 43

Seite des regelmässigen Fünfecks mit x und mit a seine Diagonale, so gilt die Proportion: $a:x = x:(a-x)$. Die Diagonalen des regelmässigen Fünfecks schneiden sich *nach der stetigen Teilung*. Darum glaube ich, dass wohl eben ihr heiliges Symbol, das Pentagramm die Alten Pythagoreer zur Untersuchung der *stetigen Teilung* veranlasst haben mag. In der Tat wird diese Art von 'Schnitt' (VI 30, bzw. seine flächengeometrische Lösung: II 11) bei Euklid eben zur Konstruktion des regelmässigen Fünfecks benutzt.

ANMERKUNGEN

1. Dieser Aufsatz bildet den Teil einer grösseren Untersuchung -- der Fortsetzung meines Buches *Anfänge der griechischen Mathematik* (1969 R. Oldenbourg Verlag, München-Wien, 494) --, die ich unter einem ähnlichen Titel in den nächsten Jahren zu veröffentlichen gedenke.
2. Proclus Diadochus, *In Euclidis Elementorum librum primum comm.*, ed. G. Friedlein, Lips. 1873, 419, 15 - 420, 12.
3. Im griechischen Original liest man: $\phi\alpha\sigma\iota\nu\ \sigma\acute{\iota}\ \pi\epsilon\rho\iota\ \tau\acute{o}\nu\ \epsilon\upsilon\delta\eta\mu\omicron\nu$. Ich verstehe diese Wendung in dem Sinne, dass Proklos das Werk des Eudemos zwar *nicht* unmittelbar in der Hand hatte, aber er vermutete doch, dass die in seinen Quellen vorgefundene Ansicht letzten Endes auf Eudemos zurückgeht.- Es ist irreführend, wenn dieselbe griechische Wendung deutsch (M. Steck 1945 *Proklus Diadochus, Kommentar zum ersten Buch von Euklids Elementen*, Übers. von P. L. Schönberger, Halle, S. 458) als "der Schule des Eudemos zufolge" wiedergegeben wird. Man weiss ja von einer "Schule" -- oder sogar von einer "mathemathikhistorischen Schule des Eudemos" überhaupt nichts.- Freilich, ist es noch schlimmer, wenn man das ganze Problem verschweigt, und wie der englische Text (T.L. Heath, *Euclid's Elements*, vol. 1, Dover Publications,

- 343) schlicht "übersetzt": "says Eudemos."- Ich folge übrigens auch P. Tannery nicht, der (1887 *La géométrie grecque*, Paris, S. 18 ff.) *Geminos* als "Zwischenquelle" -- zwischen Eudemos und Proklos -- "erschliessen" wollte.- Selbstverständlich kann dabei auf Eudemos nur der Bericht über die dreierlei Arten der Flächenanlegung, sowie über den *altpythagoreischen Ursprung* dieser zurückgehen. Denn von einer Anwendung derselben Namen auf die Kegelschnitte (durch Apollonios von Perge) wird Eudemos wohl noch nicht gewusst haben.
4. Wohl wird man später auf Grund derselben Interpretation auch jenen *ganzen Komplex* von wissenschaftlichen Erkenntnissen zusammenstellen können, der im Bericht des Proklos als 'Erfindungen der pythagoreischen Muse' angedeutet wird. Diesmal beschränke ich mich jedoch bloss auf die Erklärung von *drei* Euklidischen Sätzen.
 5. Ich kann auf die Auseinandersetzung mit der modernen Forschung einstweilen umso mehr verzichten, da meine Auffassung sich *grundsätzlich* von den hier einschlägigen und heute noch gültigen historischen Ansichten unterscheidet. Der Fachmann wird sogleich sehen, womit ich in der modernen Literatur überhaupt *nicht einverstanden* bin. Für diejenigen, die die Unterschiede zwischen meiner Auffassung und der *communis opinio* schon jetzt für sich präzisieren möchten, empfehle ich zur Orientierung die folgenden Werke: T. L. Heath *Euclid's Elements*, I-II-III (Dover Publications). T. L. Heath 1921 *Greek Mathematics*, I-II, Oxford. C. Thaeer 1943 "Antike Mathematik 1906-1930" *Bursians Jahresbericht über die Fortschritte der klass. Altertumswiss.*, 283-284. B.L. v.d. Waerden 1956 *Erwachende Wissenschaft* Basel-Stuttgart. O. Becker 1957 *Das mathematische Denken der Antike* Göttingen. (Man kann auf Grund dieser Werke die gesamte wesentliche moderne Literatur über die hier behandelten mathematikhistorischen Probleme zusammenstellen.)
 6. In den vier Punkten habe ich natürlich nur das Skelett der Gedankenführung skizziert. In Wirklichkeit ist die Konstruktion (bzw. der Beweis) ausführlicher. Euklid vergisst z.B. auch das nicht, dass man selbst die *Existenz* des Schnittpunktes *K* beweisen muss. Heute wäre man geneigt, diese Existenz -- bloss auf Grund einer naiv-intuitiven Anschaulichkeit -- für "selbstverständlich" zu halten.
 7. "die Diagonale halbiert das Parallelogramm" -- heisst es im Satz I 34.
 8. Man findet einen wichtigen Satz über die "um die Diagonale liegenden Parallelogramme" im Buch VI der *Elemente*: VI 24: "In jedem Parallelogramm sind die Parallelogramme um die Diagonale sowohl dem ganzen als auch einander ähnlich."
 9. Auf diesen wichtigen *terminus technicus* der pythagoreischen Geometrie mache ich schon hier *nachdrücklich* aufmerksam.
 10. Auch diese Erkenntnis war für die pythagoreischen

