

L'évolution de la pensée mathématique dans la Grèce ancienne¹

« On imagine aisément », dit G. Milhaud dans son excellent petit livre sur *la Pensée scientifique*, « ce qu'il faudrait penser d'un homme qui prétendrait connaître l'esprit grec dans ses traits essentiels et qui n'aurait lu Homère ni Platon, ou qui ignorerait l'existence des chefs-d'œuvre de Phidias. Par quelle étrange inconséquence croit-on généralement pouvoir laisser de côté, lorsqu'on étudie les Grecs, une des œuvres où ils ont le plus fortement marqué leur empreinte, œuvre sinon éternelle, du moins aussi solide et durable que peut l'être une création humaine : œuvre achevée au point que les travaux de deux mille ans apparaissent comme le développement normal des germes qu'elle contenait ? Nous voulons parler de leur géométrie ».

J'irai plus loin même que Milhaud et le terme de « miracle grec » ne me paraît nulle part plus justifié que lorsqu'il s'applique à l'apport des Grecs dans le domaine de la pensée scientifique : car les civilisations qui les ont précédés, ou qui ont évolué parallèlement (comme celles de l'Inde et de la Chine) nous ont laissé d'admirables témoignages de leur art, de leur littérature, voire de leur philosophie, qui peuvent à plus d'un titre rivaliser avec ceux que nous devons aux Grecs. Au contraire, c'est à ces derniers seuls qu'il revient d'avoir dégagé l'esprit scientifique de ce qui n'était avant eux qu'un amas de recettes pratiques ou magiques, et d'avoir créé de toutes pièces le moteur essentiel de la science : la pensée déductive.

Quoi de plus attachant, pour l'humanisme tel que nous l'entendons, que d'assister à cette naissance de la science, pour autant que nous puissions le faire à travers les textes qui nous sont parvenus. C'est ce moment capital de la pensée humaine que je voudrais tenter de vous retracer dans ses grandes lignes.

Dans toutes les civilisations qui méritent ce nom, on observe de bonne heure la formation de notions d'ordre mathématique qui sont indissolublement liées aux nécessités de la vie sociale : qu'il s'agisse de construire des maisons ou des temples, de mesurer des champs ou de dénombrer des trou-

1. Conférence donnée à la section de Nancy de l'Association Guillaume Budé, le 25 février 1950, par M. Jean DIEUDONNÉ, professeur à la Faculté des Sciences de Nancy.

1340

DIEUDONNÉ, J.

1951

— 7 —

peaux, d'observer les retours des phénomènes célestes ou de se livrer au commerce, il faut constamment faire usage des notions de nombre, d'espace, de temps et des liens qu'elles ont entre elles. Le seul fait de dégager ces notions déjà abstraites, et de les manier avec assez de sûreté pour répondre aux exigences pratiques témoigne déjà certainement d'un très grand progrès intellectuel, dont la comparaison avec les peuplades primitives (chez qui souvent la notion de nombre ne s'étend pas au delà de quelques unités) peut nous donner une idée. En simplifiant à l'excès, on peut dire que cet effort consiste déjà à réduire le *qualitatif* au *quantitatif*, à introduire dans notre idée du monde le concept de mesure.

Tout cela, nous le trouvons, et fort développé, dans les civilisations égyptienne et babylonienne, plusieurs millénaires avant les Grecs. Grâce aux efforts des égyptologues et des assyriologues, nous pouvons maintenant déchiffrer des manuels étendus de connaissances d'ordre mathématique, très comparables en substance avec ce qui est encore communément enseigné dans nos écoles primaires, et même un peu au delà. Ces ouvrages se présentent comme des catalogues de problèmes, dont la solution est donnée sous forme de recette indiquant la succession des opérations à effectuer à partir des données, ce qui prouve d'ailleurs qu'une sorte d'algèbre rudimentaire avait certainement dû se développer, et qu'une classification des problèmes s'était déjà fait jour — analogue à celle qui reste en honneur dans notre enseignement élémentaire, quand on apprend aux enfants les méthodes types pour résoudre des problèmes de mélanges ou de courriers. Quant à la géométrie, elle se présente aussi comme un recueil de formules visiblement empiriques, ne visant qu'à une évaluation approchée des mesures cherchées; et on peut en dire autant de l'astronomie.

