

1182 pag
MILHAUD, G.
1900

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION GÉNÉRALE : Mathématique et Philosophie.	1
--	---

LIVRE PREMIER. — Les prédécesseurs de Platon.

INTRODUCTION.	51
CHAPITRE PREMIER. — Les premiers Ioniens.	60
CHAP. II. — Les Pythagoriciens.	79
CHAP. III. — Les Éléates.	123
CHAP. IV. — Anaxagore et Démocrite.	141

LIVRE SECOND. — Platon.

INTRODUCTION. — La Géométrie au temps de Platon.	157
QUESTIONS PRÉLIMINAIRES : les écrits de Platon ; l'enseignement oral ; la tradition platonicienne.	185
CHAPITRE PREMIER. — Dogmatisme.	201
CHAP. II. — Idéalisme. — La connaissance.	222
CHAP. III. — Idéalisme (suite). — L'être.	257
CHAP. IV. — Mécanisme et Pythagorisme. — La Physique.	288
CHAP. V. — Synthétisme. — La participation ; le vrai problème de l'un et du multiple ; les Idées-Nombres.	327
CONCLUSION.	367

CHARTRES. — IMP. DUBAS, RUE FLEURY.

PHILOSOPHES-GÉOMÈTRES

DE LA GRÈCE

PLATON ET SES PRÉDÉCESSEURS

PAR
GASTON MILHAUD
Ancien professeur de mathématiques spéciales
Professeur de philosophie à l'Université de Montpellier

Milaud G. 240257722 212150.....



PARIS
ANCIENNE LIBRAIRIE GERMER BAILLIÈRE & Co
FÉLIX ALCAN, ÉDITEUR
108, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, 108

1900
Tous droits réservés

CHAPITRE II

LES PYTHAGORICIENS

1^o L'Œuvre scientifique.

Proclus déclare, d'après Eudème, que « Pythagore transforma l'étude de la géométrie et en fit un enseignement libéral, car il remonta aux principes supérieurs et rechercha les problèmes abstraitement et par l'intelligence pure¹ ». Tout nous fait penser que ce mot caractérise ce qu'il y eut d'essentiel dans l'œuvre mathématique des premiers Pythagoriciens. Constituer une géométrie rationnelle et démonstrative, une arithmétique théorique ayant pour objet les propriétés générales des nombres, une astronomie différant fort peu elle-même d'une géométrie spéculative, une musique enfin traitant d'une façon abstraite et mathématique des intervalles et des accords, telle semble avoir été l'une des préoccupations fondamentales de Pythagore et de ses disciples. C'est à eux qu'il faut faire remonter la séparation de deux branches désormais distinctes, l'une théorique et abstraite, l'autre concrète et appliquée, dans chacun des domaines scientifiques. En particulier la géométrie se trouvait ainsi dédoublée en géo-

1. *Procli commentarii*, éd. Teubner, p. 65.

métrie proprement dite et en géodésie : et de même l'arithmétique se partageait en arithmétique et en logistique. Les Grecs ont pu montrer quelque ingéniosité dans le perfectionnement des procédés pratiques de calcul et de mesures, mais nous savons très-mal quelles modifications ils ont pu apporter à un ensemble de règles que leur léguaient les civilisations d'Orient et d'Égypte. Ce qui nous intéresse davantage, ce en quoi leur originalité se montre sans réserve, c'est la mathématique pure et désintéressée.

Géométrie. — « Eudème fait remonter aux Pythagoriciens, dit Proclus, l'invention de ce théorème que dans un triangle la somme des angles vaut deux droits, et il dit qu'ils le démontraient comme il suit : Par le sommet A du triangle ABC menons DE parallèle à BC. Puisque BC, DE sont parallèles, et que les angles alternes internes sont égaux, on a $\widehat{DAB} = \widehat{ABC}$, et $\widehat{EAC} = \widehat{ACB}$. Ajoutez de part et d'autre $\widehat{BAC}$. On aura donc $\widehat{DAB} + \widehat{BAC} + \widehat{CAE}$, c'est-à-dire $\widehat{DAB} + \widehat{BAE}$, c'est-à-dire deux droits, = la somme des angles du triangle ABC. La somme des angles d'un triangle est égale à deux droits. Telle est la démonstration des Pythagoriciens¹. »

La démonstration est déjà exactement sur le type de celles d'Euclide, et, en l'espèce, elle suppose ici connue la théorie des parallèles.

1. *Procli commentarii*, p. 379.

« Si six triangles équilatéraux ou trois hexagones ou quatre carrés assemblés par le sommet remplissent exactement quatre droits, et ce sont les seuls, c'est là un théorème pythagoricien¹. »

Les Pythagoriciens étudièrent donc les polygones réguliers.

« Si l'on écoute ceux qui veulent raconter l'histoire des anciens temps, à propos du théorème du carré de l'hypoténuse, on peut en trouver qui attribuent ce théorème à Pythagore et lui font sacrifier un bœuf après sa découverte². »

Le théorème était vraisemblablement connu depuis longtemps, dans le cas particulier du triangle de côtés 3, 4, 5, en Égypte, en Chine et dans l'Inde. Pythagore eut sans doute à le généraliser et à en donner une démonstration, sur laquelle nous ne savons d'ailleurs absolument rien.

« Ce sont, nous dit-on d'après Eudème, d'anciennes découvertes dues à la muse des Pythagoriciens, que la parabole des aires, leur hyperbole ou leur ellipse. C'est de là que plus tard on prit ces noms pour les transporter aux sections coniques ; tandis que pour ces hommes anciens et divins, c'était dans la construction plane des aires sur une droite déterminée qu'apparaissait la signification des termes. Si vous prenez la droite tout entière et que vous

1. *Procli commentarii*, p. 304.

2. *Id.*, p. 426.

terminiez l'aire donnée, on dit que vous faites la parabole de cette aire ; si vous lui donnez une longueur qui dépasse la droite, c'est l'hyperbole ; si une longueur qui lui soit inférieure, c'est l'ellipse, une partie de la droite restant en dehors de l'aire construite¹. »

Ce passage est d'une extrême importance. Les problèmes dont il est ici question, et dont Euclide achève de nous donner le sens précis, reviennent en somme à la construction de longueurs dont on connaît d'une part le produit (l'aire du rectangle construit sur ces longueurs), et d'autre part la somme ou la différence. En langage moderne, S désignant l'aire donnée, p la droite donnée, la question revient à déterminer une longueur x satisfaisant à l'une des trois équations :

$$S = px$$

$$S = px + x^2$$

$$S = px - x^2$$

et le problème peut s'énoncer ainsi dans les 3 cas :

1° Trouver une longueur X telle que le rectangle construit sur AB et X ait une aire égale à S (fig. 1).

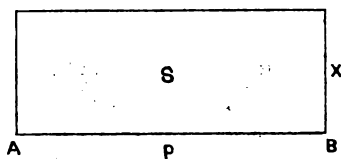


FIG. 1.

4. *Procli commentarii*, p. 419, 420.

2° Trouver une longueur $BC = X$ telle que le rectangle construit sur les deux longueurs AC ou $(p + X)$ et X , c'est-à-dire le rectangle $ACDE$ (fig. 2) ait une aire égale à S .

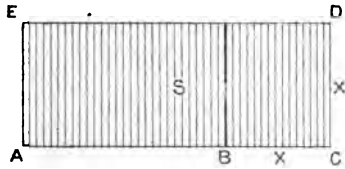


FIG. 2.

3° Trouver une longueur $BC = X$ telle que le rectangle construit sur AC ou $(p - X)$ et X , c'est-à-dire le rectangle $ACDE$ ait une aire égale à S (fig. 3).

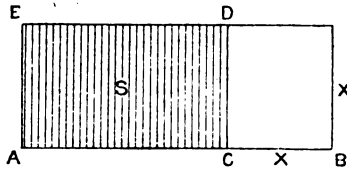


FIG. 3.

Plus généralement Euclide dans le livre ~~H~~ (28 et 29) substitue au rectangle à construire un parallélogramme tel que le parallélogramme qu'il faut ajouter ou retrancher (à la place du carré du cas précédent) soit semblable à un parallélogramme donné. Le problème revient alors à celui que définit l'équation $S = px \pm Kx^2$. La suite de la citation de Proclus, dont nous donnions ci-dessus les premières lignes seulement, fait allusion aux pro-

blèmes traités par Euclide, et se termine ainsi : « Voilà ce qu'est la parabole d'après l'antique tradition venue des Pythagoriciens. » On ne saurait plus nettement leur attribuer la solution du problème général tel qu'il a été traité par Euclide.

