

1279
Phil., C.
1985

ΧΡΙΣΤΙΝΑ ΦΙΛΗ, 'Αθήναι

Phil C., *Pythagoras, Archimedes and Indian mathematical theories*

ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ, ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ ΚΑΙ ΙΝΔΙΚΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΘΕΩΡΙΕΣ

Πυθαγόρας - S ā m k h y a

Γιὰ πολὺν καιρὸ τὰ ταξίδια τοῦ Πυθαγόρα ἀποτελέσαν ἓνα ἀνεξάντλητο καὶ ἐλκυστικὸ θέμα γιὰ τοὺς βιογράφους του¹.

Ὅμως ὅσο κι ἂν οἱ ἀναφορὲς τῶν βιογράφων τοῦ γιὰ τὰ ταξίδια² δὲν ἔχουν ἀπόλυτη ἱστορικὴ ἀξία, δὲν πρέπει νὰ περάσει ἀπαρατήρητη ἡ ἐπίδραση τῆς Ἀνατολῆς στὴν Πυθαγόρεια Διδασκαλία.

Ἰσως ἀκόμη τὰ ταξίδια τοῦ Πυθαγόρα «νὰ ἐξηγοῦν» τὴν ἀπόκτηση τῆς γνώσης τοῦ καὶ τῆς θαυμαστῆς ἐπιστημονικῆς τοῦ κατάρτισης³.

Σύμφωνα μὲ τὴ βιογραφία τοῦ Ἰαμβλίου, ὁ Πυθαγόρας ἔμεινε εἰκοσι-
δύο χρόνια μὲ τοὺς ἱεροφάντες τῆς Αἰγύπτου⁴, καὶ ὅταν ὁ Καμβύσης, βασι-
λιάς τῆς Περσίας, κατέλαβε τὴν Αἴγυπτο, «εἰς Βαβυλῶνα ἀνήχθη, κάκει τοῖς
Μάγοις ἀσμένους συνδιατρίψας καὶ ἐκπαιδευθεὶς τὰ παρ' αὐτοῖς σεμνὰ καὶ

1. Τρεῖς εἶναι οἱ βιογραφίες τοῦ Πυθαγόρα ποὺ διασώθηκαν: τοῦ Ἰαμβλίου, τοῦ Πορφυρίου καὶ τοῦ Διογένη τοῦ Λαερτίου. Βλ. Iamblich, *De Vita Pythagorica*, Teubner L. Leipzig 1937. Porphyrii, *Opuscula Selecta*, A. Nauck 2e Auflage, Leipzig 1886. Diogenis Laertius, *Vitae Philosophorum*, ed. Long H. S. 2 vol. Oxford 1964.

2. Βλ. F. Wehrli, *Die Schule des Aristoteles*, 10 Hefte, Basel 1944-1960. 2e H. Aristoxenos fr. 13. 1945 καὶ J. Bidez & Cumont F., *Les Mages Hellénisés*, Paris 1938.

Ἀκόμη βλ. Is. Lévy, *Les Sources de la légende de Pythagore*, Paris 1926.

3. P. Gorman, *Pythagoras. A Life*, London 1979.

4. «καὶ περὶ θεῶν πλέον τι ἔμαθεν...» Porph., *Vita Pyth.*, ed. Nauck «καὶ συμμίζαντα τοῖς Ἡλιπολίταις, ἐκπεμφθῆναι μὲν εἰς Μέμφιν, ὡς πρὸς πρεσβυτέρους, τῇ γ' ἀληθείᾳ σκεπτομένων τῶν Ἡλιπολιτῶν τὰ τοιαῦτα», ib. σελ. 16 l. 31.

«Καὶ ἐν Αἰγύπτῳ μὲν τοῖς ἱερεῤσι συνῆν καὶ τὴν σοφίαν ἐξέμαθε, καὶ τὴν τῶν Αἰγυπτίων φωνὴν γραμμάτων δὲ τρισσὰς διαφορὰς, ἐπιστολογραφικῶν τε καὶ ἱερογλυφικῶν καὶ συμβολικῶν τῶν μὲν κοινολογουμένων κατὰ μίμησιν, τῶν δὲ ἀλληγορουμένων κατὰ τινὰς αἰνιγμοῦς», ib. 13. 15. l. 18.

Ἐξ ἄλλου ἀπὸ τὸν Ἰάμβλιο μαθαίνουμε:

«Τὸν τῆς διδασκαλίας τρόπον συμβολικὸν ποιεῖν ἐπιχειρεῖ (ὁ Πυθαγόρας) καὶ πάντῃ ὅμοιον τοῖς ἐν Αἰγύπτῳ διδάγμασι καθ' ἃ ἐπαιδεύθη... Ὦνοντο δὲ δεῖν κατέχειν καὶ διασώζειν ἐν τῇ μνήμῃ πάντα τὰ διδασκόμενα καὶ μέχρι τούτου συσκευάζεσθαι τὰς τε μαθήσαι καὶ τὰς ἀκροάσεις, μέχρις ὅτου δύναται παραδέχεσθαι τὸ μανθάνον καὶ διαμνημονεύον· ὅτι ἐκεῖνός ἐστιν, ὃ δεῖ γινώσκειν, τοῦτο δὲ ὃ τὴν γνώμην φυλάσσειν· ἐτίμων γοῦν σφόδρᾳ τὴν

θεῶν θρησκείαν ἐντελεστάτην ἐκμαθὼν ἀριθμῶν τε καὶ μουσικῆς καὶ τῶν ἄλλων μαθημάτων ἐπ' ἄκρον ἐλθὼν παρ' αὐτοῖς ἄλλα τε δώδεκα ἔτη συνδιατρίψας, εἰς Σάμον ὑπέστρεψε, περὶ ἕκτον ποῦ καὶ πεντηκοστὸν ἔτος ἡδὴ γεγονώς⁵.

Μετὰ ἀπὸ μιᾶ σύντομη παραμονὴ στὴ Σάμο ταξίδεψε στοὺς Δελφούς, στὴ Δῆλο, στὴν Κρήτη, στὴ Σπάρτη «ὅθεν εἰς ἅπαντα τὰ μαντεῖα παρέλαβε, καὶ ἐν Κρήτῃ δὲ καὶ ἐν Σπάρτῃ τῶν νόμων ἕνεκα διέτριψε καὶ τούτων ἅπαντων ἀκροατῆς τε καὶ μαθητῆς γενόμενος, εἰς οἶκον ἐπανελθὼν ὥρμησεν ἐπὶ τῶν παρελελειμμένων ζητήσιν⁶.

Ὡρμος πὰ καταλήγει στὸν Κρότωνα τῆς Κάτω Ἰταλίας, ὅπου ἱδρύει καὶ διευθύνει τὴν Σχολή του.

Παρὰ τὴ μυστικότητα⁷ ποὺ περιέβαλλε τὴν Διδασκαλία τῆς Σχολῆς τοῦ καὶ τὴν ἔλλειψη γραπτῶν κειμένων τοῦ ἴδιου τοῦ ἱδρυτῆ⁸, πέρασαν στὴν δημοσιότητα ὁρισμένα σημεῖα τῆς Πυθαγόρειας Διδασκαλίας⁹, ὅπως:

1. Ἡ Πυθαγόρεια Διδασκαλία τῶν ἀρρήτων ἀριθμῶν.

Κατὰ τὸν Πρόκλο¹⁰, ἡ ἀνακάλυψη τῶν ἀσυμμέτρων ὀφείλεται στὸν Πυθαγόρα. Σήμερα ἡ ἀνακάλυψη τῶν ἀρρήτων ἀριθμῶν καὶ ἰδιαίτερα τῆς √ 2

μνήμη καὶ πολλὴν αὐτῆς ἐποιοῦντο γυμνασίαν τε καὶ ἐπιμέλειαν, ἐν γὰρ τῷ μανθάνειν οὐ πρότερον ἀφίεντες τὸ διδασκόμενον ἕως περιλάβοιεν βεβαίως ἐπὶ τῆς πρώτης μαθήσεως». Iambli., *De Vita Pyth.*, σελ. 164.

5. Iambli. *De Vita Pythagorica*, I.1 Cap. IV § 19. Ὁ Ἰσοκράτης ἐξ ἄλλου ἀναφέρει ὅτι ὁ Πυθαγόρας ἐπισκέφθηκε τὴν Αἴγυπτο καὶ ἐγίνε μαθητῆς τῶν ἱερέων. Βλ. H. Diels & W. Kranz, op. cit., 14.4. Γιὰ μιὰ συστηματικὴ μελέτη τῶν ταξιδιῶν τοῦ Πυθαγόρα βλ. τὸ ἄρθρο τοῦ Th. Höpfer: «Orientalische und griechische Philosophie», *Beihefte zur Zeitschrift für vergleichende Religionsgeschichte*, 4. 1926.

6. Iambli., op. cit., I.1 cap. V § 25.

7. Βλ. E. Zeller and R. Mondolfo, *La Filosofia dei Greci*, Firenze I.1, 3e ed., 1951, 2. 404, n. 4.

Βλ. ἀκόμη Iambli., op. cit., 94.