Le caractère commun à ces mathématiques préhelléniques, c'est leur absence totale de tout côté théorique; conçues en vue de fins utilitaires, elles paraissent être considérées comme pleinement satisfaisantes dès qu'elles permettent d'y parvenir; de réflexions sur le pourquoi des choses, sur leur nature profonde et leurs rapports cachés, on ne trouve aucune trace. Si on songe que cet état de choses s'est prolongé durant des millénaires et dans des civilisations fort diverses, rien n'empêche de concevoir que l'évolution scientifique eût pu se poursuivre indéfiniment dans ce sens, entassant empiriquement connaissances sur connaissances, sans y opérer plus qu'un tri superficiel. Dans une telle civilisation,

le mot de mathématicien serait resté synonyme de celui de calculateur, ce qu'il est peut-être encore d'ailleurs chez plus de contemporains qu'on ne croit, et même chez beaucoup de gens dits cultivés.

C'est le point où éclate l'originalité des Grecs : à eux revient l'honneur d'avoir su les premiers détacher leur pensée de la fin utilitaire immédiate, de s'être posé des questions pour le seul plaisir de satisfaire leur curiosité, et d'avoir tenté de démontrer les rouages de l'univers sans autre désir que de mieux admirer leur beauté. Dédain des contingences, passion de l'absolu, n'est-ce pas sous ces traits fondamentaux qu'il faut grouper, aussi bien l'admirable sens esthétique des Grecs que leur incomparable dialectique, leur quête inlassable du Beau et du Vrai ?

Mais l'absolu que poursuivent les Grecs n'est pas un absolu mystique et plus ou moins anthropomorphique comme dans tant d'autres civilisations ; c'est un principe abstrait à peu près entièrement intellectualisé et dégagé de caractères affectifs ; enfin et surtout, tout doit s'en déduire par le secours de la seule raison, au moyen d'un enchaînement rigoureux de propositions ne laissant pas de prise au doute. Généralité, abstraction, méthode déductive, ce sont les caractères essentiels qui différencient les Grecs de leurs devanciers, et qui apparaissent avec le plus de netteté dans leur mathématique.

Ces trois caractères sont d'ailleurs étroitement liés. Si le mathématicien grec (et à sa suite les modernes) ne s'intéresse qu'aux propositions *générales*, c'est qu'il cherche la raison profonde cachée sous l'incohérence des contingences particulières. C'est ainsi que, dans toutes les civilisations anciennes, on avait remarqué très tôt que le triangle de côtés 3, 4 et 5 est rectangle, et on avait utilisé cette observation pour l'arpentage ou l'architecture. Mais il faut attendre les Grecs pour « donner raison » de cette propriété, en la faisant rentrer dans le théorème général dit « théorème de Pythagore » d'après lequel les triangles rectangles sont caractérisés par le fait que le carré de l'hypoténuse est la somme des carrés des côtés de l'angle droit. De même, les Babyloniens savaient inscrire un hexagone régulier dans un cercle en reportant le rayon sur la circonférence ; les Grecs chercheront à obtenir des constructions analogues pour les polygones réguliers d'un nombre quelconque de côtés. Il serait facile de multiplier ces exemples.

A plus forte raison l'*abstraction* mathématique est inséparable du raisonnement déductif. Il importe peu au mathé-

maticien grec que la figure de géométrie sur laquelle il raisonne soit réalisée sur le sable ou sur une tablette, sur la cire ou le parchemin ; ce qu'il étudie, c'est la droite indéfinie, le cercle idéal, le triangle abstrait. On parle souvent à ce propos, et Euclide tout le premier, de « lignes sans épaisseur », de « points sans étendue », expressions qui prises à la lettre n'ont guère de sens, et ne sont sans doute que l'écho de querelles d'ordre métaphysique. En réalité, ce qu'elles cherchent à exprimer, de cette façon paradoxale pour le sens commun, c'est l'essence même de la méthode déductive : le concept sur lequel on raisonne n'est plus que le reflet de l'être géométrique de l'intuition : pour mieux dire, c'est le support abstrait d'un faisceau de propriétés en petit nombre, admises comme prémisses, et dont il s'agit de déduire toutes les autres par le secours de la seule logique. Par exemple, le « cercle » du géomètre est tout autre chose que le « rond » de l'intuition : il est caractérisé par l'unique propriété qu'ont tous ses points d'être à la même distance d'un point fixe ; et c'est uniquement à cette propriété qu'il faudra faire appel pour démontrer les théorèmes concernant le cercle, tel que, par exemple, l'égalité des angles inscrits à un même arc.