Cette solution suppose la connaissance du rapport des aires de deux polygones semblables. Du reste, en dehors de Proclus, Plutarque attribue cette connaissance à Pythagore : il ajoute même que le sacrifice dont parle la tradition doit avoir eu pour occasion ce problème : construire une figure équivalente à une figure donnée et semblable à une figure donnée, bien plutôt que le théorème du carré de l'hypoténuse. D'un autre côté Hippocrate de Chios, dans son fameux travail sur les lunules, prouvera, vers le milieu du ^v^e siècle, qu'il connaît le rapport des aires de deux figures semblables déjà étendu à des segments de cercle ¹.

On peut enfin faire remonter aux Pythagoriciens la construction des polyèdres réguliers. Le *Timée* sur ce dernier point apporte une confirmation sérieuse. D'après l'exposé que Platon met dans la bouche du savant pythagoricien, le feu, l'air, l'eau et la terre ont les formes du tétraèdre, de l'octaèdre, de l'icosaèdre et du

1. Cf. outre la *Géom. grecque* de P. Tannery, l'étude du même auteur, *De la solution des problèmes du second degré avant Euclide*, dans les Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux, t. IV. — Les traductions des fragments de Proclus sont empruntées à M. P. Tannery.

cube, et le démiurge utilise le dodécaèdre pentagonal pour tracer le plan de l'univers dans son ensemble. L'origine pythagoricienne de la théorie des polyèdres réguliers est d'ailleurs suffisamment prouvée encore par un passage de Philolaüs faisant une allusion très claire aux cinq polyèdres réguliers inscrits dans la sphère. Quant au dodécaèdre régulier, le problème de sa construction revient à celle du pentagone régulier. La légende du pythagoricien Hippasus, précipité dans la mer pour avoir publié cette construction ; puis la légende suivant laquelle le pentagone étoilé servait de signe de ralliement aux Pythagoriciens, — donnent une dernière confirmation à cette opinion que les Pythagoriciens ont non seulement étudié les cinq polyèdres réguliers, mais encore ont su construire le pentagone régulier, ce qui exige la division d'une droite en moyenne et extrême raison.

En résumé, il est une façon assez simple de se faire une idée du contenu de la géométrie pythagoricienne. Prenons les *Eléments* d'Euclide, faisons abstraction pour le moment des livres arithmétiques (VII, VIII, IX). Supprimons le livre V sur la proportionnalité, le livre X sur les incommensurables, ainsi que ce qui concerne les volumes dérivant de la mesure de la pyramide : ce qui reste représente à peu près le fonds qui appartenait déjà à l'école de Pythagore. — Ces remarques trouveront d'ailleurs leur confirmation dans la suite,

car nous verrons précisément avec Eudoxe et Théétète se compléter les théories de la proportionnalité, des incommensurables et de la mesure des volumes.

Quant à la forme, elle était déjà semblable à celle d'Euclide. La méthode démonstrative est suffisamment caractérisée par Eudème, quand il déclare que Pythagore remontait aux principes supérieurs et s'adressait à l'intelligence pure. Nous en avons eu un exemple dans la démonstration du théorème relatif à la somme des angles d'un triangle ; nous en avons d'autres. Ainsi un mot d'Aristote nous permettra d'attribuer aux Pythagoriciens une autre démonstration d'Euclide, celle par laquelle se trouve établie l'incommensurabilité du côté d'un carré et de sa diagonale. Sans doute il y eut une longue période, de Pythagore à Euclide, pendant laquelle les définitions se simplifièrent et se perfectionnèrent, tandis que le nombre des postulats et des axiomes devait aller sans cesse en diminuant. Nous savons que la forme parfaite du livre d'Euclide n'a pas été atteinte du premier coup. Dans son commentaire, Proclus cite plusieurs géomètres antérieurs qui avaient déjà publié des *Éléments*. Il nomme ainsi Hermotime de Colophon ; avant lui, Theudios de Magnésie ; en remontant encore, Léon, le disciple de Néoclès ; et enfin, au milieu du v^e siècle, Hippocrate de Chios¹. Les *Éléments* sont

1. Procli commentarii, Teubner, p. 67.

chaque fois, au dire de Proclus, supérieurs aux précédents, tantôt par le nombre et l'importance des démonstrations, tantôt par une plus grande généralité des propositions. — Enfin M. Tannery, se fondant sur un mot de Jamblique jusqu'ici mal interprété, a rendu très vraisemblable l'hypothèse de la publication, par les Pythagoriciens eux-mêmes, d'un traité de Géométrie appelé « tradition suivant Pythagore » *πρὸς Ἰουθαγόρου ἱστορίαι*. Ce fut là sans doute le modèle le plus ancien sur lequel devaient être composés plus tard les *Éléments* d'Euclide.

Arithmétique. — Quelques allusions d'Aristote, certains passages du *Timée* de Platon, le petit traité de Nicomaque (*l'Introduction arithmétique*), l'ouvrage de Théon de Smyrne (ce qui en mathématiques est utile pour la lecture de Platon¹), enfin un fragment de Speusippe, neveu de Platon, telles sont les sources qui peuvent servir à donner une idée, bien sommaire d'ailleurs, de l'arithmétique pythagoricienne, dans son contenu et dans ses méthodes.

Les Pythagoriciens ont étudié les séries formées : 1° par les nombres entiers consécutifs ; 2° par les nombres impairs ; 3° par les nombres pairs, et ils ont établi que l'on a

1. M. Dupuis en a publié une traduction française. Hachette, 1892.

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2,$$

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1).$$

Les nombres obtenus par sommation des nombres entiers consécutifs $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$ étaient appelés *nombre triangulaire* ; les sommes des nombres impairs étaient tout naturellement appelées *carrés* ; les sommes des nombres pairs $(n(n+1))$ formaient les nombres *hétéromèques*.

En dehors des témoignages que fournissent à ce sujet Speusippe et Théon de Smyrne, quelques passages d'Aristote sont assez significatifs. D'une part dans la liste des oppositions (dont il sera question plus loin), il fait correspondre à l'impair et au pair le carré et l'hétéromèque. D'autre part il fait clairement allusion à la génération des carrés par l'addition de nombres impairs successifs sous forme de *gnomons*. Le gnomon¹ pythagoricien est la figure coudée à angle droit telle que ABC, qui reste d'un carré quand on supprime un carré plus petit². (Fig. 4).

Rien n'est plus simple que de comprendre comment

1. Cf. dans Cantor, *Vorlesungen*, le chapitre relatif aux Pythagoriciens.

2. La forme du gnomon indique suffisamment que le mot a été primitivement emprunté à l'astronomie. On trouve d'ailleurs l'expression $\kappa\alpha\tau\acute{\alpha}\ \gamma\nu\acute{\omega}\mu\omicron\nu\alpha$ (suivant le gnomon), au lieu de perpendiculaire, chez Oéno-pide (Proclus, *Commentaire sur Euclide*). — Le sens géométrique du terme n'a pas tardé à se généraliser. Chez Euclide, le gnomon est ce qui

les Pythagoriciens formaient les carrés successifs par addition de gnomons impairs. Un point représente le premier carré, l'unité, en même temps d'ailleurs

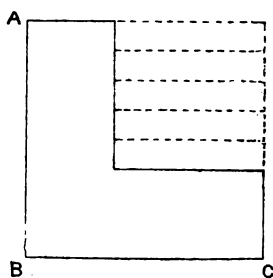


FIG. 4.

que le premier nombre impair. Le carré suivant, 2^2 ou 4, s'obtient en entourant ce point d'un gnomon formé de trois points. Le carré 9 s'obtient ensuite en entourant le précédent d'un gnomon formé de cinq points, et ainsi de suite.. (Fig. 5).

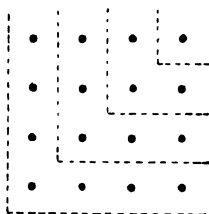


FIG. 5.

