

1289
SZABO, A.
1984

C₃

145

Arpad Szabo

IL PITAGORISMO E LA MATEMATICA DEDUTTIVA

Nato in Ungheria 1913

Laureato in Filologia classica a Budapest 1935

Libero docente all'Università di Francoforte

1939

Titolare della cattedra di filologia classica
all'Università di Debrecen (Ungheria) tra 1940-
1951

Dopo il 1951 lo stesso all'Università di Buda-
pest.

Membro delle Accademie seguenti:

Accademia di Atene (1976)

Interdisciplinary Academy, Finland (1977)

Accademia Ungherese delle Scienze

Budapest (1979)

Hamdard Academy

Pakistan-Islamabad (1979)

Socio straniero dell'Accademia Lucchese di
Scienze, Lettere ed Arti (1982).

Ha scritto diversi libri in ungherese. Il suo li-
bro su "Gli inizi della matematica greca" fu
pubblicato nelle lingue seguenti: ungherese, te-
desco, francese, inglese, greco e giapponese. Il
suo ultimo libro sull'Astronomia e geografia ma-
tematica Greca fu pubblicato in tedesco dall'Ac-
cademia di Atene (1982).

* * *

Nello sviluppo della matematica vi fu un
momento di importanza fondamentale, nel qua-
le si compì una vera rivoluzione, maggiore forse
di qualunque altra, nel campo matematico,
compresi i giorni nostri. Si tratta di quello che si
potrebbe precisare come la trasformazione di co-
noscenze pratiche — acquisite induttivamente

nell'esercizio quotidiano — in una vera scienza
deduttiva. Secondo la tradizione antica *Pitagora*
stesso fu l'iniziatore, oppure il promotore di tale
mutamento sostanziale. Fino a quel tempo, la
matematica non era altro che una collezione di
conoscenze utili alla vita di ogni giorno. Egli in-
vece — come si legge — trasformò queste cono-
scenze in qualcosa di superiore, in un sistema di
qualità più elevata. Tali parole si leggono su *Pi-
tagora* nell'opera di *Proclo*, commentatore cele-
bre degli "Elementi" di *Euclide*.

Ma prima di parlare di questa rivoluzione
scientifica, si ascoltino le parole di *Aristotele* sui
discepoli di *Pitagora*. Si legge nella
"Metafisica":

"...i cosiddetti Pitagorici si dedicarono per
primi alle scienze matematiche, facendole pro-
gredire; e poiché trovarono in esse il proprio nu-
trimento, furono del parere che i principi di
queste si identificassero con i principi di tutte le
cose. I numeri occupano naturalmente il primo
posto fra tali principi, e i Pitagorici credevano di
scorgere in quelli più che nel fuoco o nella terra
o nell'acqua un gran numero di somiglianze con
le cose che esistono e sono generate... e indivi-
duavano, inoltre, nei numeri le proprietà e i rap-
porti delle armonie musicali e, insomma, pareva
loro evidente che tutte le altre cose modellassero
sui numeri la loro intera natura e che i numeri
fossero l'essenza primordiale di tutto l'universo
fisico; e per tutte queste ragioni, essi concepirono
gli elementi dei numeri come elementi di
tutta la realtà e l'intero cielo come armonia e nu-
mero".

Poiché, secondo *Aristotele*, i Pitagorici rintracciavano i principi di tutte le cose nei numeri, possiamo dire che, mentre i filosofi anteriori Greci (i Milesii) avevano scelto come principi primi concrete sostanze, i Pitagorici avevano concentrato la propria attenzione sull'aspetto formale dei fenomeni. Anche ammettendo che non siano stati essi i primi a individuare i rapporti numerici delle armonie musicali, è certo che si servirono di questa scoperta come di una delle principali esemplificazioni del ruolo dei numeri. Dato che gli intervalli di ottava, di quinta e di quarta potevano essere tutti espressi in termini di semplici rapporti numerici (2:1, 3:2 e 4:3), si verificava il caso sorprendente di fenomeni che, pur non avendo alcun rapporto apparente con i numeri, rivelavano una struttura esprimibile in termini matematici, per cui i Pitagorici pensarono che quel che era vero per gli intervalli musicali poteva ben valere anche per altri fenomeni, a condizione di saperne scoprire i rapporti matematici.