8. Ὁ Διογένης ὁ Λαέρτιος ἀναφέρει ὅτι ὁ Πυθαγόρας δὲν ἄφησε κανένα σύγγραμμα. Βλ. Diogenis Laertius, *Vitae Philosophorum*, 2 Vols., Oxford 1964, 8. 6. Μόνο ὁ Ἡράκλειτος ἰσχυρίζεται τὸ ἀντίθετο. Βλ. Diels, op. cit., 22 B 129.

9. Ὅ,τι ἔγινε γνωστὸ σχετικὰ μὲ τὴ διδασκαλία καὶ τὴν ἔρευνα τοῦ Πυθαγόρα καὶ τῆς Σχολῆς τοῦ, τὰ πρῶτα ἑκατὸ χρόνια ἀπὸ τὴν ἱδρυση τῆς Σχολῆς, ὀφείλεται ἀρχικά στὸν Φιλόλαο, 400 π.Χ. Γιὰ περισσότερες λεπτομέρειες βλ. J. A. Philip, *Pythagoras and Early Pythagorism*, Toronto 1966.

Ἀκόμη βλ. τὸ ἔργο τοῦ Ed. Chaignet, *Pythagore et la philosophie pythagoricienne contenue dans les fragments de Philolaus et d'Archytas*, Ouvrage couronné par l'Institut, Paris 1873.

10. «ἐπὶ δὲ τούτοις Πυθαγόρας τὴν περὶ αὐτὴν (sc. τὴν γεωμετρίαν) φιλοσοφίαν εἰς

δὲν ἀποδίδεται ἀποκλειστικά στὸν Πυθαγόρα, ἀλλὰ στοὺς Πυθαγόρειους τοῦ Ε' αἰώνα π.Χ.¹¹. Φαίνεται ὅτι ἡ ἀνακάλυψη τῶν ἀρρήτων ἀριθμῶν κρατήθηκε μυστική ἀπὸ τὴν ἀδελφότητα τῶν Πυθαγορείων, καθὼς ἡ ὅλη δομὴ τῆς θεωρίας βασίστηκε στὴν ἔννοια τοῦ ρητοῦ ἀριθμοῦ¹². Ὁ ἄλλογος ἢ ἄρρητος ἀριθμὸς ἦταν κάτι ποὺ διατάρασσε τὴν ἁρμονία τοῦ ἀξιοματικοῦ τοῦ συστήματος. Χαρακτηριστικὴ εἶναι ἡ φράση τοῦ Φιλολάου: «Ψεῦδος δὲ οὐδὲν δέχεται ἢ τῷ ἀριθμῷ φύσις οὐδὲ ἁρμονία· οὐ γὰρ οἰκεῖον αὐτοῖς ἐστί. Τὰς τῷ ἀπείρῳ καὶ ἀνοήτῳ καὶ ἀλόγῳ φύσις τὸ ψεῦδος καὶ ὁ φθόνος ἐστί»¹³.

2. Ἡ Διδασκαλία τῶν πέντε στοιχείων - τῶν πέντε στερεῶν.

Ἀπ' ὅ,τι ἔχει περισωθεῖ φαίνεται ὅτι ὁ Πυθαγόρας γνῶριζε τὰ κανονικὰ πολυέδρα¹⁴ καὶ τὶς κατασκευές τους. Ὁ Πλούταρχος μᾶς ἀναφέρει τὶς ἀντι-

σχήμα παιδείας ἐλευθέρου μετέστησεν ἄνωθεν τὰς ἀρχὰς αὐτῆς ἐπισκοπούμενος καὶ ἄλλως τὰ θεωρήματα διερευνώμενος ὅς δὴ καὶ τὴν τῶν ἀλόγων πραγματείαν καὶ τὴν τῶν κοσμικῶν σχημάτων σύστασιν ἀνεύρεν, Πρόκλου εἰς α' Εὐκλείδου, ἐκδ. Friedlein, Leipzig 1873, σελ. 65.

Σημειώνουμε ὅτι *ρητό* καὶ *ἄλλο* εἶναι ἡ ἑλληνικὴ ὀνομασία γιὰ ὅ,τι σήμερον ὀνομάζουμε *ρητό* καὶ *ἄρρητο* ἀντίστοιχα. Ἡ δημιουργία καὶ ἡ ἀνάπτυξη τῆς θεωρίας τῶν ἀσυμμέτρων τέτοια ὥπως τὴν βρίσκουμε στὸ Χ Βιβλίο τῶν *Στοιχείων* τοῦ Εὐκλείδου ἀρχισε ἀπὸ τὴν ἐποχὴ τοῦ Πλάτωνος.

Ὁ Θεόδωρος ὁ Κυρηναιὸς δάσκαλος τοῦ Πλάτωνος στὰ Μαθηματικά (Διογ. Λαέρτιος III, 6) ἀσχολεῖται μὲ τὸ πρόβλημα τῶν ἀρρήτων ὅχι ὁμῶς μὲ τὸ γενικὸ, ἀλλὰ καταπιάνεται μὲ τοὺς ἀρρήτους ἀπὸ $\sqrt{3}$ ἕως $\sqrt{17}$ καὶ ἔπειτα σταματᾷ. Βλ. Πλάτωνος *Θραύτης* 147d 148b. Κατὰ τὸν W. Burkert τὸ σημεῖο αὐτὸ τοῦ *Θραύτητος* ἐπιβεβαιώνει ὅτι ἡ $\sqrt{2}$ ἦταν ἤδη γνωστὴ. Βλ. W. Burkert: *Weisheit und Wissenschaft. Studien zu Pythagoras, Philolaos und Platon*, Nürnberg 1962, σελ. 437.

Ὁ καθηγητὴς κ. Εὐγ. Σταμάτης ὑποστηρίζει ὅτι ὁ Πλάτων λόγῳ τῆς ἱερότητας τοῦ ἀριθμοῦ 17 σταματᾷ τὸν Θεόδωρο στὴν ἀπόδειξη τοῦ ἀσυμμέτρου τῆς $\sqrt{17}$. Βλ. *Πραγματικά Ἀκαδημίας Ἀθηνῶν*, τόμος 31, ἔτος 1956, ἀνακοινώσεις 12-1-1956.

Ἀκόμη ὁ ἱερός ἀριθμὸς 17 τῶν Πυθαγορείων ἔπαιξε σημαντικὸ ρόλο στὴν κατασκευὴ τῆς πυθαγόρειας μουσικῆς κλίμακας. Βλ. Πλ. *Τίμαιος*, 36 κ.ε.

11. Ἡ ἀπόδειξη αὐτῆς τῶν Πυθαγορείων βασίστηκε πάνω στὴν τεχνικὴ τοῦ ἀρτίου καὶ τοῦ περιτοῦ. «Ἀσύμμετρος ἢ διάμετρος διὰ τὸ γίνεσθαι τὰ περιτὰ ἴσα τοῖς ἀρτίοις συμμετρου τεθείσης». Ἀριστ., *Αναλυτικά Πρώτερα* 23, 41 α 26.

12. Γιὰ περισσότερες λεπτομέρειες βλ. E. R. Dodds, *The Greeks and the Irrational*, Berkeley 1951, καθὼς καὶ Arpad Szabó, *Al'arxai tōn ellhnikōn mathēmatikōn*, Ἀθήνα 1973.

13. Diels, op. cit., σελ. 244.

14. Στὸν βιογράφο του Πορφύριο διαβάζουμε: «Γεωμετρίας μὲν ἐκ παλαιῶν χρόνων ἐπιμεληθῆναι Αἰγυπτίους τὰ δὲ περὶ ἀριθμοὺς καὶ λογισμοὺς Φοίνικας· Χαλδαίους δὲ τὰ

στοιχοῦσες ἔννοιες ποὺ ἀπέδιδε ὁ Πυθαγόρας σὲ κάθε στερεό¹⁵· κύβος-γῆ, πυραμίδα-πῦρ, ὀκτάεδρο-ἄηρ, εἰκοσάεδρο-ὕδωρ, δωδεκάεδρο - τὴν τοῦ παντὸς σφαῖρα¹⁶.

Ἄς δοῦμε τώρα τὶς ἀναλογίες ποὺ παρουσιάζει ἡ ἀρχαιότερη Ἰνδικὴ φιλοσοφία, ἡ Sāmkhya, μὲ τὴν Πυθαγόρεια. Ἡ Ἰνδικὴ παράδοση θεωρεῖ τὴν

περὶ τὸν οὐρανὸν θεωρήματα. Porphy., *De Vita Pythagorae*, σελ. 6. Καὶ ὁ Πρόκλος ἰσχυρίζεται τὰ ἴδια: «...decimus... apud Aegyptios geometriam primum inventam fuisse quae ab agrorum emensi ortum habuit. Haec si quidem illis necessaria fuit propter Nili inundationem convenientes singulis terminos diluentis... Quemadmodum erat apud Phenicias propter mercaturas atque commercia numerorum certa cognitio sumpsit exortium, ita sane apud Aegyptios quoque Geometria ob jam memoratam reperta est causam». Proclus, Lib. II, c. IV.

Σχόλιο τοῦ 13ου βιβλίου τῶν *Στοιχείων* τοῦ Εὐκλείδου ἀναφέρει ὅτι οἱ Πυθαγόρειοι γνῶριζαν τρία μόνο κανονικὰ πολυέδρα, δηλ. τὸν κύβου, τὸ τετράεδρο καὶ τὸ δωδεκάεδρο καὶ ὅτι ὁ Τίμαιος ἀνακάλυψε τὰ ἄλλα δύο, δηλ. τὸ ὀκτάεδρο καὶ τὸ εἰκοσάεδρο.