Quant à la formation des nombres triangulaires et des nombres hétéromèques, elle est évidemment expliquée reste d'un parallélogramme quand on en a supprimé un parallélogramme semblable ; Héron d'Alexandrie définit le gnomon : tout ce qui, ajouté à un nombre ou à une figure, donne un tout semblable à ce à quoi il a été ajouté. — Cf. Cantor, *Vorlesungen*.

par les figures suivantes (fig. 6), où d'une part les triangles représentent les sommes $1, 1 + 2, 1 + 2 + 3, \dots$ et où, d'autre part, le triangle dont la base est n apparaît manifestement comme la moitié du rectangle de $n(n + 1)$ points :

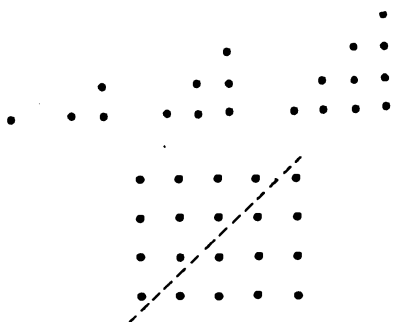


FIG. 6.

Les Pythagoriciens ont très probablement aussi considéré les nombres pyramidaux, sommes de nombres triangulaires successifs, et par conséquent nombres de points contenus dans des figures pyramidales. Mais nous n'avons pas à cet égard de renseignements assez précis. Ce que l'on peut citer de plus net est ce mot de Speusippe, que 4 est le premier nombre pyramidal : c'est la somme des deux premiers nombres triangulaires 1 et 3.

Les Pythagoriciens distinguaient déjà les nombres plans et les nombres solides. Ces expressions reviennent assez souvent chez les auteurs qui reproduisent la tradition pythagoricienne ; Euclide en donne la définition au commencement du VII^e livre. « Quand deux nombres,

dit-il, se multipliant, font un nombre, celui-ci se nomme *plan* (ἐπίπεδος). — Quand trois nombres se multipliant font un nombre, celui-ci se nomme *solide* (στερεός). » Que ces distinctions remontent aux Pythagoriciens, c'est ce qui semble résulter du passage du *Timée* où il est dit qu'avec deux plans on peut former une progression géométrique dont ils soient les termes extrêmes, en introduisant simplement un troisième plan comme moyen géométrique ; tandis que, pour former avec deux solides une progression géométrique, il faut introduire deux moyens : avec un seul ce serait impossible. Ce passage qui a exercé la sagacité de pas mal de commentateurs n'a de sens que si l'on voit dans ces *plans* et ces *solides* des nombres plans et des nombres solides répondant à la définition qu'en donne Euclide. Et avec cette interprétation, tout devient très clair : on se trouve en présence de deux propositions d'arithmétique¹. S'il faut penser que Platon, en faisant énoncer ces propositions par *Timée de Locres*, en attribue la connaissance aux Pythagoriciens, on est amené à des conséquences fort importantes : d'une part A) les Pythagoriciens ont donc étudié les proportions, d'autre part B) ils ont connu l'existence des irrationnelles.

A. — Les arithméticiens grecs dont il nous reste quelques écrits s'occupent tous de ce qu'ils appellent *analogies* ou *médiétés*. Ce sont des groupes de trois

1. Voir plus loin I. II, ch. IV.

nombres a , b , m , tels que le rapport de deux différences formées avec eux soit égal au rapport de deux d'entre eux. Ex. $\frac{a-m}{m-b} = \frac{a}{m}$.

En choisissant diversement les différences qui forment les termes du premier rapport et les termes du second, les anciens étaient amenés à étudier un certain nombre de médiétés; ainsi Théon de Smyrne en nomme dix. Trois d'entre elles étaient certainement connues des Pythagoriciens; un fragment d'Archytas, conservé par Porphyre, en fait foi¹. Ce sont les médiétés *arithmétique*, *géométrique* et *harmonique*, définies par les égalités suivantes

$$1^{\circ} \frac{a-m}{m-b} = \frac{a}{a}, \quad 2^{\circ} \frac{a-m}{m-b} = \frac{a}{m}, \quad 3^{\circ} \frac{a-m}{m-b} = \frac{a}{b}.$$

La première donne $2m = a + b$; m est moyen arithmétique entre a et b .

La deuxième peut encore se définir: $\frac{a}{m} = \frac{m}{b}$; m est moyen géométrique.

La troisième donne $\frac{2}{m} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$; m est moyen harmonique.

Le nom d'harmonique donné à cette dernière médiété est à lui seul une marque de son origine pythagoricienne. Un passage de Philolaüs lui-même nous éclaire sur ce

1. Porphyre, *Sur les harmoniques de Ptolémée*.

point. Le cube y est appelé harmonie géométrique, en ce sens qu'il a 6 faces, 8 sommets, 12 arêtes. 6, 8, 12 forment bien la médiété harmonique

$$\frac{12-8}{8-6} = \frac{12}{6}.$$

Et en même temps nous retrouvons là l'origine de la dénomination d'harmonique. Si en effet, au lieu de faire correspondre 1 à la première note de l'octave, on fait correspondre 6 pour n'avoir ensuite que des nombres entiers, c'est 8 qui correspondra à la quarte, au lieu de $\frac{4}{3}$, et 12 à l'octave, au lieu de 2¹.

Il importe de remarquer que l'étude des proportions chez les Pythagoriciens se fait à l'aide des nombres entiers. Bien que les résultats fournis par de telles proportions puissent s'appliquer, nous le savons bien, à n'importe quelle espèce de quantités proportionnelles, il n'en est pas moins vrai que théoriquement il y a une distance énorme entre une théorie des proportions faite uniquement à l'aide des nombres arithmétiques et la vraie théorie des proportions, celle qui se trouve dans Euclide exposée sur des longueurs, et telle que tout ce qui sera établi sur une proportion $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ gardera sa

1. Cf. Cantor, *Vorlesungen*.

signification complète, abstraction faite de savoir si les rapports sont ou non commensurables.

B. — En second lieu, avons-nous dit, les Pythagoriciens ont connu les irrationnelles. C'est là un fait capital. Eudèmedit nettement (commentaire de Proclus): « C'est à Pythagore que l'on doit la découverte des irrationnelles. » Comment y fut-il amené? Peut-être, comme le pense M. Cantor, en s'exerçant simplement à calculer l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit étaient égaux à l'unité: il pouvait, après avoir essayé des nombres compris entre 1 et 2 soupçonner qu'il n'en existe aucun qui puisse mesurer l'hypoténuse. En tous cas, c'est ce qu'il démontra, et cela n'est plus seulement une hypothèse. Aristote nous dit que la démonstration pythagoricienne est fondée sur ce qu'un même nombre ne saurait être à la fois pair et impair. Or justement l'une des démonstrations d'Euclide repose sur le même fait; c'est donc évidemment celle qui nous intéresse. La voici en substance:

Supposons que l'hypoténuse et le côté du triangle rectangle isocèle soient entre eux comme les nombres entiers, premiers entre eux, a et b . Alors on a $\frac{a^2}{b^2} = 2$, ou $a^2 = 2b^2$; a^2 et, par suite, a est donc un nombre pair, et dès lors b est impair. Mais soit $a = 2a'$; l'égalité $4a'^2 = 2b^2$, ou $2a'^2 = b^2$, montre que b^2 , et par suite b est un nombre pair: b serait ainsi à la fois pair

et impair, ce qui est absurde. Il n'existe donc pas de couple d'entiers dont le rapport, élevé au carré, reproduise 2.

Un passage du Théétète nous permet de dire que les Pythagoriciens ne s'occupèrent que de l'irrationnelle $\sqrt{2}$. Théodore de Cyrène étudia $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, jusqu'à $\sqrt{17}$.

Le théorème du carré de l'hypoténuse, qui amena les Pythagoriciens à la découverte de l'irrationnalité, les conduisit aussi, d'après Proclus, à un problème arithmétique d'un genre spécial, à un problème indéterminé, qui peut ainsi s'énoncer : Quels sont les groupes de trois nombres entiers, tels que 3, 4, 5, qui peuvent être les côtés d'un triangle rectangle ? En langage moderne nous dirions simplement : trouver, en nombres entiers, les solutions de l'équation :

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Les Pythagoriciens auraient ainsi résolu la question : prendre pour le plus petit côté un nombre impair quelconque ; puis en former le carré et diviser par deux les nombres obtenus en retranchant 1 à ce carré, et en l'augmentant de 1 : les résultats trouvés représenteront l'un le second côté de l'angle droit, l'autre l'hypoténuse.