Tous ceux qui ont pénétré tant soit peu dans ce domaine de la raison souveraine savent quelle émotion esthétique peut procurer la contemplation de cet échafaudage aérien de déductions ingénieusement agencées. Comment s'étonner que les Grecs, si sensibles à la beauté sous toutes ses formes, se soient particulièrement enthousiasmés pour la pureté immatérielle de la mathématique, et que cette dernière ait si profondément influencé toute une partie de leur philosophie ? Il est visible en effet que la nature même de la mathématique grecque nous amène tout près, entre autres, des Idées platoniciennes. A vrai dire, il est à peu près impossible, pendant les deux premiers siècles du développement de la pensée scientifique grecque, de dissocier les mathématiques de la philosophie : cosmogonie, morale, logique, mathématiques proprement dites, sont abordées à la fois, souvent par les mêmes hommes, et ne cessent de réagir les unes sur les autres. Le temps et la compétence me manquent pour essayer de vous retracer, dans la mesure du possible, cet enchevêtrement de systèmes rivaux ou complémentaires qui fleurissent sans interruption du VII^e au IV^e siècle avant notre ère ; je m'en tiendrai essentiellement à l'évolution de la pensée mathématique proprement dite, en indiquant ça et là les influences qu'elle a subies ou exercées.

Les premières tentatives de réflexion philosophique appa-

raissent au VII^e siècle en Ionie, avec Thalès, Anaximandre et Anaximène. Leurs systèmes sont avant tout des cosmogonies : avec la hardiesse que peut seule procurer l'ignorance de la complexité des problèmes abordés, ils s'attaquent d'emblée à l'explication de tout l'univers par un principe unique. C'est cette volonté d'explication rationnelle qui paraît spécialement intéressante, surtout quand, chez Anaximandre, le plus remarquable sans doute de ces penseurs, le principe explicatif invoqué est déjà particulièrement abstrait. Malgré quelques traditions douteuses sur Thalès, il ne semble pas qu'on puisse leur attribuer encore de mathématique à proprement parler ; mais il est hors de doute que leurs efforts philosophiques créaient le climat intellectuel propice à l'éclosion qui se produisit au siècle suivant.

C'est cette éclosion que nous aimerions pouvoir suivre dans le détail ; nous voudrions voir s'effectuer peu à peu le double travail d'analyse et de synthèse consistant à ranger en une chaîne logique irréprochable les propriétés des nombres et des figures géométriques. Malheureusement, il s'agit là de la période la plus mal connue peut-être de toute l'histoire de la pensée. La seule chose que nous sachions de façon certaine, c'est que les mathématiques prennent naissance aux VI^e et V^e siècles, dans la Grande Grèce, au sein de l'école pythagoricienne. Mais cette école est surtout une secte, pratiquant une sorte de religion de salut fortement teintée d'influences orientales, où la pratique des mathématiques n'était peut-être pour les adeptes qu'un genre d'ascèse ; secte dont, au surplus, les dogmes et les mystères sont jalousement préservés par le secret le plus absolu imposé aux fidèles. Le résultat, *infaillible en de telles circonstances*, c'est que le peu qui a filtré dans la littérature contemporaine ou postérieure, concernant les premiers Pythagoriciens, se présente le plus souvent comme un fatras de racontars où les faits légendaires ou miraculeux se mêlent inextricablement à l'écho des événements réels. L'existence même du fondateur et éponyme de l'école, le Samien Pythagore, n'est nullement certaine, et sa soi-disant biographie n'est qu'un tissu de légendes, incontrôlables ou invraisemblables. On n'est guère mieux renseigné sur le développement historique de la secte, mêlée, semble-t-il, aux troubles sociaux qui agitent la Grande Grèce vers la fin du VI^e siècle, et qui amènent son expulsion et sa dispersion vers cette époque. C'est sans doute alors que l'essentiel de la mathématique pythagoricienne commence à être divulgué, et ce premier corpus mathématique, dont l'ensemble a été restitué par les érudits modernes à partir de

documents légèrement postérieurs, peut être considéré comme assez bien délimité.