L'importanza di questa ricerca dei numeri nelle cose è evidente. I Pitagorici sono stati i primi pensatori ad aver tentato consapevolmente di dare alla conoscenza della natura una base *quantitativa e matematica*, inaugurando così quello che doveva essere uno sviluppo scientifico della massima importanza. Ma per situare storicamente la loro acquisizione, occorre aggiungere altre due cose. Innanzitutto i Pitagorici, lungi dal limitarsi a sostenere che la struttura formale dei fenomeni è esprimibile numericamente, ritennero che le cose stesse fossero composte di numeri: molti di loro affermavano, infatti, che le cose sono fatte di numeri — essendo questi concepiti come concreti oggetti — in contrasto cospicuo all'antisensualismo di un'altra scuola filosofica contemporanea nel Mezzogiorno d'Italia, quella eleatica.

In secondo luogo, molte delle analogie che i

Pitagorici sostenevano di aver trovato fra le cose e i numeri, erano del tutto fantasiose e arbitrarie, come — a quanto sappiamo — l'identificazione della giustizia col numero *quattro* (il primo, o per meglio dire, il secondo numero quadrato) e del matrimonio col *cinque* (che rappresenta l'unione dell'uomo con la donna, rispettivamente associati al tre e al due).

Del resto, sembra che appunto una tale identificazione delle cose con i numeri — benché attestata da *Aristotele* — non sia stata la genuina e veramente importante teoria Pitagorica. Può darsi, che questa identificazione volgarizzi soltanto la dottrina di *Pitagora*. In ogni caso, fu più importante dal punto di vista dello sviluppo scientifico posteriore, un altro passo pitagorico, cioè, il loro passaggio da una *geometria ancorata alla materia* — tale era originariamente la geometria di falegnami, di fabbri, di agrimensori e di tecnici — a una *geometria di precisione degli enti idealizzati*: punto senza dimensione, linea senza larghezza e superficie senza spessore. — Siamo tutti abituati a considerare, fin da ragazzi, questa geometria di precisione (punto, linea, superficie), ma ci possiamo render conto, tuttavia, che un tale passaggio a questi che chiameremo *enti geometrici idealizzati*, segna effettivamente un punto di svolta incalcolabile.

È immediato il legame logico intercorrente tra l'introduzione degli enti geometrici idealizzati e la scoperta di cosiddette *linee incommensurabili*. E tutte le testimonianze concordano nell'indicare come prima scoperta di linee incommensurabili quella del lato e della diagonale di qualsiasi quadrato. Che cosa significa dire che lato e diagonale del quadrato sono incommensurabili? Significa dire che non è possibile misurare l'una con l'altro: che non è possibile, cioè, di trovare un sottomultiplo del lato che sia contenuto esattamente, un numero intero di volte nella diagonale: che non esiste, cioè, un pur pic-

colo segmento di retta che sia contenuto esattamente, numeri interi di volte, tanto nel lato quanto nella diagonale del quadrato: lato e diagonale non hanno un sottomultiplo comune, cioè non hanno una misura comune, sono incommensurabili.

Ma aspettiamo qui un poco. Il mutamento rivoluzionario nella storia della matematica avviene quando diventano materia della matematica stessa non più gli oggetti percepiti dai sensi, ma cose che possono essere comprese solo dal pensiero. Tali sono gli "enti idealizzati", e non soltanto il *punto*, la *linea*, la *superficie* e in genere gli elementi della geometria, ma anche i *numeri*. Questo mutamento rappresenta senza dubbio un allontanarci dal mondo delle cose percepibili con i sensi, e un volgersi al mondo dell'astrazione, alla filosofia. Solo in base alla riflessione filosofica si può ammettere l'esistenza di cose che non sono accessibili alla percezione sensoriale, come ad esempio "i punti senza estensione", e l'"incommensurabilità" stessa. Ed è solo questo mutamento che rende possibile la *dimostrazione* matematica.