15. «Πυθαγόρας πέντε σχημάτων ὄντων στερεῶν, ἅπτερ καλεῖται καὶ μαθηματικά, ἐκ μὲν τοῦ κύβου φησὶ γηγενέει τὴν γῆν, ἐκ δὲ τῆς πυραμίδος τὸ πῦρ, ἐκ δὲ τοῦ ὀκταέδρου τὸν αἆρα, ἐκ δὲ τοῦ εἰκοσαέδρου τὸ ὕδωρ, ἐκ δὲ τοῦ δωδεκαέδρου τὴν τοῦ παντὸς σφαῖραν». Plut. *Rev.* II, 65. Βλ. ἀκόμη Θεόφραστος - Ἀέτιος, Diels, op. cit., 44 [32], 15.

Ἀρκετοὺς αἰῶνες ἀργότερα ὁ J. Kepler —ἐπηρεασμένος ἀπὸ τὴν πυθαγόρεια καὶ πλατωνικὴ φιλοσοφία— προσπάθησε νὰ ἐξηγήσει τὶς πυθαγόρειες καὶ πλατωνικὲς ἀντιστοιχίες. Μέσα ἀπὸ προβλήματα μεγίστου καὶ ἐλαχίστου στερεῶν (βλ. *Nova stereometria doliorum vinariorum imprimis Austriaci supplementum*, Linz 1615, ἢ *Opera Omnia*, ed. Ch. Fris. Frankfurt a.M. und Erlangae 1858-70, vol. IVe, 551-646) ὑποθέτει ὅτι τὸ τετράεδρο περικλείει τὸν μικρότερο ὄγκο γιὰ τὴν ἐπιφάνειά του, ἐνῶ ἀντίθετα τὸ εἰκοσάεδρο τὸν μεγαλύτερο. Τὶς σχέσεις αὐτὲς ὄγκου καὶ ἐπιφανείας τὶς συνδέει μὲ τὶς ιδιότητες ξηρότητας καὶ ὑγρότητας. Ἔτσι ἀφοῦ ἡ φωτιὰ εἶναι τὸ ξηρότερο ἀπὸ τὰ πέντε στοιχεία καὶ τὸ νερὸ τὸ ὑγρότερο, ἀντιστοιχεῖ τὸ τετράεδρο στὴ φωτιὰ καὶ τὸ εἰκοσάεδρο στὸ νερὸ. Ὁ κύβος λόγῳ τῆς εὐσταθείας του, ἀντιστοιχεῖ στὴ γῆ· ἐνῶ ἀντίθετα τὸ ὀκτάεδρο ποὺ εὐκόλα περιστρέφεται, ἀντιστοιχεῖ στὸν αἆρα. Τὸ δωδεκάεδρο ἀντιστοιχεῖ στὸ σύμπαν, γιατί ἔχει δώδεκα ἑδρες, ὅπως δώδεκα σύμβολα ἔχει καὶ ὁ ζωδιακὸς κύκλος. Γιὰ μιὰ γενικώτερη μελέτη βλ. τὸ κλασικὸ ἔργο τῆς Eva Sachs: *Die fünf platonischen Körper*, Berlin 1917.

16. Γιὰ τὸ δωδεκάεδρο εἰδικὰ θυμίζουμε ὅτι οἱ ἑδρες του εἶναι κανονικὰ πεντάγωνα καὶ ὅτι οἱ διαγώνιοι αὐτῶν τῶν πενταγώνων σχηματίζουν ἓνα σχῆμα, ἀνάλογο μὲ τὴν πεντάλφα, ποὺ ἐθεωρεῖτο σύμβολο ἀναγνώρισης τῶν Πυθαγορείων. Τὸ σχῆμα αὐτὸ βρέθηκε καὶ σὲ βαβυλωνιακὰ σχέδια, ὅπως ἀναφέρει ὁ B. L. van Waerden, βλ. *Science Awakening*, I, 4η ἐκδ., 1975, σελ. 101.

Σχετικὰ μὲ τὸ σχῆμα αὐτὸ —σχῆμα ποὺ θυμίζει ἀρκετὰ τὸ γνωστὸ σημεῖο τοῦ σύμβολο— βλ. J. Marquès-Rivière: *Amulettes, talismans et pentacles*, Paris 1938, σελ. 49, σχ. 9 καὶ Hammer-Purgstall *Literaturgeschichte der Araber*, Wien 1854, σελ. 10. Σάν μιὰ ἀπεικόνιση τοῦ χωρόχρονου —σὲ ἑξὶ διαστάσεις— τὸ ἐρμηνεύει ὁ P. D. Ouspensky, βλ. P. D. Ouspensky, *A new Model of the Universe*, London, 3d ed. 1948, σελ. 445-446, σχ. 18.

Ἀξίζει νὰ σημειώσουμε ὅτι τὸ 1885 βρέθηκε ἓνα κανονικὸ δωδεκάεδρο ἐτρουσκικῆς καταγωγῆς, στὸ Monte-Loffa κοντὰ στὴν Padova, ποὺ χρονολογήθηκε νωρίτερα ἀπὸ τὸ

Sāmkhya σάν την πιο αρχαία θεωρία (darśana). Η λέξη Sāmkhya εξηγήθηκε με διάφορους τρόπους. Ο R. Garbe¹⁷ θεωρεί ότι η λέξη Sāmkhya παράγεται από τη λέξη samkhyā που σημαίνει αριθμός, και πιστεύει ότι σημαίνει ακόμη, απαρίθμηση, έρευνα, ανάλυση. Ο Oldenberg¹⁸ πιστεύει ότι εκφράζει περισσότερο την έννοια της πράξης του εξετάζει, του λογισμού ή απαρίθμηση των διαδοχικών στοιχείων. Ένω ο Jacobi¹⁹ πιστεύει ότι σημαίνει τον καθορισμό μιας έννοιας από την απαρίθμηση του περιεχομένου του. Ίσως όλες αυτές οι εξηγήσεις να ήταν γνωστές και αποδεκτές στην αρχαία Ινδία, όποια όμως κι αν είναι η εξήγηση²⁰ ο κύριος στόχος της Sāmkhya είναι ένας, ο σαφής διαχωρισμός του πνεύματος (puruṣa) από την ύλη (prakṛti)²¹.

Ίδρυτής του φιλοσοφικού αυτού δόγματος είναι ο μυθικός Kapila²² που διατύπωσε τις φιλοσοφικές του δοξασίες ξεχωριστά από τους αγίους και σοφούς έρμηνευτές των βεδικών κειμένων. Η πιο παλιά γραπτή πραγματεία παραμένει η Sāmkhya Kārikā του Iṣvarakṛṣṇa²³. Όπωςδήποτε όμως, ο Iṣvarakṛṣṇa δέν είναι ο πρώτος συγγραφέας της Sāmkhya. Ο σοφός Kapila, μυθικός ιδρυτής του συστήματος, παρέδωσε τη θεωρία στον Asuri, και εκείνος

500 π.Χ. Για περισσότερες λεπτομέρειες βλ. F. Lindemann: Stzungber, *Bayerische Akad. Wiss.*, 26, 1897 σελ. 625-768.

17. R. Garbe, *Die Sāmkhya - Philosophie. Eine Darstellung des indischen Rationalismus*, Leipzig 1894.

18. *Die Lehre der Upanishaden und die Anfänge des Buddhismus*, Göttingen 1915.

19. *Göttingische Gelehrte Anzeigen*, 1919.

20. Ο καθηγητής M. Eliade εξηγεί τη λέξη Sāmkhya σάν «discrimination» (διαχωρισμός) και «discernement» (διάκριση). Βλ. M. Eliade: «Patanjali et le Yoga» coll. *Mattres spirituels*, Seuil 1976 σελ. 13.

21. Bhagavad-Gita Κεφ. V, στίχ. 5, μεταφρ. Δ. Γαλανού, *Ίνδικαι μεταφράσεις*, Άθήναι 1845.

22. Η θαυματουργική του δύναμη αναγνωρίζεται και στο έπικό έργο Mahābhārata μετάφρ. Δ. Γαλανού, op. cit. (βλ. III, 107).

23. Βλ. *Gymnosophista sive Indicae philosophiae documenta collegit, edidit, enarravit Christianus Lassen*. Voluminis I Fasciculus Iṣvarakṛṣṇae Sāmkhya - Caricam tenens, Bonn 1832 ή *The Sāmkhya Kārikā or memorial verses on the Sāmkhya philosophy by Iṣvarakṛṣṇa*; translated from the Sanscrit by Henry Thomas Colebrooke. Also the bhāṣya or commentary of Gaurapāda; translated, and illustrated by an original comment, by Horace Hayman Wilson, Oxford 1837.

Άκόμη βλ. John Davies, *Hindu Philosophy. The Sāmkhya Kārikā of Iṣvarakṛṣṇa. An exposition of the system of Kapila. With an appendix on the Nyāya and Vaiśeṣika systems*. Trübner's Oriental Series, London 1881, ή *The Sāmkhyakārikā, with an exposition called Chandrikā by Nārāyaṇa Tīrtha, and Gandapadocharya's commentary*. Edited by Pandit Bechanarama Tripathi. Benares Sanskrit Series No. 9, Benares 1883, ή S.S. Souryanarayana Sastri, *The Sāmkhya Kārikā of Iṣvarakṛṣṇa. With an Introduction, translation and notes*, University of Madras 1930.