Enfin cet exposé des questions d'arithmétique pythagoricienne sera à peu près complet, du moins dans la

mesure de nos connaissances, si nous ajoutons que les Pythagoriciens étudièrent les *nombre parfaits*. Un nombre parfait est un nombre qui est égal à la somme de ses facteurs. 6, par exemple, est égal à la somme $1 + 2 + 3$; $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$; 496 est encore un nombre parfait, etc. — Un nombre supérieur à la somme de ses diviseurs se nomme *déficient*, un nombre inférieur *abondant*. Ces distinctions qui se trouvent dans Euclide remontent certainement aux Pythagoriciens, puisque Aristote leur attribue le nombre parfait.

Mais ce qui importe, autant peut-être que leurs connaissances, c'est leur méthode en arithmétique. Euclide nous offre, au milieu de ses *Éléments*, un traité d'arithmétique en trois livres; mais, contrairement à ce que nous avons dit de la géométrie, ce traité ne nous donne pas une idée suffisante du véritable esprit de l'arithmétique pythagoricienne. Les démonstrations s'y font, il est vrai, avec l'appareil géométrique: les nombres, nombres entiers, sont représentés par des longueurs, et c'est sur des figures que raisonne Euclide; mais dans les *Éléments*, c'est la grandeur géométrique, la longueur continue, la ligne proprement dite qui sert de support à l'intuition. La tradition relative à l'arithmétique pythagoricienne nous montre au contraire des figures géométriques se présentant comme ensembles de points. Les lignes sont ici des files d'unités-points; une série

de ces lignes pourra former, par exemple, un triangle : une série de triangles superposés pourra former une pyramide, etc. C'est l'étendue qui se résout en unités, de façon à correspondre au nombre, et qui devient une sorte d'étendue nombre ; tandis que chez Euclide la pensée est essentiellement géométrique : on n'obtient des propositions d'arithmétique qu'en appliquant les résultats géométriques généraux des démonstrations au cas où les longueurs seraient mesurées par des nombres entiers ; les propriétés des nombres ne se voient qu'à travers des propriétés géométriques.

Astronomie. — La tradition fait remonter à Pythagore, nous l'avons dit, la constitution de la *sphérique*, comme science géométrique du ciel. Quels problèmes traitait la sphérique ? Il est difficile de s'en faire une idée exacte. Le pythagoricien Archytas, au début d'un écrit sur la mathématique¹, dit : « Les mathématiciens nous ont clairement enseignés sur la vitesse des astres, sur les levers et les couchers. » — Pythagore donnait au ciel la forme d'une surface sphérique ; il était tout naturel qu'il se servît de la sphère pour représenter les parallèles décrits chaque jour par les fixes, en même temps qu'il essayait de construire la trajectoire des astres errants, c'est-à-dire surtout du soleil et de la lune.

1. Porphyre, *Sur les harmoniques de Ptolémée*.

G. MILHAUD. — *Philosophes-Géomètres*.

Le recueil d'Aetius¹ dit à propos du pythagoricien Alcméon : « Alcméon s'accorde avec les mathématiciens pour reconnaître aux planètes un mouvement d'occident en Orient opposé à celui des fixes. » — Cette distinction de plusieurs mouvements indépendants fut sans nul doute le point de départ de la sphérique pythagoricienne, et ce fut un de ses problèmes essentiels de tâcher d'expliquer la marche des planètes dans le ciel par une simple combinaison de mouvements circulaires. La question fondamentale de l'astronomie théorique était ainsi livrée aux mathématiciens, qui ne devaient cesser de la poursuivre jusqu'aux temps modernes.

Musique. — Jamblique raconte que Pythagore, entendant des forgerons frapper un morceau de fer sur une enclume, et reconnaissant dans les sons les intervalles de quarte, de quinte et d'octave, eut l'idée de peser les marteaux dont ils se servaient. Il aurait trouvé alors que celui qui rend l'octave en haut était la moitié du plus pesant ; que celui qui faisait la quinte en était les deux tiers et celui qui donnait la quarte, les trois quarts. Rentré chez lui, il aurait fixé une extrémité d'une corde et suspendu à l'autre des poids proportionnels à ces nombres, la corde aurait alors rendu des sons formant les mêmes intervalles. Ce récit est certainement inexact dans ses détails. Nous savons en effet que, pour pro-

1. Cf. P. Tannery, *Sc. hellène*, p. 204.

duire les sons indiqués avec une même longueur de corde, les poids suspendus devraient être proportionnels non pas aux nombres 2, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, mais à leurs carrés,

4, $\frac{9}{4}$, $\frac{16}{9}$. Ce sont les longueurs des cordes diffé-

rentes, tendues par des poids égaux, qui sont proportionnelles aux nombres eux-mêmes. C'est probablement ce que dut vérifier Pythagore. Prenait-il les

nombres dans l'ordre croissant $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, 1, pour

les sons de plus en plus bas, comme y conduisait naturellement la considération de la longueur des cordes ? ou bien prenait-il les nombres dans l'ordre inverse des longueurs des cordes, comme nous le faisons aujourd'hui, par considération des nombres de vibrations ? il est impossible de rien affirmer à ce sujet ; mais en tous cas le fait essentiel c'est que Pythagore le premier fit correspondre des nombres aux sons et constitua une théorie mathématique de la musique.

Il posa la notion de l'intervalle musical de deux sons dans le rapport des nombres correspondant à ces sons. L'excès de l'intervalle de quinte sur celui de quarte représentait pour lui le *ton*, égal par conséquent au rapport de $\frac{3}{2}$ à $\frac{4}{3}$, c'est-à-dire à $\frac{9}{8}$. — Remarquons en passant que c'est là le ton majeur de notre gamme moderne. —



Les anciens ne sentirent pas le besoin de faire jouer un rôle spécial à ce qui représente notre ton mineur, qui est l'intervalle $\frac{10}{9}$, tel que celui de mi à ré dans la gamme en ut. Enfin des insertions convenables de moyens termes donnaient aisément, pour les intervalles de la tonique à chaque note de la gamme jusqu'à l'octave :

$$1, \quad \frac{9}{8}, \quad \frac{81}{64}, \quad \frac{4}{3}, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{27}{16}, \quad \frac{243}{128}, \quad 2.$$

Remarquons que tous les intervalles de deux sons consécutifs sont égaux à $\frac{9}{8}$, sauf ceux du 3^e au 4^e son et du 7^e au 8^e, qui sont égaux à $\frac{256}{243}$, — au lieu de la valeur $\frac{16}{15}$ qui aujourd'hui représente le demi-ton majeur.

En outre des témoignages des commentateurs anciens, nous avons, pour nous éclairer sur tous ces points, le fameux passage du Timée où Platon veut que les parties composantes de l'âme du monde soient précisément proportionnelles aux nombres de la gamme¹ : il n'y a pas à douter que la théorie musicale ainsi exposée par Timée ne doive remonter aux Pythagoriciens.

Quant à leur méthode, si, comme le veulent Macrobe

1. Voir le commentaire du Timée de Th. Martin.

et Jamblique, c'est bien vraiment l'expérience qui les conduisit aux premiers nombres, pour les intervalles de quarte, de quinte et d'octave, et quelques autres, les témoignages sont unanimes à représenter l'École comme exclusivement attentive à l'étude des nombres eux-mêmes. Par là elle s'oppose dans l'antiquité à l'école empirique d'Aristoxène qui demande à l'oreille seule de déterminer les fractions de cordes donnant les différents sons, et n'admet même pas qu'elles soient mesurables par des nombres.

Ce résumé fort incomplet assurément suffit à donner une idée de l'œuvre gigantesque qui fut accomplie par les Pythagoriciens. La science rationnelle était définitivement fondée, et, par la mathématique, s'offrait à la pensée théorique et spéculative une ressource désormais inépuisable.

2^o Les Concepts.

Une idée essentielle se détache de tout ce que l'antiquité nous dit des philosophes pythagoriciens : ils voient dans le *nombre* le principe des choses. Οἱ καλούμενοι Πυθαγόρειοι τῶν μαθημάτων ἀψάμενοι πρῶτοι ταῦτα προήγαγον καὶ ἐντραφέντες ἐν αὐτοῖς τὰς τούτων ἀρχὰς τῶν ὄντων ἀρχὰς ὤρίθησαν εἶναι πάντων..... dit en particulier Aristote (*Met.*, I, 5). En vérité y-t-il lieu d'en être surpris?