Mi sembra che tale modificazione della scienza, cioè, la trasformazione della matematica in un sistema deduttivo, deve essere in qualche modo il risultato della collaborazione di due indirizzi filosofici, la scuola *eleatica* e la scuola *pitagorica*. Penso addirittura che, risalendo all'origine, siamo in grado di distinguere, con sufficiente approssimazione, la parte che ciascuna delle due correnti filosofiche ha avuto nella fondazione della matematica sistematica.

È noto come l'allontanarsi dalla percezione sensoriale delle cose assunse logica espressione nella filosofia della scuola di Elea. *Melisso*, uno dei filosofi eleatici che possiamo più facilmente seguire, scrisse: "Noi crediamo di vedere, udire e percepire correttamente, e tuttavia ci sembra che il caldo diventi freddo e il freddo caldo, il

duro molle e il molle duro, che il vivente muoia e che dal non vivente nasca la vita e che accadano tutti questi mutamenti e che niente di quello che era e che adesso è sia uguale a sé, anzi il ferro, nonostante la sua durezza, si consuma a contatto con le dita, come se fosse fluido e così l'oro e la pietra e tutto quello che di solito è considerato solido, e dall'acqua si formano la terra e la pietra. Ne risulta che (attraverso la percezione dei sensi) non vediamo né possiamo conoscere le cose come veramente sono".

Le percezioni sensoriali non corrispondono dunque alle nostre attese logiche. Ci si potrebbe aspettare che un determinato oggetto, che in base alle nostre sensazioni è fatto in un certo modo, rimanga in ogni momento identico a se stesso. Come verrà detto più tardi nella logica "*A est A*" e "*A non est non-A*". Ogni cosa può essere solo identica a se stessa e non identica a un'altra. Ma le percezioni sensoriali sono in contrasto con questa aspettativa logica. "Poiché anche la cosa più dura, ferro o pietra che sia, è al tempo stesso fluida: come all'inverso la cosa più liquida, l'acqua, si trasforma in terra e pietra". In base alle sensazioni un oggetto non è soltanto identico a se stesso ma è anche identico a un altro. È qualcosa e non lo è — lo stesso e non lo stesso. Di quale oggetto si può affermare dunque che è veramente? — Secondo l'insegnamento della scuola eleatica ciò è valido soltanto per quella astrazione che la scuola definisce come "l'Essere".

Io credo che basti ricordare questo insegnamento eleatico per notare immediatamente come la semplice astrazione dell'Essere eleatico assomigli al "*punto elastico dimensione*" della matematica. In realtà questi due concetti — l'Essere eleatico e il punto (senza dimensione) — possono essere afferrati solo dal pensiero. Per la percezione sensoriale essi non sono assolutamente accessibili. Lo stesso vale anche per il concetto di "in-

commensurabilità". Quest'ultimo concetto in realtà è in contraddizione con qualsiasi percezione dei sensi. La percezione sensoriale può tutt'al più avvertire qualcosa di "piccolissimo". Ma l'idea di incommensurabilità nega assolutamente la possibilità che esista qualcosa di "piccolissimo".

La "matematica di precisione", di cui si parla qui, presuppone naturalmente la dimostrazione. Questo tipo di scienza è *esatta* - in contrasto con le capacità pratiche degli artigiani fondate sulla esperienza - proprio perché la matematica deduttiva può basare i propri insegnamenti, cioè può documentare che le sue affermazioni enunciate sono *necessariamente vere*.