με τη σειρά του την παρέδωσε στον Pancasikha, και άπ' αυτόν την παρέλαβε ο Iṣvarakṛṣṇa²⁴.

Άπ' αυτά γίνεται φανερό πόσο δύσκολο είναι να δώσουμε την άκριβή χρονολογία της συστηματικής ίδρυσης της Sāmkhya, που ή άρχή της πρέπει να τοποθετηθεί μερικούς αιώνες π.Χ., στον ΣΤ' ή Ε' αιώνα²⁵. Όμως, οι ρίζες του συστήματος Sāmkhya πρέπει να είναι πολύ βαθιές. Άνάγονται στην εποχή που οι άνθρωποι, αναλύοντας τα στοιχεία της συσσωρευμένης πείρας, προσπάθησαν να διαχωρίσουν τα στοιχεία εκείνα που με τον θάνατο «έγκαταλείπουν» τον άνθρωπο και εκείνα που είναι «άθάνατα» και συνοδεύουν την ψυχή. Έτσι ή καταγωγή της Sāmkhya είναι αναπόσπαστα συνδεδεμένη με το μεγάλο πρόβλημα των στοιχείων που παραμένουν άθάνατα στον άνθρωπο.

Η Sāmkhya άναζητά και στηρίζει «τον λυτρωμό» άποκλειστικά στη γνώση. Η άπελευθέρωση άρχίζει να γίνεται κτήμα εκείνου που άρχίζει να γνωρίζει σέ βάθος την ουσία και τη μορφή της φύσης (prakṛti), όπως και τους νόμους που διέπουν την εξέλιξη της. Με τον τρόπο αυτό ο λυτρωμός έρχεται όταν ή διάνοια (buddhi), οδηγεί τον άνθρωπο στο κατώφλι του ξυπνήματος.

Άρκετοί μελετητές παραδέχονται ότι ο βουδισμός άποτελεί άμεση προέκταση της Sāmkhya. Ο Garbe π.χ. αναφέρει όκτώ κοινά σημεία μεταξύ βουδισμού και Sāmkhya²⁶. Τα πιο σημαντικά είναι ότι ο βουδισμός όπως και ή Sāmkhya είναι «αριθμητικές φιλοσοφίες» γιατί χρησιμοποιούν συχνά

24. Βλ. R. Garbe *Die Sāmkhya Philosophie. Eine Darstellung des indischen Rationalismus*, Leipzig. 1894, και V. Sovani, *A critical study of the Sāmkhya System on the lines of Sāmkhya-Kārikā, Sāmkhya-Sūtra and their commentaries*. Allahabad University Studies, Vol. VII, 1931. Για μία περιληπτική μελέτη βλ. το άρθρο του Th. Goldstücker, Sāmkhya στην *Έγκυκλοπαίδεια Chambers*. Άναδημοσίευση στο *Literary Remains*. London 1879. vol. I, σελ. 170-176 όπως και το έργο του Mādhava Achārya, *The Sarva-darsana samgraha or review of the different systems of Hindu Philosophie*, transl. by E.B. Cowell and A.E. Gough, *Trübner's Oriental Series*, London 1822, chapter XIV, *The Sāmkhya-darsana*, σελ. 221-230. Άκόμη μία σύντομη περίληψη της Sāmkhya βρίσκουμε στο έπικό ποίημα Manimēkalai. Βλ. S.S. Suryanarayana Sastri, «The Manimēkalai account of the Sāmkhya», *Journal of Indian History*, vol. VIII, Dec. 1929, σελ. 5-7.

25. Όμως για τη σύνταξη του Έργου δέν ύπάρχει όμοφωνία. Άλλοι, όπως ο M. Eliade, ισχυρίζονται ότι γράφτηκε τον 5ο μ.Χ. αιώνα, βλ. M. Eliade, op. cit., σελ. 13, και άλλοι, όπως ο Belvalkar, πιστεύουν ότι γράφτηκε τον 1ο ή τον 2ο μ.Χ. αιώνα. Βλ. Belvalkar, «Mātharavratī». *Annales of the Bhandarkar Institut*, vol. V, Poona 1924, 133-168. Για μία ειδική μελέτη, σχετική με τα προβλήματα του χρονολογικού προσδιορισμού της Sāmkhya βλ. το άρθρο του Haraprasad Shastri, «Chronology of the Sāmkhya System», *Journal of Bihar-Orissa Research Society*, June 1923.

26. Βλ. R. Garbe, op. cit., σελ. 3-5.

ταξινομήσεις, απαριθμήσεις και σχήματα, όπως και ότι τα δύο συστήματα πιστεύουν ότι η λύτρωση είναι ο υπέρτατος ανθρώπινος σκοπός.

Ο Jacoby²⁷ επίσης δέχεται τα συμπεράσματα του Garbe και υπογραμμίζει τις στενές σχέσεις των nidāna και των «κατηγοριών» της Sāmkhya, και υπενθυμίζει ότι ο πρώτος δάσκαλος του Βούδα, ο Arāda, ήταν όπαδός της Sāmkhya, σύμφωνα με τη μαρτυρία του Aśvaghoṣa, στην Buddhacarita. Σε μία άλλη του εργασία επανέρχεται στο ίδιο θέμα και σημειώνει: «ο βουδισμός δεν εμφανίζεται σαν μία αντιγραφή αλλά σαν μία προσωπική εξήγηση της Sāmkhya. Η Sāmkhya δεν χρησίμευσε σαν πρότυπο για το βουδισμό αλλά σαν βάση πάνω στην οποία χτίστηκε»²⁸.

Η Sāmkhya παρουσιάζει αρκετές αναλογίες με τα σωζόμενα στοιχεία της Πυθαγόρειας διδασκαλίας. Έτσι στην Sāmkhya βρίσκουμε την γνώριμη δοξασία της μετενσάρκωσης²⁹, θεώρηση που συναντάμε στην Ινδία από τον ΣΤ' π.Χ. αιώνα. Τις απαγορεύσεις ορισμένων τροφών, π.χ. την χαρακτηριστική για τους Ινδούς αποχή από το κρέας, ή την απαγόρευση των κυμάτων, απαγόρευση που την συναντάμε ήδη από τον Ι' π.Χ. αιώνα³⁰.

Οι μαθηματικές γνώσεις στην Ινδία —πριν και μετά την εποχή του Πυθαγόρα— ήταν αδιαχώριστα συνδεδεμένες με τη θρησκεία.

Θα θέλαμε να υπογραμμίσουμε ότι η κοινωνική και η πολιτική ζωή της Ινδίας εξουσιαζόταν από τη θρησκεία. Η επιθυμία να θεσπιστούν σωστοί κανόνες για την ιεροτελεστία των θυσιών έδωσε την πρώτη ώθηση για τις αστρονομικές παρατηρήσεις. Οι φωνητικοί κανόνες επινοήθηκαν γιατί η λανθασμένη προφορά ενός και μόνο γράμματος των θρησκευτικών τύπων,

27. Βλ. Jacobi, *Der Ursprung des Buddhismus aus dem Sāmkhya* Nach. Königl. Ges. Wissen, zu Göttingen, 1896 σελ. 43-58.

28. Βλ. Jacobi, «Über der Verhältnis der buddhistischen Philosophie zu Sāmkhya - Yonga und die Bedeutung des Nidānas», *Zet. Deut. Gesell.*, vol. 52, 1900, σελ. 1.

29. Για περισσότερες λεπτομέρειες βλ. H. Oldenberg *Zur Geschichte der Sāmkhya Philosophie*. Nach. Götting. 1917, σ. 218-237. ή Satishchandra Vidyābhūṣana: «Sāmkhya Philosophie in the Land of Lamas», *Journal of the Asiatic Society of Bengal*, 1907, σελ. 571-577. Βλ. ακόμη J. Gonda: *Change and Continuity in Indian Religion*, The Hague 1965.

30. Όμως ο ρεαλισμός της Sāmkhya, όπως και η θέση της για την πραγματικότητα του εξωτερικού κόσμου, κρίθηκε έντονα από τους ιδεαλιστές βουδιστές. Βλ. Vijnaptimatratāsiddhi του Vasubandhu. Μετάφραση από τα κινέζικα και σχόλια από τον L. de la Vallée-Poussin, tom. I, Paris 1928, 23-26. Τέλος βλ. τη γενικότερη μελέτη για την Sāmkhya του J.A.B. van Buitenen, «Studies in Sāmkhya», *Journal of American Oriental Society*, LXXX (1956), 153-157, LXXXII (1957), 15-25.

30. Στην Māitrāyaṇi Samhita, την αρχαιότερη Yajurveda, συναντάμε τις απαγορεύσεις σχετικές με τους κύμους Māitrāyaṇi. 1.4.10. Επίσης και στην Kāthakam Yajurveda τις ίδιες απαγορεύσεις. Βλ. Kāthakam 32,7.