Comme géomètres d'abord ne furent-ils pas conduits

à noter cette chose merveilleuse que toutes les propriétés d'étendue et de forme pouvaient s'exprimer en propriétés de nombres ? Cela nous semble banal aujourd'hui, mais n'y avait-il pas là de quoi inspirer à ces hommes d'autrefois un étonnement et une admiration sans limite ? Songez à une figure formée de points, de droites et de courbes. Toutes les propriétés intuitives, le fait que tel point est intérieur ou extérieur à tel cercle, le fait que ce cercle coupe ou non cette droite, le fait que ces cercles se coupent, ou ne se coupent pas, ou se touchent, bref tout ce que l'imagination pourra énumérer de qualités concrètes offertes à l'intuition par cette figure, tout cela peut se remplacer, dans la pensée du géomètre, par des nombres qui représentent des distances. Soit encore cet exemple plus précis : la propriété générale des triangles rectangles. Voilà un fait relatif à l'écartement de deux côtés d'un triangle, celui qu'on exprime en disant qu'ils sont perpendiculaires l'un sur l'autre, ou qu'ils forment ensemble un angle droit. Comment le géomètre parvient-il à le traduire ? Il énonce simplement une relation entre les nombres qui représentent les trois côtés : le carré de l'un de ces nombres est égal à la somme des carrés des deux autres. Si le triangle est rectangle, cette relation existe : et réciproquement si elle existe, le triangle est rectangle. En d'autres termes, la relation arithmétique *équivalait* à la propriété intuitive qu'elle implique l'angle droit.

Alors

Et il faut bien comprendre ce qui dans tout cela pouvait exciter l'admiration des premiers géomètres. Que le nombre s'introduise aisément pour la mesure des quantités spécifiquement distinctes que découvre l'intuition spatiale, longueurs, angles, surfaces, volumes, etc., cela est intéressant, mais n'est certes pas pour confondre la pensée : les éléments géométriques, par leur simplicité, s'adaptent d'une façon particulière aux notions d'égalité et d'addition qui autorisent l'application du nombre à chacun d'eux. Mais il y a plus. Dès leurs premiers travaux, les Pythagoriciens se trouvent énoncer des propositions, qui ne gardent plus la trace de l'origine concrète des quantités spécifiquement diverses, d'où par conséquent la différenciation qualitative a tout à fait disparu, où l'hétérogénéité de l'intuition sensible s'est effacée devant le nombre pur. Voilà ce qui dut provoquer chez eux l'étonnement le plus profond, et leur suggérer déjà cette pensée que les déterminations des corps touchant la figure et la forme ont leur explication dernière dans le nombre.

La même impression se dégageait pour eux de cette remarque que l'arithmétique et la géométrie pouvaient se substituer l'une à l'autre dans leur marche parallèle. En fait, nous l'avons dit, l'arithmétique des Grecs ne s'est pas séparée dans ses démonstrations de l'intuition géométrique. C'est donc dans tout leur développement que marchant côte à côte, et se prêtant sans

cesse un mutuel concours, la science des nombres et celle des figures et des formes rappelaient au mathématicien grec l'étroite parenté de leurs objets. Les historiens de la mathématique grecque ont à un si haut degré le sentiment qu'elle ne séparait pas au fond ces deux domaines, qu'ils n'hésitent pas en général à lui attribuer la solution de certains problèmes arithmétiques, quand elle correspond à des problèmes géométriques connus. Par exemple, les constructions auxquelles donnait lieu le problème des aires peut nous faire légitimement supposer que les Pythagoriciens savaient calculer deux nombres dont on connaît la somme ou la différence en même temps que le produit.

Mais leur science dépassait déjà les limites du monde géométrique pur. Elle s'étendait, nous l'avons vu, au mouvement des astres et à la théorie des sons musicaux. D'une part donc ils entrevoyaient la possibilité de ramener à la géométrie, c'est-à-dire au nombre, les phénomènes de l'ordre immuable et divin, de trouver par le nombre l'explication des mystères célestes. D'autre part, ils atteignaient par leur théorie mathématique des intervalles et des accords jusqu'au plus profond de l'âme humaine, jusqu'aux sensations d'harmonie musicale. Et partout où le nombre s'introduisait, partout la lumière se faisait avec lui, les théories se constituaient, la science pénétrait jusqu'au fond le plus caché des choses. Si les Pythagoriciens ont été confon-

du devant le pouvoir merveilleux de cet élément qu'est le nombre, s'ils y ont vu la raison suprême de tout ce qui nous apparaît dans ce monde, comment en serions-nous étonnés ?

Mais ils ne se contentent pas de proclamer l'importance considérable qu'il faut attribuer au nombre dans la formation de la connaissance ; ils ne se contentent pas d'en parler comme d'une notion fondamentale pour la science de l'univers ; ils y voient *une essence réalisée*. Le témoignage d'Aristote sur ce point est en effet trop précis pour que le moindre doute subsiste. Nous pouvons même ajouter, que le nombre n'est pas pour les Pythagoriciens une réalité transcendante, extérieure aux choses qui se modéleraient sur lui ; il est immanent. Ils parlent bien, à la vérité, d'imitation, *μίμνησις*, mais l'affirmation, plusieurs fois répétée par Aristote, que le nombre n'est pas séparé (*χωριστὸς*), donne à cette imitation un sens spécial : c'est plutôt une sorte de reflet extérieur d'une réalité interne. Il est difficile d'ailleurs d'éclairer avec quelque précision le rapport où sont les choses à l'égard de leur premier principe. Au fond, sauf la cause motrice, il est facile d'y retrouver toutes les formes de la relation causale.

Avant tout sans doute le nombre est la *raison d'être*, et c'est probablement en songeant aux Pythagoriciens qu'Aristote cite plusieurs fois le rapport de deux à un

comme la cause de l'octave. D'une façon plus générale et plus complète, le nombre est cause formelle, et son rôle se comprend mieux, si l'on envisage, comme dit Aristote, le tout, la synthèse et la forme, τότε ὅλον καὶ ἡ σύνθεσις καὶ τὸ εἶδος, et si l'on y associe l'idée de la fin et du bien, τὸ τέλος καὶ τ' ἀγαθόν. Grâce au nombre en effet, l'ordre et l'accord sont réalisés dans les choses : le nombre est principe d'harmonie. C'était là d'ailleurs pour les Pythagoriciens une façon de généraliser l'impression qui se dégageait de toutes les applications du nombre. S'il conduisait partout à une science plus parfaite, n'était-ce pas qu'il apportait avec lui l'unité, la similitude, l'homogénéité, là où apparaissaient d'abord le multiple et le dissemblable ? En géométrie il faisait s'effacer l'hétérogénéité des formes devant sa pureté abstraite. En astronomie, il substituait l'ordre et la simplicité à toutes les irrégularités apparentes des mouvements des astres. En musique, il fondait l'accord des contraires, de l'aigu et du grave, du rapide et du lent, pour la plus grande joie de l'âme. Partout il créait l'harmonie, si, comme le dit Philolaüs, celle-ci est « l'unité du multiple et l'accord du discordant ».

Mais d'autre part le nombre est aussi cause matérielle. Que faut-il entendre par là ? Tout d'abord nous devons dire quelques mots d'une conception qui semble avoir joué un rôle important dans la pensée mathématique des Pythagoriciens, et qui permettrait peut-

être de comprendre comment le nombre pouvait être à leurs yeux cause matérielle.

Aristote dit (Met., II, 6) qu'il y a lieu de distinguer deux sortes d'unités, l'unité indivisible et sans position, *ἄθετον*, qui s'appelle *monade*, et l'unité indivisible également mais ayant une position, *θέσιν ἔχον*, le *point*. Puis, dans un certain nombre de passages, on voit clairement que cette deuxième façon de concevoir l'unité des nombres arithmétiques appartient aux Pythagoriciens. C'est ainsi, par exemple, qu'à propos des nombres dont les Pythagoriciens font la substance du ciel tout entier, Aristote insiste sur ce que ces nombres ne sont pas monadiques, leurs unités ont une grandeur [*καὶ οἱ Πυθαγόρειοι δ' ἓνα τὸν μαθηματικόν (ἀριθμόν) πλὴν οὐ κεχωρισμένον ἀλλ' ἐκ τούτου τὰς αἰσθητὰς οὐσίας συνεστάναι φασίν· τὸν γὰρ ὅλον οὐρανὸν κατασκευάζουσιν ἐξ ἀριθμῶν, πλὴν οὐ μοναδικῶν, ἀλλὰ τὰς μονάδας ὑπολαμβάνουσιν ἔχειν μέγεθος... Μοναδικοὺς δὲ τοὺς ἀριθμοὺς εἶναι πάντες τιθέασι, πλὴν τῶν Πυθαγορειῶν, ὅσοι τὸ ἐν στοιχείῳ καὶ ἀρχὴν φασίν εἶναι τῶν ὄντων· ἐκεῖνοι δ' ἔχοντας μέγεθος, καθάπερ εἴρηται πρότερον.* (Met., M, 6, 1080, b)].