Flächenanlegungen *entscheidend wichtig*, wie ich darauf später noch zurückverweisen werde.

11. Die Rekonstruktion dieser einfacheren und darum vermutlich ursprünglicheren Form des Satzes I 44 ist so naheliegend, dass man sie wohl auch nicht näher zu begründen brauchte. Aber es sei hier doch erwähnt, dass auch Proklos and der oben angeführten Stelle (s. oben Anm. 2) unseren Satz in demselben Sinne erklärt: "Wenn z.B. ein Dreieck von 12 Quadratfuss gegeben ist und eine 4 Fuss lange Gerade, so legen wir das dem Dreieck gleiche Parallelogramm and die Gerade an, wenn wir die Länge der insgesamt 4 Fuss nehmen und dann herausbekommen, wieviel Fuss die Breite betragen muss, damit das Parallelogramm dem Dreieck gleich ist. Finden wir nun glücklich die Breite zu 3 Fuss und *multiplizieren die Länge mit der Breite*, dann erhalten wir also damit die erforderliche Fläche, *wenn der gegebene Winkel ein Rechter ist*. So etwa ist es um das Flächenanlegen, das wir vor alters her von den Pythagoreern Überkommen haben."
12. O. Toeplitz 1929 "Das Verhältnis von Mathematik und Ideenlehre bei Plato" *Quellen und Studien z. Gesch. d. Math.* (B)1; wieder abgedruckt 1965 in *Zur Gesch. d. griech. Math.*, red. von O. Becker, Darmstadt, S. 45-75, S. 48 f.
13. Á. Szabó 1969 *Anfänge der griechischen Mathematik*, München-Wien, 131-242.
14. Ich will diesen Satz hier nicht ausführlicher behandeln. Ich verweise nur auf die folgende Literatur: T.L. Heath *Euclid's Elements* II, S. 411; C. Thaer 1935 *Die Elemente von Euklid*, Teil III (*Ostwald's Klassiker der Exakten Wiss.* 240, Leipzig), S. 80; A. Frajese-L. Maccioni 1970 *Gli Elementi di Euclide*, Torino, S. 545.
15. Euklid behandelt den Satz ausführlicher, aber auch -- *umständlicher*.
16. Vgl. *Euclides* (ed. J. Heiberg) 1888) S. 280.
17. Vgl. z.B. T. L. Heath, *op. cit.* II, S. 112.
18. Man vgl. dazu VII def. 16: "Wenn zwei Zahlen bei gegenseitiger Vervielfältigung eine Zahl bilden, wird die entstehende eine *ebene Zahl* genannt, und die einander vervielfältigenden Zahlen ihre *Seiten*."- Griechisch heisst "*ebene Zahl*": ἐπίπεδος ἀριθμός; aber derselbe Terminus könnte (dem Sinne nach *genauer!*) auch als "*Rechteckszahl*" verdeutscht werden.
19. Natürlich lässt das naiv-intuitive Denken sogleich auch die Umkehrung dieser These gelten, also: "Sind zwei verschiedene Rechtecke untereinander *flächengleich*, so müssen ihre Seiten *in umgekehrtem Verhältnis zueinander stehen*."
20. Man liest diese Statistik in der italienischen Übersetzung von A. Frajese-L. Maccioni, *op. cit.* 411. Eines der grössten Verdienste dieser sehr gründlichen und sorgfältigen Arbeit besteht eben darin, dass sie nach jedem Satz sorgfältig