προκαλούσε την όργη των θεών, ή γραμματική και ή έτυμολογία είχαν σαν κύριο καθήκον να βοηθήσουν την κατανόηση των ιερών κειμένων. Ἀκόμη και ή στενή σχέση φιλοσοφίας και θεολογίας, με άκαθόριστα σύνορα της μιᾶς από την άλλη συνέβαλε σημαντικά, ώστε όλα αυτά να τονίσουν την πρωτοτυπία των ἰνδικών μαθηματικών.

Τα κείμενα των τελετουργικών κανόνων Kalpaśūtras και τα συμπληρώματά τους Sulvasūtras³¹ —κείμενα προορισμένα στην περιγραφή κανόνων κατασκευής βωμών— μᾶς τονίζουν ότι οι μαθηματικές ανακαλύψεις των Ἰνδών πηγάζουν από μερικές λατρευτικές απαιτήσεις. Διάφορα προβλήματα, διπλασιασμοῦ μυθικών βωμών ή κατασκευή βωμών για καταπολέμηση της πανούκλας, μᾶς θυμίζουν με θαυμαστή αναλογία τὸ Δήλιον πρόβλημα.

Η γνωστή «πυθαγόρεια πρόταση» και οι ἄρρητοι ἄριθμοι (kaṇṇa), ἦσαν γνωστοί. Μάλιστα υπήρχε και ιδιαίτερη ονομασία, π.χ. γ2 = dvikaraṇi, γ3 = trikaraṇi, γ10 = dasakaraṇi, γ40 = catvarinṣatkarani κλπ.³².

Τέλος ή κοσμογονική παραδοχή των πέντε στοιχείων —πῦρ, ὕδωρ, γῆ, ἀήρ, αἰθήρ³³— ήταν τόσο πολύ διαδεδομένη και οἰκεία στους Ἰνδούς ώστε να θεωρούν τὸ θάνατο συνώνυμο με την ἀποσύνθεση σε πέντε στοιχεία³⁴. Ἀκόμη ή σανσκριτική λέξη ākāṣa (αἰθήρ) φέρεται σαν παραφθορά της ἑλληνικής ὀλκάς³⁵.

Ο πρώτος που παρατήρησε την αναλογία ανάμεσα στο σύστημα Sāmkhya και στην Πυθαγόρεια φιλοσοφία ήταν ο Sir William Jones³⁶, ώθούμενος

31. Βλ. τὸ κλασικὸ κείμενο τοῦ G. Thibaut, «On the Sulvasūtras», *Journal Asiatic Bengal*, vol. 44 (I), 1875, σελ. 227-274.

Για τὸ ρόλο ποὺ παίζαν οἱ Sulvasūtras στὴν τελετουργικὴ καταγωγή τῆς Γεωμετρίας βλ. τὸ ἐνδιαφέρον ἄρθρο τοῦ A. Seidenberg, «The Ritual Origin of Geometry», *Archive for the History of Exact Sciences*, I, 1962, σελ. 488-527.

32. Βλ. M. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, I Band, Leipzig 1907³, σελ. 638-639.

33. «πρὸς δὲ τοῖς τέτταρσι στοιχείοις πέμπτη τις ἐστὶ φύσις, ἐξ ἧς ὁ οὐρανὸς καὶ τὰ ἄστρα». Megasth. *Fragm.* XLI 17.

34. Βλ. Max Müller, «Beiträgen zur Kenntniss der indischen Philosophie», *Zeitschrift der deutschen Morgenkl. Gesellschaft*, VI, 1892.

35. «Solle am Ende gar in der... Stelle des Philolaus (160) πῦρ, ὕδωρ, καὶ γῆ καὶ ἀήρ καὶ ὁ τῶς σφαίρας ὀλκάς (ἡ ὀλκάς) πέμπτης, «in dem seltsamen ὀλκάς als Bezeichnung des fünften Elementes, das schon so viele Conjekturen, aber keine befriedigende hervorgerufen hat, sich eine Verstümmelung der indischen Bezeichnung des Aethers, d.i. ākāṣa erhalten haben?» L.B.v. Schröder, op. cit., σελ. 65, σημ. 2.

Βλ. ἐπίσης τὴν ἀνακοίνωση τοῦ A. Weber, «Die Griechen in Indien», *Sitzunberichte der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin XXXVII*, σελ. 923-926 & *Literar. Zentralblatt* 1884, σελ. 1563-65.

36. Βλ. *Works*, 8 Vols., Vol. III, 1799 σελ. 236

ἀπὸ τὸ ὅτι ἡ λέξις *samkhyā* — πού σημαίνει ἀριθμὸ στὰ σανσκριτικά — εἶχε θεμελιώδη σημασία στὸ Πυθαγόρειο φιλοσοφικὸ σύστημα³⁷. Ἀργότερα ὁ Colebrooke³⁸ γράφει ὅτι οἱ Ἴνδοι Δάσκαλοι ἐπαιξαν ἀποφασιστικὸ ρόλο στὴ διατύπωση τῆς φιλοσοφίας τοῦ μεγάλου Σαμίου³⁹. Μὲ τὴ συγγένεια τῶν Ἰνδικῶν καὶ πυθαγορείων θεωριῶν ἀσχολήθηκε καὶ ὁ Barthélemy Saint-Hilaire⁴⁰.

Ἐκεῖνος ὅμως πού συστηματικὰ ἀσχολήθηκε μὲ αὐτὸ τὸ θέμα εἶναι ὁ L. v. Schröder, πού παρουσίασε τὸ 1884 μιὰ συγκριτικὴ μελέτη τῶν δύο θεωριῶν⁴¹. Σ' αὐτὸ τὸ βιβλίο ὁ Schröder μελετᾷ καὶ ἀντιπαραθέτει κοινὰ σημεῖα τῆς *Sāmkhya* καὶ τῆς Πυθαγόρειας Διδασκαλίας⁴². Ἡ συσχέτιση καὶ ἡ ἐπιρροή τοῦ συστήματος *Sāmkhya*⁴³ ἐξακολούθησε νὰ συνδυάζεται μὲ τὴ δυτικὴ φιλοσοφία.

37. «φαίνονται δὲ καὶ οὗτοι τὸν ἀριθμὸν νομίζοντες ἀρχὴν εἶναι». Ἀριστ. *Μετὰ τὰ Φυσικά*, I, 598a 15.

38. H. T. Colebrooke: «On the Philosophy of the Hindu», Part I. On the Sankhya system. *Transactions of the Royal Asiatic Society*, I, 19-43, 1823. Βλ. ἀκόμη *Miscellaneous Essays*, by M.T. Colebrooke, new ed. with notes by E. B. Cowelle, London 1873, Vol. I, σελ. 239-279.

39. «adverting to what has come to us of the history of Pythagoras, I shall not hesitate to acknowledge an inclination to consider the Grecian to have been... indebted to Indian instructors. Nobody needs to be reminded, that Pythagoras and his successors held the doctrine of metempsychosis, as the Hindus universally do held the doctrine of transmigration of souls. They agree likewise generally in distinguishing the sensitive material organ (manas), from the rational and conscious living soul (jivatman): θυμὸς καὶ φρὴν of Pythagoras; one perishing with the body, the other immortal. Like the Hindus, Pythagoras with other Greek philosophers, assigned a subtle ethereal clothing to the soul apart from the corporeal part, and a grasser clothing to it when united with body; the *sūkshma* (or *linga*) *sārira* and *sthūla sārira* of the *Sāmkhyas* and the rest... I should be disposed to conclude that the Indians were in this instance teachers rather than learners». T.H. Colebrooke, *Misc. Ess.*, I, σελ. 241.

40. Barthélemy Saint-Hilaire, «Premier Mémoire sur le Sāmkhya». *Mémoires de l'Académie des Sciences Morales et Politiques*, tom. VI, Paris 1852, σελ. 105-560. Première partie: bibliographie du Sāmkhya, σελ. 107-121. Deuxième partie: analyse du Sāmkhya σελ. 123-366. Troisième partie: examen critique du Sāmkhya σελ. 369-488. Quatrième partie: histoire du Sāmkhya, σ. 489-502.

41. *Pythagoras und die Inder. Eine Untersuchung über Herkunft und Abstammung der Pythagorischen Lehren*, Leipzig 1884.

42. Ἡ προσωποποιημένη θεότητα δὲν παίζει κανένα ρόλο στὴ *Sāmkhya* καὶ στὴν Πυθαγόρεια Διδασκαλία. ἡ μουσικὴ κλίμακα τῶν ἑπτὰ φθόγων ὑπάρχει ἤδη στὰ *Ḍikṣā* (τὰ πρῶτα ἑξὶ *Vedāṅgas*) ὅπως καὶ ὁ συμβολισμὸς τῶν δέκα πρῶτων ἀριθμῶν π.χ. 1 = *prajāpati*, 7 = *Metra*. Καὶ ἡ γνωστὴ πυθαγόρεια φράση: «πρὸς ἥλιον τετραμμένον μὴ ὀμίζειν» βρίσκεται στοὺς στίχους τοῦ *Pratyag, Atharvaveda*, 13, 1, 56.

43. Μιὰ τολμηρὴ ἀμφιμονοσήμαντὴ ἀντιστοιχία Ἰνδικῶν καὶ Ἑλληνικῶν φιλοσοφί-

Ἄς Lassen⁴⁴ ὑπογραμμίζει τὴν ἐπίδραση τοῦ συστήματος *Sāmkhya* στὸν Γνωστικισμό καὶ ἰδιαίτερα τονίζει τὴν ἐπίδραση τῆς *Sāmkhya* στὸν Πλωτῖνο⁴⁵.