Il faut évidemment voir dans l'unité qui a une grandeur, à l'opposé de la monade, c'est-à-dire de l'*ἄθετον*, l'élément qui a une position, et qu'Aristote avait déjà nommé le point. Le fait d'avoir une position, et, par conséquent, d'occuper une place dans l'espace, équivaut pour Aristote à celui d'avoir une grandeur :

et c'est alors cette propriété caractéristique de l'unité non monadique qui fournit au Stagirite son principal argument contre les Pythagoriciens. [ὅπως δὲ τὸ πρῶτον ἐν συνέσσει ἔχον μέγεθος, ἀπορεῖν ἐοίκασι. (M. 6, 1080, b). — τὸ δὲ τὰ σώματα ἐξ ἀριθμῶν εἶναι συγκείμενα, καὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον εἶναι μαθηματικόν, ἀδυνατὸν ἐστίν· οὔτε γὰρ ἄτομα μεγέθη λέγειν ἀληθές. (M, 8, 1083, b)]. Ainsi le témoignage d'Aristote suffirait à révéler chez les Pythagoriciens une curieuse conception suivant laquelle les nombres sont des collections d'unités ayant une position, occupant une place dans l'espace. Le souvenir de leur méthode de démonstration arithmétique apporte à ce témoignage une confirmation très nette. Nous avons montré sur quelques exemples les caractères de l'intuition spatiale qui sert de fondement à leurs considérations mathématiques : les propriétés numériques se dégagent de certaines figures planes formées de lignes de points, du moins pour ce qui concerne les nombres plans, triangulaires, rectangles, carrés, ... La fusion de l'arithmétique et de la géométrie semblait ainsi se réaliser au prix d'une dissociation, d'une décomposition de l'étendue en atomes d'espace. Les lignes étaient des suites de points, les surfaces des suites de lignes, les volumes des suites de surfaces. Toute figure géométrique consistait *matériellement* en un nombre, s'il fallait entendre par là un ensemble de ces unités points.

Quant aux corps sensibles eux-mêmes, αἰσθητὰ οὐκ αἰσῖ, sont-ils bien éloignés des formes géométriques dans la pensée des Pythagoriciens ? N'est-il pas permis de dire que la distance qui sépare la portion d'étendue du corps qui la remplit n'est rien près de celle qui semblait séparer l'étendue du nombre pur ? Entre celui-ci et la matière visible et tangible, l'intuition sensible est l'intermédiaire naturel. C'est pourquoi il est peut-être aisé de comprendre que le nombre, étant l'élément constitutif du solide géométrique, le soit également du corps sensible. L'atomisme nouveau qu'exposera un jour Platon dans le *Timée*, et qui se rattache évidemment aux tendances pythagoriciennes, est fait pour justifier ces réflexions par son double caractère géométrique et physique.

Une objection toute naturelle pourrait se présenter au nom de l'incommensurabilité des longueurs. Il est clair que si chaque ligne est constituée par un nombre d'unités points, le rapport de deux lignes sera toujours celui de leurs nombres, et il est impossible qu'elles soient jamais incommensurables. Dès lors, comment les Pythagoriciens, qui ont démontré l'incommensurabilité du côté et de la diagonale du même carré, auraient-ils pu concevoir l'atomisme spatial que nous leur attribuons ? — Pour comprendre que ce ne fut pas là un obstacle sérieux, il faut tenir compte du caractère tout exceptionnel qu'offrit pour eux la relation qu'ils

avaient découverte. Certes ce dut être à leurs yeux une monstruosité, mais elle se présentait dans un cas tout particulier, absolument isolé; et il est naturel d'admettre qu'elle ne fut pas suffisante à ébranler leur croyance à l'ordre universel. Car c'est bien d'ordre et de désordre qu'il s'agit ici pour eux. L'ordre marqué par la présence du nombre est tout à coup détruit dans cette circonstance étrange où il n'existe plus de rapport numérique entre deux grandeurs. Pour ne pas rendre compte d'un cas exceptionnel, les Pythagoriciens ne pouvaient renoncer à leurs postulats fondamentaux. L'idée ne leur vint certainement pas que les vitesses des astres, ou les grandeurs de leurs trajectoires, ou plus généralement les circonstances mathématiques des mouvements célestes risquaient de donner lieu elles aussi à quelque incommensurabilité, à quelque absence de nombre; ils ne mirent pas en doute que les longueurs des cordes vibrantes, qui intéressent le théoricien de l'harmonie, soient toujours dans des rapports numériquement exprimables. Il ne faudra rien moins, pour ébranler les représentations naïves des premiers Pythagoriciens, que l'élaboration du concept du continu mathématique, élaboration qui se fera simultanément sous l'influence de la pensée éléatique, et par les progrès naturels de la géométrie.

Aristote d'ailleurs suggère une deuxième façon d'entendre le nombre comme constituant matériellement

les choses. Il dit que les éléments du nombre sont eux-mêmes les éléments des choses [τὰ τῶν ἀριθμῶν στοιχεῖα τῶν ὄντων στοιχεῖα πάντων ὑπέλχον εἶναι... M, A, 5, 986 a]; et plus loin il nomme ces éléments le pair et l'impair, le fini et l'infini. [τοῦ δὲ ἀριθμοῦ (νομίζουσι) στοιχεῖα τὸ τε ἄρτιον καὶ τὸ περιττόν, τούτων δὲ τὸ μὲν πεπερασμένον τὸ δὲ ἄπειρον...] Ce sont là les premières oppositions qu'aurait formulées l'École pour désigner les principes contraires dont les choses sont constituées. Nous devons nous arrêter sur la signification de ces éléments premiers des corps; mais, autant pour jeter sur eux quelque lumière que pour éclaircir la fameuse question des oppositions pythagoriciennes, citons tout de suite la série de ces oppositions, telle que la donne Aristote, et telle qu'elle se rapporte vraisemblablement dans son ensemble aux adeptes du v^e siècle, les deux premières seules appartenant à tous les Pythagoriciens : *fini, infini*; *impair, pair*; *unité, multiplicité*; *à droite, à gauche*; *mâle, femelle*; *repos, mouvement*; *droit, courbe*; *lumière, obscurité*; *bon, mauvais*; *carré, hétéromèque*¹.

Il n'y a pas lieu d'insister sur l'opposition pair-impair. On peut d'ailleurs donner un sens concret à cette distinction en voyant dans le nombre pair les unités

1. ἕτεροι δὲ τῶν αὐτῶν τούτων τὰς ἀρχὰς δέκα λέγουσιν εἶναι τὰς κατὰ συστοιχίαν λεγομένας, πέρας καὶ ἄπειρον, περιττόν καὶ ἄρτιον, ἓν καὶ πλῆθος, δεξιόν καὶ ἀριστερόν, ἄρρεν καὶ θῆλυ, ἡρεμοῦν καὶ κινούμενον, εὐθύ καὶ καμπύλον, φῶς καὶ σκότος, ἀγαθόν καὶ κακόν, τετραγώνον καὶ ἑτερομήκες. [M, A, 5, 986 a].

rangées deux à deux, tandis qu'il ne peut en être ainsi dans le nombre impair ; ou encore en partageant la file des unités du premier nombre en deux moitiés exactement symétriques, tandis que le nombre impair offrira deux files semblables mais séparées par une unité centrale. De quelque façon qu'elle se reflète dans l'image fournie par l'ensemble des unités, la parité des nombres est la propriété la plus manifeste par laquelle ils se distinguent les uns des autres.