- aufzählt: welche früheren Sätze im Beweis benutzt wurden, und in welchen späteren Sätzen der betreffende Satz selber zur Anwendung kommt. Man wundert sich nur darüber, wie man -- ohne eine solche sorgfältige Vorbereitung -- bisher überhaupt an das Problem der inneren Chronologie des Euklidischen Werkes heranzutreten gewagt hatte!
21. T. L. Heath, *op. cit.* II, S. 265: "A particular case is... the problem of applying to a given straight line a rectangle equal to a given area and falling short by a square...it can be solved, without the aid of Book VI, as shown above under II 5."
 22. *Ibid.* 267: "Again there is an important particular case which can be solved by means of Book II only, as shown under II 6...applying to a given straight line a rectangle equal to a given area exceeding by a square."
 23. In demselben Sinne, wie T. L. Heath auch B. L. v.d.Waerden 1956 *Erwachende Wiss.*, S. 199; oder Ivor Thomas 1967 *Greek Mathematics, I. From Thales to Euclid*, London-Cambridge, Mass., S. 186; oder auch O. Becker 1957 *Das math. Denken der Antike*, Göttingen, S. 60-63.
 24. Man vgl. dazu den 'Anhang' meines oben in Anm. 13 genannten Buches (455-488), sowie den Aufsatz: Á. Szabó 1970 "Ein Lob auf die altpythagoreische Geometrie" *Hermes* 98, S. 405-421.
 25. Natürlich könnte man im Sinne dieser Definition einen anderen "Gnomon" (Abb. 4) aus y^2 und den beiden "parapleromata" bilden. Wir brauchen jedoch diese andere Möglichkeit im vorliegenden Zusammenhang nicht zu berücksichtigen.
 26. Es handelt sich in beiden Fällen um jenes Quadrat, das auf Abb. 4 als y^2 erscheint.
 27. Nach der oben in Anm. 14 genannten Übersetzung von A. Frajese und L. Maccioni wird der Satz II 5 in den "Elementen" ausserdem noch zu den Sätzen III 35; X 17 und Lemmata 41, 59 als Hilfssatz herangezogen. Nur der Einfachheit halber beschränke ich mich diesmal auf die Untersuchung des wichtigsten Falles, nämlich des Satzes II 14.
 28. *De anima* II 2, 413 a 13-20; bgl. *Met.* 996 b 18-21.
 29. Ich muss hier auch einen früheren Irrtum von mir korrigieren, den ich meiner Leichtgläubigkeit zu verdanken habe. J. L. Heiberg 1904 "Mathematisches bei Aristotles" *Abhandlungen z. Gesch. d. math. Wiss.* 18 war nämlich der Ansicht, dass das Verwandeln eines Rechtecks in ein flächengleiches Quadrat ursprünglich mit jener Konstruktion der Mittleren Proportionale gelöst worden wäre, die man jetzt bei Euklid als Satz *Elem. VI 13* liest. Diesem Satz gegenüber wäre die Beweisführung des Theorems II 14 nur eine "nachträgliche Tarnung" der ursprünglichen Lösung.- Derselben Ansicht schloss sich auch T. L. Heath (1949 *Mathematics in Aristotle*, Oxford, S. 191-193) an. Und ich habe diese Ansicht von