Lalitavistara - Ψαμμίτης

Ἄς περάσουμε τώρα σὲ μιὰ σχετικὰ νεώτερη ἐποχὴ, καὶ ἄς θαυμάσουμε ἓνα ὑπέροχο μαθηματικὸ Ἰνδικὸ κείμενο⁴⁶.

Ὅταν ὁ Bōdhisattva, γιὸς τοῦ βασιλιά Cōnddhōdana, ἐρχεται σὲ ἡλικία γάμου διαγωνίζεται μὲ πεντακόσιους ἄλλους νέους στὴ γραφὴ, στὴν ἀριθμητικὴ, στὴν πάλιν, στὸ τόξο, γιὰ τὸ χέρι τῆς θυγατέρας τοῦ Cakya Dandapāni, Gōpā. Κερδίζοντας, χωρὶς δυσκολία τοὺς ἄλλους ἀνταγωνιστές, ὁ Bōdhisattva καλεῖται νὰ συναγωνισθεῖ τὸν μεγάλο μαθηματικὸ Arđjouna πού ἦταν καὶ κριτὴς τοῦ διαγωνισμοῦ⁴⁷. Ὁ Arđjouna τὸν ρωτᾷ σχετικὰ μὲ τοὺς τρόπους ἔκφρασης τῶν ἀριθμῶν πού εἶναι μεγαλύτεροι ἀπὸ 100 kōtis (1 kōti ἰσοῦται μὲ δέκα ἑκατομμύρια) καὶ ὁ Bōdhisattva ἀπαντᾷ μὲ τὴν παρακάτω κλίμακα, μὲ εἰκοσιτρεῖς ὀνομασίες διαδοχικῶν ὄρων πού σχηματίζουν

κῶν σχολῶν διατυπώνει ὁ W. Jones: «Of the Philosophical School it will be sufficient, here, to remark that the first Nyāya seems analogous to the Peripatetik; the second, sometimes called Vaiseshika to the Ionic; the two Mīmāṃsās, of which the second is often distinguished by the name of Vedānta, to the Platonic; the first Sāmkhya to the Italic; and the second, or Pātanjala to the Stoic Philosophers so that Gautama corresponds with Aristotle; Kanāda with Thales; Jaim with Socrates; Vyāsa with Plato; Kapila, with Pythagoras; and Patanjali with Zeno. But an accurate comparison between the Grecian and Indian Schools would require a considerable volume». Sir William Jones, *Works*, 4th ed. 1799, vol. 4, σελ. 360-361. Μιὰ ἀνάλογο συγκριτικὴ μελέτη ἑλληνικῆς καὶ Ἰνδικῆς φιλοσοφίας παρουσιάζει ὁ B. Bitasēs στὸ βιβλίο του: *Plato and the Upanisades*, Arnold Heinemann 1977 (New Delhi).

44. Lasseu, op. cit., σελ. 384.

45. Γιὰ περισσότερες λεπτομέρειες βλ. τὴν διδακτορικὴ διατριβὴ τοῦ Georg Biedenkapp: «Beiträge zu den Problemen des Selbstwusstseins, der Willensfreiheit und der Gesetzmässigkeit des Geistes, teilweise mit Bezug auf die Philosophie der Inder, Halle a/S. 1893.

46. Πρόκειται γιὰ τὴν Lalitavistara, ἓνα ἀπὸ τὰ ἱερὰ Ἰνδικὰ βιβλία. Τὸ κείμενο αὐτὸ κατὰ τὸν Woepke καὶ τὸν Menninger εἶναι τοῦ 7^{ου} π.Χ. αἰῶνα. Βλ. F. Woepke, «Mémoire sur la propagation des chiffres indiens», *Journal Asiatique*, 1er semestre, Paris 1863. K. Menninger, *Zahlwort und Ziffer. Eine Kulturgeschichte der Zahlen*, 2e Auflage, Göttingen 1958. Βλ. ἀκόμη B. Datta and A.N. Sing, *History of Hindu Mathematics*, I vol., Asia Publishing House (rep.) 1962.

47. Στις δεκατέσσερις σελίδες τοῦ σανσκριτικοῦ κειμένου ὅπου περιγράφεται ὁλος ὁ διαγωνισμός, ἡ ἀριθμητικὴ «ἐξέταση» τοῦ Bōdhisattva κατέχει, σημαίνουσα θέση, ἀφοῦ καταλαμβάνει σχεδὸν τὸ μισὸ κείμενο 6 1/2 σελίδες. Βλ. F. Woepke, op. cit., σελ. 75.

γεωμετρική πρόοδο με λόγο 100, και όπου ο πρώτος όρος είναι το *kōti* και ο τελευταίος το *tallakchana*:

1 ayouta	= 100 <i>kōtis</i>	= 10^9
1 niyouta	= 100 <i>ayoutas</i>	= 10^{11}
1 kangara	= 100 <i>niyoutas</i>	= 10^{13}
1 vivara	= 100 <i>kangaras</i>	= 10^{15}
1 akchōbhya	= 100 <i>vivaras</i>	= 10^{17}
1 vivāha	= 100 <i>akchōbhyas</i>	= 10^{19}
1 outsanga	= 100 <i>vivāhas</i>	= 10^{21}
1 bahoula	= 100 <i>outsangas</i>	= 10^{23}
1 nāgabala	= 100 <i>bahoulas</i>	= 10^{25}
1 titilambha	= 100 <i>nāgabalas</i>	= 10^{27}
1 vyavasthānapradjnapti	= 100 <i>titilambhas</i>	= 10^{29}
1 hētouhila	= 100 <i>vyavasthānapradjnaptis</i>	= 10^{31}
1 karahou	= 100 <i>hētouhilas</i>	= 10^{33}
1 hêtvindriya	= 100 <i>karahous</i>	= 10^{35}
1 samāptalambha	= 100 <i>hêtvindriyas</i>	= 10^{37}
1 ganānāgati	= 100 <i>samāptalambhas</i>	= 10^{39}
1 niravadya	= 100 <i>ganānāgatis</i>	= 10^{41}
1 moudrābala	= 100 <i>niravadyas</i>	= 10^{43}
1 sarvabala	= 100 <i>moudrābalas</i>	= 10^{45}
1 visandjñāgati	= 100 <i>sarvabalas</i>	= 10^{47}
1 sarvasandjñā	= 100 <i>visandjñāgatis</i>	= 10^{49}
1 vibhoūtangamā	= 100 <i>sarvasandjnās</i>	= 10^{51}
1 tallakchana	= 100 <i>vibhoūtangamās</i>	= 10^{53} 48

Φθάνοντας σ' αυτόν τον αριθμό, ο Bōdhisattva προσθέτει ότι όλη αυτή η κλίμακα σχηματίζει την αρίθμηση *tallakchana* —ονομασία που προέρχεται από τον τελευταίο αριθμό της κλίμακας— και ότι μετά απ' αυτήν βρίσκεται η αρίθμηση *dvadjāgravati*, και μετά η αρίθμηση *dvadjāgranicāmani* και έξη άλλες μετά⁴⁹. 'Υποθέτοντας ότι σε κάθε μία απ' αυτές τις αρίθμήσεις αντιστοιχεί ένα πλήθος όρων ίσο με την πρώτη αρίθμηση, την *tallakchana*, και

48. 'Η έκθετική γραφή —έπίτευξη που δημιουργήσε η Δύση μόλις τον 17ο αιώνα— δεν εμφανίζεται στο σανσκριτικό κείμενο.

49. Σύμφωνα με τη θιβετιανή «έκδοση» που μετέφρασε ο Ed. Foucaux *Rgya tch'er rol pa*, μεταφρ. Ed. Foucaux, IIe partie, Paris 1848, σελ. 141. Σημειώνουμε ότι η 'Εθνική Βιβλιοθήκη στο Παρίσι έχει δύο σανσκριτικά χειρόγραφα της Lalitavistara.