Se tuttavia si pensa che, secondo l'insegnamento della scuola eleatica, la percezione sensoriale è ingannevole e che i nostri organi di senso sono testimoni infidi, allora la "dimostrazione" - nel senso comune della parola - diventa improvvisamente problematica. Come possiamo convincerci della verità se tutto quello che conosciamo attraverso i sensi è solo un'apparenza ingannevole (in greco δόξα)? L'insegnamento eleatico conosce una unica vera asserzione: "l'Essere è" (τὸ ὄν ἔστιν). Per il resto i filosofi eleatici potevano confutare qualsiasi altra asserzione, poiché avevano dimostrato come ogni affermazione contiene una contraddizione. Fra i molti argomenti che Zenone poteva addurre contro il movimento si trova ad esempio il seguente ragionamento: il movimento non può essere che un'apparenza ingannevole, dato che non possiamo afferrarlo con il pensiero. Perché dove in realtà potrebbe avvenire il movimento di un corpo mosso? Esistono evidentemente solo due possibilità: o là dove è il corpo, o là dove non è. Ma là dove è, naturalmente non può muoversi - e ancor meno ciò può avvenire dove non è. Dunque il pensiero logico non può afferrare il movimento.

Come è noto il metodo abituale della dimostrazione dei filosofi elatitici si basava sulla *confutazione*. Essi hanno dimostrato che l'asserzione, che volevano confutare, porta alla contraddizione (contraddice se stessa), e perciò deve essere falsa. Se tuttavia una qualsiasi affermazione è falsa, ciò significa che il suo contrario deve essere vero. Questo tipo di argomentazione si chiama *prova indiretta*, o in latino: *reductio ad absurdum*. La dialettica dei Greci - che conosciamo soprattutto dalle opere di Platone, e il cui primo sostenitore fu - secondo un'annotazione di Aristotele - Zenone di Elea, si basa in fondo sempre su questo genere di argomentazione.

Ma prendiamo ora in considerazione la *dimostrazione matematica*, che in greco è indicata col verbo *deiknymi*. Dato che questa parola significa in origine "mostrare", "indicare col dito", "rendere visibile", bisogna supporre che in origine anche in matematica la dimostrazione fosse un modo concreto di rendere visibile dei dati di fatto. Benché in realtà non incontriamo mai presso i matematici greci una dimostrazione di questo genere, ottenuta indicando concretamente una realtà, è quasi sicuro che in un primo tempo questa deve essere stata la via abituale del dimostrare, soprattutto nell'insegnamento. Anche Socrate - in un dialogo di Platone - mostra a un semplice schiavo indotto come si può raddoppiare la superficie del quadrato con la sua diagonale.

Una volta tuttavia che si è riconosciuto che non ci si può fidare degli organi della vista, dell'udito, del tatto, e che la percezione dei sensi è ingannevole, non potrà essere più soddisfacente neppure la dimostrazione che ne deriva. Poiché gli oggetti della matematica - gli "enti idealizzati" - non sono più visibili propriamente secondo la nuova interpretazione.

Infatti la matematica ha sviluppato, secondo il modello della dottrina eleatica, la *reductio ad*

absurdum, la dimostrazione indiretta come propria caratteristica forma di dimostrazione. È Platone stesso che descrive la prova indiretta come dimostrazione matematica per eccellenza. La incommensurabilità della diagonale con il lato del quadrato fu ad esempio dimostrata basandosi sul ragionamento seguente:

Se il lato e la diagonale fossero commensurabili, si potrebbe facilmente dimostrare, secondo l'insegnamento pitagorico, che lo stesso numero dovrebbe essere sia pari che dispari. Ma un numero simile non esiste per *definitionem*. L'assurdo cui conduce la dimostrazione, indica che la premessa da cui siamo partiti - lato e diagonale del quadrato *come commensurabili* - era errata. La confutazione di questa asserzione equivale alla dimostrazione del suo contrario: quindi le due grandezze *non sono commensurabili*. In questo modo è provato un dato di fatto - la incommensurabilità - la cui esistenza non può essere percepita nel mondo materiale per mezzo degli organi di senso e che può essere colto solo per mezzo del pensiero.

Sembra quindi che in matematica tanto l'allontanarsi dalle cose percepite con i sensi - il fatto dunque che materia di questa scienza siano diventati gli "enti idealizzati" - quanto la necessità della dimostrazione astratta e la preferenza per la dimostrazione della *reductio ad absurdum* siano da attribuirsi all'influsso della filosofia eleatica.