- Heiberg & Heath in meinem Buch (1969 *Anfänge der griech. Math.*, S. 61) kritiklos übernommen. Aber diese historische Konstruktion kommt mir jetzt *recht unwahrscheinlich* vor. Denn erstens: zum exakten Beweis des Satzes VI 13 braucht man doch schon die Eudoxische Definition: *V def. 5*. (Einerlei, wann man den Satz VI 13 zum ersten Mal aufgestellt hatte: sein Beweis, den wir heute bei Euklid lesen, ist *nach-eudoxisch*.) Und zweitens: hält man den eingangs zitierten Bericht des Proklos über den *altpythagoreischen Ursprung* der Flächenanlegungen für glaubwürdig -- und ich sehe nichts, was dagegen sprechen sollte --, so liegt auch kein Grund und Anlass vor, zu bezweifeln, dass das Verwandeln eines beliebigen Rechtecks in ein flächengleiches Quadrat *ursprünglich unter Anwendung des Satzes II 5 ausgeführt wurde*.
30. Epinomis 990 D 1-6.
 31. Vgl. dazu Á. Szabó 1970 "Ein Lob auf die altpythagoreische Geometrie" *Hermes* 98, S. 405-421.
 32. Vgl. Á. Szabó 1963 "Der math. Begriff *dynamis*" *Maia* (NS) 5, S. 219-256 und Á. Szabó 1969 "Anfänge der griech. Math.", S. 38-130.
 33. Ich liess dasselbe kleine Quadrat rechts oben in den Abbildungen 4, 5, und 6 *unbezeichnet*, nachdem es in jener Konstruktion, die diese Art Flächenanlegung anwendet, gar keine Rolle spielt.
 34. Nach der Statistik von A. Frajese und L. Maccioni (s. oben Anm. 14) wird das Theorem II 6 auch zu X 28, Lemmata I II herangezogen.
 35. Ich habe oben -- am Anfang meines Teils II. -- schon darauf hingewiesen, dass die allgemeinere Form des Satzes II 6, die Aufgabe VI 29 in den 'Elementen' nur zur Lösung der stetigen Teilung (VI 30) benützt wird.
 36. Wie man sieht, wird die Mittlere Proportionale zwischen a und $(a-x)$ gerade die Seite des 'Überschiessenden Quadrats' (x^2), der 'Hyperbel.'- Man beachte dabei auch, dass die beiden Gleichungen (1) und (2) auch folgendermassen auseinander ableitbar sind: man schreibt zunächst (2) in der Form auf: $(a-x):x = x:a$ (3) und (1) in der Form: $x:a = a:(a+x)$ (4) In einer späteren Arbeit werde ich auf die hier als (3) und (4) bezeichneten Gleichungen zurückkommen müssen.
 37. Man denke an die Euklidische Definition: *VII def. 2: "Zahl ist die aus Einheiten zusammengesetzte Menge."*
 38. Vgl. *Euclidis Elementa* (J. L. Heiberg, Leipzig 1888) V. S. 248, 22 - 249, 3.
 39. A. a. O. 251, 2-4: ἴσθι καὶ τοῦτο ὡς δι' ἀριθμῶν οὐ δείκνυται. ἄλογος γὰρ ἐστὶν ἡ τοιαύτη εὐθεῖα καὶ ἀριθμοῖς οὐχ ὑποπίπτει.
 40. Man vgl. dazu K. Reidemeister 1949 *Das exakte Denken der Griechen*, Hamburg, S. 19; B. L. V.d. Waerden, *op. cit.*, S. 166; die Aufsätze von K. v. Fritz und S. Heller im Sammelband

- Zur Gesch. d. gr. Math.* (red. O. Becker 1965 Darmstadt) sowie die bei diesen Verfassern aufgesählte Literatur.
41. Dies wird man *intuitiv* wohl auch schon in der Zeit vor der Entdeckung der linearen Inkommensurabilität gewusst haben.

* * * * *

LECTURE SERIES AT THE UNIVERSITY OF CHICAGO

Beginning in the autumn of 1968, Professor Felix Browder has organized a series of lectures each year sponsored by the Department of Mathematics under the title "Contemporary Mathematics from an Historical Viewpoint." In the announcements, these were described as follows: "The lectures will be expository in character, and will deal with the background and aims of present-day research in the mathematical sciences, both pure and applied." About two dozen lectures have been given in each academic year. The speakers and topics for the series in 1972-73 were as follows: John W. Milnor (Milgram's Gauss sum formula), Daniel Zelinsky (Galois theory), Walter Rudin (Some classical interpolation problems), Richard S. Palais (Real algebraic differential topology), Lipman Bers (Moduli of Riemann surfaces and Kleinian groups), Donald C. Spencer (Overdetermined systems of partial differential equations: some results and problems), Paul Erdős (Combinatorial analysis), Raoul Bott (Exotic characteristic classes), Charles L. Fefferman (Pseudodifferential operators and partial differential equations), John Tate (On the arithmetic of elliptic curves), Fritz John (Nonlinear elasticity), Mark Kac (Eigenvalues of the Laplacian: past and present), Shreeman Abhyankar (From Isaac Newton to Max Noether), William H. Reid (Asymptotic analysis), Hans Freudenthal (Geometry and lie group methods in finite groups), Heinz Bauer (Recent developments in the theory of harmonic spaces), Phillip Griffiths (Holomorphic curves), Herve Jacquet (Euler products and automorphic forms), Michael Shub (Dynamical systems), George D. Mostow (Lie groups), James B. Serrin (Liouville theorems for elliptic partial differential equations), R. H. Bing (The monotone mapping problem), Charles B. Morrey (Differentiability of solutions of partial differential equations), Gerald E. Sacks (Algebraically closed division rings), Tosio Kato (Essential self-adjointness).