σχηματίζοντας κατά τον ίδιο τρόπο μια γεωμετρική πρόοδο με λόγο 100, φθάνει ο Bōdhisattva στον αριθμό $17^{+9 \times 46} = 10^{421}$. Τότε ο Ardjouna, που από κριτής μεταμορφώνεται σε μαθητή του Bōdhisattva ζητά να του εξηγήσει πώς σχηματίζεται η αρίθμηση που φθάνει μέχρι τη σκόνη των πρώτων ατόμων⁵⁰ καθώς και πόσα άτομα υπάρχουν σ' ένα yōdjana. 'Ο Bōdhisattva αρχίζει να σχηματίζει την παρακάτω κλίμακα:

1 κόκκος πολύ λεπτής σκόνης	= 7 κόκκους σκόνης πρώτων ατόμων = $7a$.
1 κόκκος λεπτής σκόνης	= 7 κόκκους πολύ λεπτής σκόνης = $7 \times 7a = 7^2a$
1 κόκκος σκόνης που την φέρνει ο άνεμος	= 7 κόκκους λεπτής σκόνης = $7 \times 7 \times 7a = 7^3a$.
1 κόκκος σκόνης λαγού (σκόνη που σηκώνεται από το πόδι ενός λαγού)	= 7 κόκκους σκόνης που την φέρνει ο άνεμος = 7^4a .
1 κόκκος σκόνης κριού	= 7 κόκκους σκόνης λαγού = 7^5a .
1 κόκκος σκόνης ταύρου	= 7 κόκκους σκόνης κριού = 7^6a .
1 κόκκος σκόνης κόκκινης παπαρούνας ⁵¹	= 7 κόκκους σκόνης ταύρου = 7^7a .
1 κόκκος σιναπόσπορου	= 7 κόκκους σκόνης κόκκινης παπαρούνας = 7^8a .
1 κόκκος κριθάρι	= 7 κόκκους σιναπόσπορου = 7^9a .
1 φάλαγγα ενός δακτύλου	= 7 κόκκους κριθάρι = $7^{10}a$.
1 πιθαμή	= 7 φάλαγγες ενός δακτύλου = $12 \times 7^{10}a$.
1 πήχυς	= 2 πιθαμές = $2 \times 12 \times 7^{10}a$.
1 τόξο	= 4 πήχεις = $4 \times 2 \times 12 \times 7^{10}a$.
1 κτόφα της χώρας των Māgadha	= 1000 τόξα = $1000 \times 4 \times 2 \times 12 \times 7^{10}a$.
1 yōdjana	= 4 κτόφας = $4 \times 1000 \times 4 \times 2 \times 12 \times 7^{10}a$.

Με τη βοήθεια αυτής της κλίμακας ο Bōdhisattva καταλήγει στο παρακάτω συμπέρασμα: «Έτσι το πλήρες μήκος ενός yōdjana, που είναι έντελως γεμάτο από κόκκους σκόνης πρώτων ατόμων είναι: Ένα niyouta *akchōbhyas* και τριάντα εκατοντάδες χιλιάδες από *kōtis* των niyouta και έξηντα εκατοντάδες *kōtis* και είκοσι δύο *kōtis* και πέντε δεκάδες των εκατοντάδων των

50. Για συντομία ο Woepke, op. cit., σελ. 77, χρησιμοποιεί το γράμμα *a* για να συμβολίσει τα πρώτα άτομα.

51. 'Όρο που τον συναντάμε στον «Ψαμμίτη» του 'Αρχιμήδη.

χιλίων και δώδεκα χιλιάδες, αυτό είναι το ἄθροισμα ἑνὸς yōdjana κόκκου σκόνης τῶν πρώτων ἀτόμων»⁵². Τὸ κείμενο αὐτὸ τῆς Lalitavistara μᾶς δίνει ἕνα καταπληκτικὸ παράδειγμα ὑπολογισμοῦ μεγάλων ἀριθμῶν ποὺ ἔγινε στὴν Ἰνδία τὸν 7^ο π.Χ. αἰώνα.

Πρὶν προχωρήσουμε στὴν σύγκριση μὲ τὸν «Ψαμμίτη» τοῦ Ἀρχιμήδη ἄς συγκρατήσουμε ὅτι τὸ ἀπόσπασμα αὐτὸ τῆς Lalitavistara ἔχει σὰν ἀντικείμενο τὸν καθορισμὸ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν κόκκων τῆς σκόνης, καὶ ὅτι καθιερώνει μιὰ κλίμακα διαδοχικῶν εἰδῶν σκόνης διαφόρων μεγεθῶν⁵³.

Τὸ θέμα τοῦ «Ψαμμίτη» —ἡ μόνη σωζόμενη πραγματεία τοῦ Ἀρχιμήδη, μὲ ἀριθμητικὸ περιεχόμενο— παρουσιάζει μιὰ θαυμαστὴ ἀναλογία μὲ τὸ λογισμὸ τῆς σκόνης τοῦ Bōdhisattva. Ὁ στόχος τῆς μελέτης αὐτῆς τοῦ Ἀρχιμήδη εἶναι ν' ἀποδείξει ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν κόκκων τῆς ἄμμου ἢ ψάμμου τῆς πραγματείας —λέξη ἀπὸ τὴν ὁποία προέρχεται ἡ ὀνομασία—, ποὺ περιέχονται στὴ σφαῖρα τῶν ἀπλανῶν ἀστέρων ποὺ περικλείει τὸ σύμπαν, εἶναι μικρότερος ἀπὸ ἕναν ὀρίσιμο ἀριθμὸ.

Γιὰ νὰ καταλάβουμε καλύτερα τὴν ὁμοιότητα τοῦ ἰνδικοῦ λογισμοῦ ἄς δοῦμε ἀπὸ πῶς κοντὰ τὴν μέθοδο τοῦ Ἀρχιμήδη. Πρῶτα ἀπ' ὅλα ἄς δοῦμε τίς ὑποθέσεις τοῦ μεγάλου Συρακούσιου:

1. ὅτι ἡ περίμετρος τῆς γῆς εἶναι 3.000.000 στάδια.
2. ὅτι ἡ διάμετρος τῆς γῆς εἶναι μεγαλύτερη ἀπὸ τὴν διάμετρο τῆς σελήνης ὅπως καὶ ὅτι ἡ διάμετρος τοῦ ἡλίου εἶναι μεγαλύτερη ἀπὸ τὴν διάμετρο τῆς γῆς καὶ μάλιστα εἶναι 30 φορές μεγαλύτερη ἀπὸ ἐκείνην τῆς σελήνης.

Μὲ αὐτὰ ἀποδεικνύει τὰ ἑξῆς:

1. ὅτι ἡ διάμετρος τοῦ κόσμου εἶναι μικρότερη ἀπὸ 10.000 διαμέτρους τῆς γῆς καὶ ἀκόμη ὅτι εἶναι πῶς μικρὴ 10.000.000.000 στάδια.

Σχετικὰ μὲ τοὺς κόκκους ἄμμου ὑποθέτει τὰ παρακάτω. : 1 κόκκος

52. Δηλαδή	10.000.000.000.000.000.000.000.000.000
+	3.000.000.000.000.000.000.000.000.000
+	60.000.000.000
+	220.000.000
+	5.000.000
+	12.000

βλ. Woepke, op. cit., σελ. 79.

53. Ὁ ὑπολογισμὸς τῆς σκόνης ἦταν ἕνας ἀρκετὰ διαδεδομένος λογισμὸς σὲ προβλήματα ἀριθμητικῆς, ἴσως πολὺ πρὶν ἀπὸ τὴν σύνταξη τῆς Lalitavistara. Φυσικὰ, ὅταν πιά γράφτηκε στὰ ἱερὰ βιβλία τῆς θρησκείας διαδόθηκε ἀκόμη περισσότερο.

Εἶναι πολὺ πιθανὴ ἡ ἐξήγηση, ὅτι ἀπ' αὐτὸν τὸ λογισμὸ, οἱ Ἀραβες τῆς Ἀνατολῆς ὀνόμασαν τίς μεθόδους τῆς πρακτικῆς Ἀριθμητικῆς τῶν Ἰνδῶν, λογισμὸ τῆς σκόνης.

τῆς μήκωνος ἰσοῦται μὲ 10.000 κόκκους ἄμμου καὶ ὅτι ἕνα δάκτυλο ἰσοῦται μὲ σαράντα φορές τὴν διάμετρο ἑνὸς κόκκου μήκωνος⁵⁴.

Μὲ τίς ὑποθέσεις αὐτὲς ὁ Ἀρχιμήδης ἐμπεδώνει τὰ παρακάτω συμπεράσματα:

1. σφαῖρα διαμέτρου ἑνὸς δακτύλου ἰσοῦται μὲ 640.000.000 κόκκους ἄμμου καὶ εἶναι μικρότερη τῶν 10 μονάδων τῶν δευτέρων ἀριθμῶν.
2. σφαῖρα διαμέτρου 100 δακτύλων ἰσοῦται μὲ 1.000.000 σφαῖρες διαμέτρου ἑνὸς δακτύλου, καὶ εἶναι μικρότερη τῶν χιλίων μυριάδων (10.000.000) τῶν δευτέρων ἀριθμῶν.
3. σφαῖρα διαμέτρου 10.000 δακτύλων ἰσοῦται μὲ 1.000.000 σφαῖρες διαμέτρου 100 δακτύλων καὶ εἶναι μικρότερη τῶν 10 μυριάδων τῶν τρίτων ἀριθμῶν.
4. σφαῖρα διαμέτρου ἑνὸς σταδίου εἶναι μικρότερη ἀπὸ τὴ σφαῖρα ποὺ ἔχει διάμετρο μυρίων δακτύλων καὶ εἶναι μικρότερη τῶν 10 μυριάδων τῶν τρίτων ἀριθμῶν.
5. σφαῖρα διαμέτρου 100 σταδίων ἰσοῦται μὲ 1.000.000 σφαῖρες διαμέτρου ἑνὸς σταδίου, καὶ εἶναι μικρότερη τῶν χιλίων μονάδων τῶν τετάρτων ἀριθμῶν.
6. σφαῖρα μὲ διάμετρο 10.000 στάδια ἰσοῦται μὲ 1.000.000 σφαῖρες διαμέτρου 100 σταδίων καὶ εἶναι μικρότερη τῶν 10 μονάδων τῶν πέμπτων ἀριθμῶν.
7. σφαῖρα μὲ διάμετρο 1.000.000 στάδια ἰσοῦται μὲ 1.000.000 σφαῖρες διαμέτρου 10.000 σταδίων καὶ μικρότερη τῶν χιλίων μυριάδων τῶν πέμπτων ἀριθμῶν.
8. σφαῖρα μὲ διάμετρο 100.000.000 στάδια ἰσοῦται μὲ 1.000.000 σφαῖρες διαμέτρου 1.000.000 σταδίων καὶ εἶναι μικρότερη τῶν 10 μυριάδων τῶν ἑκτῶν ἀριθμῶν.
9. σφαῖρα μὲ διάμετρο 10.000.000.000 στάδια ἰσοῦται μὲ 1.000.000 σφαῖρες διαμέτρου 100.000.000 σταδίων καὶ εἶναι μικρότερη τῶν 1000 μονάδων τῶν ἑβδόμων ἀριθμῶν⁵⁵.