De cette opposition se trouve toujours rapprochée celle du *πέρας* et de l'*ἄπειρον*. D'abord quel est le sens de ces mots ? Le premier désigne la limite, le second l'absence de limite ; ils se correspondent donc comme limité, fini, et illimité, infini. Mais la limite est le terme d'une variation ; ces mots désignent donc aussi le déterminé, le fixe, le constant, opposé à l'indéterminé, au variable. Ces significations qui sont séparées par des nuances s'ajoutent d'ailleurs tout naturellement. Le *πέρας* sera le principe de limitation, de détermination, de fixité ; l'*ἄπειρον* au contraire sera le principe de variation sans limite. Ces distinctions sont d'une application constante en mathématique, suivant la nature des conditions par lesquelles on essaie de définir un nombre. Un nombre qui doit seulement satisfaire à la condition de surpasser 10 n'est pas déterminé, puisque la suite infinie des nombres à partir de 11 répond à la question. Le nombre considéré n'a pas de limite, sa

valeur pourra varier à l'infini. Que l'on envisage au contraire le nombre qui augmenté de 10 doit reproduire 25 ; il est clair que la définition est précise et ne comporte aucune variation. De même nous reconnaitrons les caractères du *πέρας* à un triangle dont on donne les angles et un côté, ou à un rectangle dont l'aire est connue en même temps que son périmètre ; et au contraire nous déclarerons indéterminé et variable à l'infini un système de trois nombres entiers pouvant servir de côtés à un triangle rectangle....

Mais dans quel sens les Pythagoriciens rapprochaient-ils la distinction *πέρας-ἄπειρον*, de l'autre *περιττόν-ἄρτιον* ? Tout d'abord il importe de remarquer que, suivant Aristote lui-même (*Phys.*, III, 4), c'est le *πέρας* qui correspond au *περιττόν*, et l'*ἄπειρον* à l'*ἄρτιον*. Quel rapport pouvait-il donc y avoir entre le principe de détermination et le fait pour un nombre d'être *impair*, — ou d'autre part entre *le pair* et l'absence de fixité et de limite ?

La plupart des commentateurs, Alexandre d'Aphrodisias, Simplicius, Philopon, Thémistius, font remarquer que le nombre pair est divisible exactement en deux moitiés tandis que le nombre impair ne l'est pas. La division est immédiatement impossible dans le cas du nombre impair, tandis qu'elle est possible une première fois et a des chances de se continuer ensuite, si le nombre est pair. Zeller, qui semble adopter cette

étrange explication, dit lui-même : « Ils (les Pythagoriciens) identifiaient l'impair avec le limité, le pair avec l'illimité, parce que l'impair met un terme à la division par deux, ce que ne fait pas le pair. » On imaginerait difficilement une affirmation plus incompréhensible. Le nombre pair se prête à une division par deux, mais nullement à une suite illimitée de pareilles divisions.

Théon de Smyrne qui se rattache, comme on sait, à la tradition pythagoricienne, observe que la première idée de l'impair est dans l'unité, comme celle du pair est dans la dyade indéfinie, et que d'ailleurs on rattache l'impair, dans le monde, à ce qui est défini et ordonné (τῷ ὀρισμένῳ καὶ τεταγμένῳ), tandis qu'on rattache le pair à ce qui est indéfini, inconnu et désordonné (τῷ ἀορίστῳ καὶ ἀγνώστῳ καὶ ἀτάκτῳ)¹. Mais pourquoi ce rapprochement ? pourquoi le nombre *deux* est-il appelé dyade indéfinie et est-il principe de multiplicité et de désordre ? Si Théon ne sent pas le besoin de l'expliquer, c'est qu'il se souvient de Platon, et, sans aller jusqu'à Platon, les oppositions qui suivent les deux premières sur la liste d'Aristote feront correspondre à l'impair l'un, et aussi le bien, tandis qu'elles mettront le multiple et le mal du côté du pair. Mais n'oublions pas que les deux premières oppositions sont les plus anciennes et qu'elles

1. Édition Dupuis, Hachette, p. 34.

semblent avoir été inséparables avant que les autres fussent formulées. La difficulté reste donc entière ; il faut trouver le lien direct qui fit rapprocher les termes d'impair et de déterminé, comme ceux de pair et d'infini.

On peut pour cela se laisser guider par Aristote lui-même. Après avoir dit (Phys., III, 4) que les Pythagoriciens assimilent le pair à l'infini, parce que le pair communique le caractère d'infini aux choses où il a pénétré, il ajoute ces mots significatifs : « σημεῖον δ' εἶναι τοῦτου τὸ συμβαίνειν ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν· περιτιθεμένων γὰρ τῶν γνωμόνων περὶ τὸ ἓν καὶ χωρὶς ὅτε μὲν ἄλλο αἰεὶ γίγνεσθαι τὸ εἶδος, ὅτε δὲ ἓν. » Ainsi, à propos de l'identification du pair et de l'infini, c'est-à-dire à propos de la question qui nous préoccupe, Aristote demande des éclaircissements à des considérations arithmétiques : on reconnaît qu'il s'agit de formations de nombres à l'aide de gnomons successifs, formations conduisant tantôt à une figure qui reste une, tantôt à une figure qui varie toujours. Enfin ne faut-il pas voir dans les mots περιτιθεμένων περὶ τὸ ἓν καὶ χωρὶς l'indication de deux procédés dont l'un au moins est donné avec précision (les gnomons entourant l'unité)? Les mots καὶ χωρὶς nous semblent signifier : « et autrement », c'est-à-dire « autrement qu'autour de l'unité ». La fin de la phrase exige, pour être claire, qu'il s'agisse de deux constructions distinctes. L'une est celle qui consiste à disposer les gnomons autour de l'unité, et l'autre s'obtient par une disposition différente

de gnomons¹. En tous cas, l'idée d'Aristote n'est pas douteuse. Il a en vue deux constructions : la première (fig. 7) qui fournit une figure *une*, c'est la formation

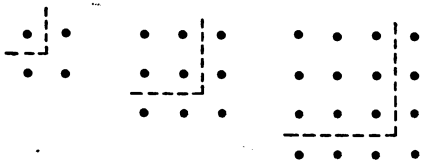


FIG. 7.

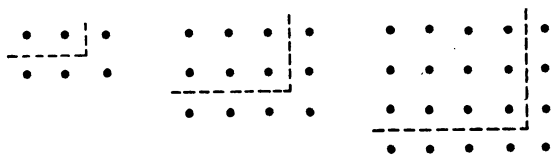


FIG. 8.

de carrés par la disposition en gnomons des impairs

1. Les mots καὶ χωρὶς ont fort embarrassé les anciens commentateurs. Quelques-uns comprennent : « avec disposition de gnomons et *sans gnomons*. » Certains même, comme Alexandre, précisent davantage, en distinguant la méthode géométrique par description de figure, et la méthode arithmétique. Zeller se range à une explication de ce genre, elle nous paraît invraisemblable, car la fin de la phrase, ὅτε μὲν, ... ὅτε δὲ..., indique qu'il s'agit de deux constructions de figures. — Un Scholiaste (cf. Brandis, *Cod. Reg.*, 1047) propose de voir dans les expressions d'Aristote une sorte de formule d'abréviation, résumant l'énonciation distincte de deux procédés : χωρὶς περὶ θεμένων τῶν περιττῶν γωμόνων ἐν τοῖς τετραγώνοις καὶ χωρὶς τῶν ἀρτίων γωμόνων ἐν τοῖς ἑτερομήχεσιν. Cette explication est très vraisemblable si l'on songe que souvent, à la lecture d'Aristote, on a l'impression qu'on se trouve devant des notes de quelque auditeur résumant d'un mot un développement connu. Elle a au moins l'avantage d'être claire, et est tout à fait d'accord pour le fond avec notre interprétation.

successifs ; — la seconde (fig. 8), qui conduit à une figure toujours *autre*, est la formation des hétéromèques par l'addition des nombres pairs.

D'une part, quelle que soit la grandeur de la figure, elle demeure un carré ; d'autre part, chaque rectangle nouveau a une unité de plus pour chacun de ses côtés ; ceux-ci continuent à différer de un ; autrement dit, si l'un est n , l'autre est $n + 1$. Or le rapport de ces deux

côtés $\frac{n}{n+1}$ varie constamment, de sorte que le rec-

tangle ne reste pas semblable à lui-même : il devient toujours *autre*. Ainsi les nombres impairs donnent une forme invariable, déterminée, fixe, le carré ; les nombres pairs donnent des formes qui changent indéfiniment. Et c'est si bien là le rapport que les Pythagoriciens ont tout d'abord saisi entre l'ἄρτιον et l'ἄπειρον, le περιττόν et le πέρως, que la dixième opposition citée par Aristote ne sera autre chose que celle du carré et de l'hétéromèque ; le carré répondant au πέρως et au περιττόν, l'hétéromèque à l'ἄπειρον et à l'ἄρτιον.