La "matematica di precisione" rappresenta anche un ulteriore sviluppo creativo dell'insegnamento eleatico. Ciò è reso evidente soprattutto dalle seguenti argomentazioni dell'antico commentatore degli Elementi, Proclo:

"Poiché sosteniamo che la scienza della geometria si basa su presupposti e partendo da determinati principi trae le sue deduzioni... l'autore di un libro di geometria elementare deve insegnare i principi della scienza separatamente

dalle deduzioni. Quanto ai principi egli non è tenuto a renderne ragione, ma deve farlo per le deduzioni che ne derivano..."

Presupposto necessario e irrinunciabile della "scienza deduttiva" è infatti la rigida distinzione: da un lato stanno i principi non dimostrati e dall'altra parte deduzioni, teoremi e costruzioni dimostrate, che da questi derivano. Non occorre qui approfondire oltre al problema aristotelico, se i principi non dimostrati della geometria siano in realtà "indubbiamente veri", o sarebbe pensabile forse anche il loro contrario; se è possibile soltanto la geometria euclidea o se sia possibile anche la geometria non-euclidea. Infatti in *Euclide* le definizioni, i postulati, e gli assiomi vengono posti senza tentare di dimostrarli - sono questi i principi della sua geometria.

Se cerchiamo di trovare una risposta alla domanda: come si è scoperta la necessità della distinzione fondamentale fra i principi *non dimostrati* e le deduzioni *dimostrate*, si deve ovviamente pensare alla dialettica che si era sviluppata presso i Greci sul modello di Zenone di Elea. In questo stesso senso anche Socrate, in Platone, espone una volta il suo metodo di ragionamento: "lo pongo sempre a base della mia ricerca una asserzione che considero particolarmente valida e quando ho l'impressione che qualcosa sia in accordo con l'affermazione posta come base, la considero vera. Ciò che invece non sembra accordarsi io lo considero non vero".

Come Socrate pone un determinato logos senza dimostrazione alla base del suo ragionamento - dopo che questo gli sembra indiscutibilmente evidente - così anche in geometria si comincia con principi non dimostrati ma evidenti per se stessi.

Questa dialettica greca che si era sviluppata sul modello di Zenone di Elea poteva naturalmente arrivare da sola, indipendentemente da qualsiasi attività matematica, alla conclusione

che in una dimostrazione razionale vanno sem-
pre poste come base affermazioni che sono state
accettate ugualmente dai due interlocutori. Ma
non è verosimile che ci sia domandato senza in-
teresse *matematico*: "Quali presupposti semplici
si possono porre alla base di una dimostrazione
matematica, per esempio nella geometria
piana?" - soltanto studiosi che si interessano sia
alla matematica che al sistema della dimostrazio-
ne eleatica (cioè alla dialettica) possono porsi
questo genere di domande.

Perciò penso che tali principi matematici, co-
me ad esempio le *definizioni*, i *postulati*, e gli
assiomi, formulati da *Euclide* all'inizio dei suoi
Elementi, benché siano stati sollevati per la pri-
ma volta dalla filosofia *eleatica*, sono stati per-
tutt'oggi individuati dai *pitagorici*. Come è noto, anche

due le scuole filosofiche - eleatica e pitagorica
- erano attive contemporaneamente in Magna
Grecia. È così verosimile che l'influsso dell'elea-
tismo sulla matematica ebbe la sua origine stori-
ca nella Magna Grecia. Fu lì che i rappresentanti
dell'eleatismo e di Pitagorica, precisi cultori
della matematica, ebbero i loro conati storici.

LETTERATURA

ARPAID SZABO, *Les débats des mathématiques grec-
ques*, Vrin Paris, 1977.

ATTILIO FRASESE, ARPAID SZABO, *Gli inizi della mate-
matica di provenienza nella Magna Grecia* (in "Megale
Hellas", Libri Scheiwiller, Milano 1983).

G. E. R. LLOYD, *La scienza dei Greci*, Laterza, 1978.

IN: PITAGORA 2000

P. 456-465