Γιὰ νὰ διατυπώσει τὰ παραπάνω συμπεράσματα ὁ Ἀρχιμήδης καθιερώνει, ὅπως καὶ οἱ Ἰνδοί, μιὰ κλίμακα ὀνομασίας ἀριθμῶν⁵⁶.

Μὲ αὐτὸν τὸν τρόπο, καταλήγει στὸ συμπέρασμα ὅτι τὸ πλῆθος τῆς

54. Βλ. Ἀρχιμήδης: Ἔκτακτα, τόμ. Β, μετάφρασις - σχόλια Εὐγ. Σταμάτη, ἐκδ. Τ.Ε.Ε., Ἀθῆναι 1973, σελ. 180-215, Η. 220 30-9, Η. 233 1-4, Η. 236, 6-9.

55. ib. Η. 244 16-20, Η. 244 21-24, Η. 248 6-10, Η. 249 8-10, Η. 251 1-4, 252 12, Η. 253 12-15, 254, 14, Η. 254 11-17.

56. ib. III Η. 237 1-2

άμμου ίσοῦται μετὰ τῇ σφαίρᾳ τῶν ἀπλανῶν ἀστέρων⁵⁷ καὶ εἶναι μικρότερον ἀπὸ 1000 μυριάδες τῶν ὀγδόων ἀριθμῶν⁵⁸.

Ἀκόμη ὁ Ἀρχιμήδης, ὅπως καὶ ὁ Bôdhisattva, παραδέχεται ἀριθμήσεις μεγαλύτερης τάξης. Ἔτσι παρατηρεῖ ὅτι ἡ κλίμακα τῶν πρώτων, δευτέρων, τρίτων ἀριθμῶν μπορεῖ νὰ συνεχισθεῖ μέχρι τοὺς ἑκατομμυριοστὺς ἀριθμοὺς, ποὺ θεωροῦνται σὰν τελευταῖος ὅρος αὐτῆς τῆς κλίμακας καὶ ταυτοχρόνως σὰν μονάδα μιᾶς καινούριας τάξης ἀριθμῶν ποὺ τοὺς ὀνομάζει πρώτους ἀριθμοὺς τῆς δευτέρας περιόδου. Μετὰ τὸ ἴδιο σκεπτικὸ προχωρεῖ μετὰ τοὺς δευτέρους ἀριθμοὺς, τοὺς τρίτους, ... μέχρι 100.000.000 μονάδες τῶν ἑκατομμυριοστῶν ἀριθμῶν τῆς ἑκατομμυριοστῆς περιόδου⁵⁹.

Τελικὰ βλέπουμε ὅτι, τόσο ὁ λογισμὸς ποὺ ὑπάρχει στὴ Lalitavistara, ὅσο καὶ ὁ λογισμὸς τοῦ Ἀρχιμήδους ἔχουν τὸν ἴδιο στόχο. Δηλαδή προσπαθοῦν νὰ καθορίσουν τὸν ἀριθμὸ τῶν κόκκων τῆς σκόνης ποὺ μπορεῖ νὰ περιέχονται στὸ σύμπαν ποὺ καὶ στίς δύο πραγματεῖες θεωρεῖται πεπερασμένο. Καὶ οἱ δύο καθορίζουν μιὰ ὀνοματολογία ἀριθμῶν. Καὶ στοὺς δύο αὐτὴ ἡ ὀνοματολογία ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο βαθμίδες. Στὴν Lalitavistara ἡ πρώτη βαθμίδα περιλαμβάνει τὴν κλίμακα τῶν ἀριθμῶν ποὺ σχηματίζουν τὴν ἀρίθμηση tallakchana, ἀντίστοιχα στὸν Ψαμμίτη ἔχουμε τοὺς πρώτους, δευτέρους, ὀκτάριθμους τῆς πρώτης περιόδου. Μιὰ μονάδα δευτέρων ἀριθμῶν ἴσοῦται μετὰ 10^{18} , μιὰ μονάδα μετὰ 10^{16} , μιὰ μονάδα τῶν τεσσάρων ἀριθμῶν ἴσοῦται μετὰ 10^{24} κλπ.

Ἡ δεύτερη βαθμίδα στὴν Lalitavistara περιλαμβάνει τὶς διάφορες διαδοχικὲς ἀριθμήσεις ἀντίστοιχα στὸν Ψαμμίτη ἔχουμε τὴν ἀκολουθία τῶν περιόδων τῶν ἀριθμῶν.

Ὅμως ἡ δομικὴ ὁμοιότητα ποὺ χαρακτηρίζει τὶς δύο αὐτὲς μαθηματικὲς πραγματεῖες, δὲν ἀκολουθεῖται ἀπὸ τὴν ἴδια μέθοδο. Οἱ Ἰνδοὶ εἶχαν παράδοση στὸ σχηματισμὸ κλιμάκων ὀνομασίας ἀριθμῶν, θέμα στενὰ συνδεδεμένο μετὰ τὴ γλώσσα τους καὶ τὴ λογοτεχνία τους. Ἡ παράδοση αὐτὴ ὑπογραμμίζεται —μέσα ἀπὸ τὴν διηγηματικὴ ἀφήγηση τοῦ κειμένου— μετὰ τὸν πρωταρχικὸ ρόλο τῆς Λογιστικῆς. Ἀντίθετα, ἂν καὶ ἡ ὀνομασία τῶν μεγάλων ἀριθμῶν ἦταν κατὰ τὸ ξένο γιὰ τὶς συνήθειες τῆς ἐλληνικῆς γλώσσας⁶⁰, ὁ «Ψαμμίτης» ἀποτελεῖ μιὰ καθαρὴ μαθηματικὴ πραγματεία, ἐνῶ παρά-

57. Σφαῖρα ποὺ ὑποθέτει ὁ Ἀρίσταρχος βλ. Ἀρχιμήδης, *op. cit.*, H 218, 1-4.

58. *ib.* H 258 15-20.

59. *ib.* H 239 1-20, H 240.

60. Geneviève Guitel, *Histoire comparée des numérations écrites*, chap. III, Grèce I, chap. IV, Les numérations alphabétiques, Grèce II, Paris 1975.

ληλα ἢ φιλοσοφικὴ πλευρὰ τοῦ θέματος δὲν ἀφήνει ἀδιάφορο τὸν συγγραφέα⁶¹.

Μέσα ἀπὸ τὴν συγκριτικὴ αὐτὴ μελέτη, θελήσαμε νὰ δείξουμε τὴν ὁμοιότητα ὀρισμένων Ἰνδικῶν μαθηματικῶν θεωριῶν μετὰ τὶς ἀντίστοιχες ἐλληνικὲς. Ὅμως πέρα ἀπὸ τὴ δομικὴ ὁμοιότητα ἡ ἴσως ἀκόμη καὶ «τὸ δανεισμὸ» τῶν θεωριῶν, ἐκεῖνο ποὺ ἔχει οὐσιαστικὴ σημασία εἶναι ὅτι τὰ πνεύματα τοῦ Πυθαγόρα καὶ τοῦ Ἀρχιμήδους μετασχηματίζονται καὶ ἀνακαλύπτουν μέσα ἀπὸ τὴν Ἰνδικὴ σκέψη τοὺς δικούς τους δρόμους, ἀναπτύσσοντας περισσότερο, ἐκεῖνο ποὺ ἐγίνετο τὸ κέντρο τῆς ἐλληνικῆς διανόησης, τὴ φιλοσοφία.

PYTHAGORAS, ARCHIMEDES AND INDIAN MATHEMATICAL THEORIES

Summary

The article deals with the parallelism between the theories of Pythagoras and Archimedes and the Indian theories of Sâmkhya and Lalitavistara.

The common points between the Pythagorean teachings and the older, Indian Sâmkhya philosophy are: the knowledge of the irrational numbers the doctrine of the five elements of matter, the founding of both teachings on the concept of number and others.

Archimedes, with his calculation in Psammites, and Lalitavistara have as a common aim the measurement of dust particles contained in the universe. They both specify an enumeration of numbers on two scales. The difference between these two mathematical treatises lies in their implementation. The Indians confine themselves solely to calculus whereas Archimedes adds a philosophical dimension.

Athens

Chr. Philis

IN : PHILOSOPHIA XV-XVI 156-71
recherche d'un parallélisme
entre ces théories

61. N. Lusin, *Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications*, Paris 1930, σελ. 322.