Une fois comprise l'identification des premiers termes, ce n'est pas seulement la dixième opposition qui se trouve par là expliquée ; chacune des autres apparaît avec plus de clarté. Quelque chose les dominera désormais, c'est la distinction si nette de ce qui reste *le même*, comme le carré, et de ce qui devient *autre*, comme l'hétéromèque. Le *même* et l'*autre*, ces

sortes de catégories fondamentales de la pensée platonicienne sont à quelque degré déjà dans la plupart des catégories pythagoriciennes, et déjà avec les caractères essentiels qu'ils auront chez Platon.

Qu'est-ce en effet d'abord que l'opposition de l'*un* et du *multiple*? Il faut entendre, en se reportant aux figures qui éclairent les premiers termes, « un dans sa forme », et « multiple dans sa forme ». D'un côté c'est la similitude, l'accord, l'harmonie de l'unité; de l'autre, le divers, le discordant, le variable de la multiplicité. Et par là nous voyons ce qu'il y avait de préoccupations esthétiques dans les catégories pythagoriciennes, même sans le témoignage de Théon de Smyrne, qui rattache, dans le monde, l'impair à l'ordre, et le pair au désordre.

Le *droit* et le *courbe* reproduisent sous une forme spéciale les idées du même et de l'autre. La ligne droite, écrira Euclide, est celle qui est située semblablement par rapport à tous ses points. On pourrait dire, sauf à énoncer une tautologie, que c'est la ligne de direction unique, tandis qu'en chaque point d'une courbe la direction change.

L'« à droite » et l'« à gauche » se ramènent sans doute encore à l'opposition du même et de l'autre par la considération des mouvements célestes. Les Pythagoriciens, nous l'avons vu, distinguaient de la rotation de la sphère des fixes le mouvement propre des planètes. Or le premier mouvement était régulier et uniforme,

le second irrégulier ; et enfin ils étaient de sens contraire, de sorte qu'ils correspondaient respectivement aux deux directions marquées par δεξιὸν et ἀριστερόν. Un observateur couché sur l'axe du monde, la tête vers le pôle nord, verrait tourner de gauche à droite, *vers la droite*, la sphère céleste ; tandis que le déplacement des astres errants se ferait *vers sa gauche*. Platon, dans le Timée, se conformera à la tradition pythagoricienne, quand il déclarera que le cercle de la nature du même (celui qui correspond à la sphère des fixes) tourne ἐπὶ δεξιᾷ, tandis que le cercle de la nature de l'autre (celui qui correspond au mouvement non régulier des planètes) tourne περὶ ἀριστερά [Timée, 36, C.].

Ces remarques nous conduisent tout naturellement à l'opposition du *repos* et du *mouvement*. Si nous prenions ces termes dans leur sens précis, nous n'aurions peut-être pas grand'peine à les rapprocher des premiers. On peut bien appeler immobile ce qui est déterminé, fixe, arrêté, limité, invariable ; et au contraire l'indétermination, la variation sont l'image naturelle du mouvement. La figure qui reste indéfiniment un carré donne l'impression de l'immobilité, par l'identité de la forme ; celle qui change constamment de forme, comme l'hétéromèque, donne l'impression d'un mouvement indéfini. Cela est tellement vrai que chez les Grecs, chez Platon notamment, nous voyons le même mot κίνησις employé pour le mouvement, au sens unique

où nous l'entendons aujourd'hui, c'est-à-dire déplacement dans l'espace, et aussi plus généralement pour toute espèce de changement d'état.

Mais d'ailleurs les mouvements célestes auxquels nous avons déjà fait allusion, et qui avaient certainement frappé les Pythagoriciens par leur opposition, suffiraient peut-être à expliquer la présence des termes repos et mouvement, comme correspondant à ceux de *δᾶξιόν* et d'*ἄριστερόν*. La sphère des fixes ne se déplace pas, car elle a son centre immobile ; et de plus sa rotation est uniforme. Or le mouvement circulaire uniforme d'une sphère autour d'un de ses diamètres pouvait réaliser un idéal de régularité, de stabilité, d'identité, qui, par opposition au déplacement irrégulier des planètes, peut relativement désigner le repos. Cela deviendra très frappant chez Platon qui, tout en attribuant le repos et l'immutabilité aux idées, reconnaîtra cependant le mouvement de l'intelligence précisément dans la rotation uniforme, dont il dit dans les lois (898) : *τὸ κατὰ ταῦτα δῆπου καὶ ὡσαύτως καὶ ἐν τῷ αὐτῷ καὶ περὶ τὰ αὐτὰ καὶ πρὸς τὰ αὐτὰ καὶ ἓνα λόγον καὶ τάξιν μίαν....*

On est peu surpris de voir la *lumière* et l'*obscurité* rangées l'une du côté du stable, de l'un, de l'uniforme, de l'harmonieux ; l'autre du côté de la variabilité infinie, de la multiplicité, du mouvement désordonné.....

Et enfin la gradation qui va de l'unité, de l'uniformité, de la régularité, du bien logique, intelligible, au bien

esthétique, à l'harmonie, aboutit au bien moral qui se trouve tout naturellement opposé au mal.

Ce rapide commentaire n'a laissé de côté que les termes *mâle*, *femelle*. Il y a certainement dans les idées qu'ils expriment et qu'il faut rapprocher respectivement du *πέραις* et de l'*ἄπειρον* un souvenir de la pensée ionienne. Le sens que nous avons donné jusqu'ici à l'*ἄπειρον* pythagoricien ne rappelait pas assez ce qu'il y avait de qualitatif dans ce même concept chez Anaximandre et Anaximène. Et pourtant l'évolution de ce concept avait dû être continue depuis les premiers Milésiens jusqu'aux Pythagoriciens qui formulèrent les dix oppositions. Cet élément plus ou moins vague, fluide, source de toutes qualités était destiné à devenir la matière indéterminée de Platon, et même jusqu'à un certain point celle d'Aristote ; mais bien avant eux il se complétait par un principe de spécification, de limitation, de consolidation, le *πέραις*. Et les choses en général, l'univers dans son ensemble en particulier, devaient résulter de la pénétration du premier élément par le second. De là la dénomination naturelle de mâle et de femelle, qui du reste se retrouvera chez Platon : καὶ δὴ προσειχάσαι πρέπει τὸ μὲν δεχόμενον μητρί, τὸ δ' ὄθεν πατρί... (Timée, 50, D.).

Si nous avons retrouvé chez les Pythagoriciens un écho de la physique milésienne, ce qui se dégage surtout peut-être des considérations qui précèdent, c'est

à quel point ils préparent la pensée platonicienne. Ils ont soulevé déjà ce problème, qui dominera la philosophie de Platon, de l'un et du multiple. Mais, ne nous y trompons pas, ç'a été au fond pour sacrifier l'un au multiple, et ne voir dans le premier qu'une sorte de résultante du second. Le nombre est principe d'ordre et d'harmonie; mais par lui-même il est essentiellement pluralité, multiplicité. Les Éléates vont par une thèse hardie et une habile dialectique obliger l'esprit à réfléchir sur l'insuffisance d'une pareille conception : ils seront puissamment aidés par l'évolution naturelle de la mathématique, sur laquelle peut-être leur attachement au continu n'aura pas été sans influence ; et, après eux, nous nous sentirons décidément plus près de comprendre Platon¹.

1. La pensée philosophique des Pythagoriciens, qui s'est dégagée de la considération du nombre et de son rôle dans le monde, n'a-t-elle ainsi abouti qu'à des concepts dont nous puissions raisonnablement rendre compte ? — Non, sans doute. Il est impossible de nier qu'ils ont formulé sur la signification de certains nombres des assertions tout à fait étranges. La décade semble avoir eu à leurs yeux une importance spéciale, qui les amena en particulier à affirmer l'existence d'un dixième corps céleste, l'antichtone, en outre du feu central, de la terre, et des sept astres errants. Sans entrer dans les détails de cette sorte de mysticisme arithmétique, remarquons d'une part la difficulté qu'il y a pour nous à distinguer, sur de pareilles questions, ce qui fut la pensée des vrais savants, des chefs de l'École, et ce qui ne fut au contraire que l'écho de cette pensée dans un public plus accessible aux extravagances de l'imagination. Observons ensuite la facilité avec laquelle l'esprit humain d'une façon générale est disposé à donner une mystérieuse signification aux nombres. Nous en avons des témoignages pour les peuples les plus anciens ; et de nos jours, dans notre temps de science et de critique, qui oserait affirmer que nous sommes complètement affranchis de la superstition du nombre ?