Une première constatation s'impose quant à la forme prise par la mathématique pythagoricienne telle que nous la connaissons : les caractères essentiels que nous avons relevés ci-dessus — *généralité, abstraction, raisonnement déductif* — y règnent déjà sans partage. En particulier, il est déjà fait grand usage d'un mode de raisonnement demeuré fondamental en mathématiques, la démonstration « par l'absurde », où on prend pour hypothèse la négation de la proposition à trouver, et on prouve l'absurdité des conséquences qu'on en tire ; nous en verrons un bel échantillon dans un instant. Il est à peine besoin de rappeler avec quelle prédilection ce raisonnement devait être employé par les philosophes contemporains, dans des conditions d'ailleurs souvent beaucoup moins justifiées qu'en mathématiques, avant d'être codifié par Aristote au siècle suivant.

Ce style implacablement rigoureux, s'il excite notre admiration pour sa perfection logique et est admirablement adapté à l'exposition des théories mathématiques, nous laisse malheureusement dans l'ignorance des méthodes par lesquelles les Pythagoriciens étaient parvenus à leurs découvertes. D'assez nombreuses traditions conduisent toutefois à des reconstitutions assez plausibles de leurs idées. On peut sans doute les grouper autour du problème central de la *mesure des grandeurs*.

Cette notion était, bien entendu, couramment employée pour des fins pratiques par les Babyloniens et les Egyptiens. Si on a deux grandeurs de même espèce, par exemple deux longueurs A, A', trouver leur rapport c'est diviser A en un nombre de parties égales telles que A' soit exactement égale à un nombre entier de ces parties : par exemple si A est divisée en 5 parties égales, et que A' est formée de 7 de ces parties, le rapport de A' à A est 7/5. Qu'il soit toujours possible de faire cette opération de subdivision exacte de A et A' en parties égales, c'est ce dont les mathématiciens préhéléniques, et aussi, au début sans doute, les Pythagoriciens eux-mêmes, ne semblent pas avoir douté, tant la chose tombe sous le sens tant qu'on n'envisage que le calcul pratique. Admettant donc implicitement ce postulat, et poussés par ailleurs par leurs premières expériences d'Acoustique, ils auraient ainsi ramené tout le problème de la mesure des grandeurs à l'étude des nombres entiers et de leurs rapports ; et c'est là sans doute le sens de la célèbre devise attribuée à Pythagore : « toutes choses sont nombres ».

La mathématique pythagorienne est donc avant tout à ses débuts une arithmétique. Mais son esprit est déjà tout autre que celui des calculateurs orientaux; une des questions centrales autour de laquelle s'ordonnent tous ses théorèmes est sans intérêt pour le calcul pratique : c'est l'expression d'un rapport comme quotient de deux entiers aussi petits que possible, ou, comme nous disons aujourd'hui, la réduction d'une fraction à sa plus simple expression. Ce problème (sans doute suggéré par les relations entre accords consonants et rapports « simples ») consiste en somme à trouver la plus grande mesure commune de deux grandeurs A , A' ; le procédé imaginé par les Pythagoriciens pour le résoudre, aussi simple qu'ingénieux, est ce que nous appelons l'« algorithme d'Euclide »; si par exemple $A < A'$, on retranche de A' un multiple de A aussi grand que possible; la grandeur restante B est alors 0 ou $< A$, et la plus grande mesure commune à A et A' est aussi la plus grande mesure commune de A et B . On recommence alors en retranchant de A le plus grand multiple de B , et comme les restes qu'on obtient ainsi sont des multiples entiers de plus en plus petits de la plus grande mesure commune à A et A' , le procédé se termine au bout d'un nombre fini d'opérations, et de façon précise, à la première fois qu'on obtient un reste nul.

Un second caractère de cette arithmétique pythagoricienne est que, bien qu'abstraite dans son exposé, elle est encore, dans ses méthodes de découverte, en lien étroit avec la théorie de la mesure des grandeurs spatiales d'où elle est sans doute issue. C'est ainsi que, poursuivant les traditions babyloniennes, les Pythagoriciens envisagent un produit de deux entiers (ou de deux rapports) comme une mesure d'un rectangle : principe de découverte qui se montre très fécond entre leurs mains : par exemple, ils montrent ainsi que la somme des n premiers nombres impairs est n^2 , en décomposant le carré de côté n en « gnomons » dont les surfaces successives sont mesurées par les n premiers nombres impairs



Fig. 1.

(fig. 1). Nous avons de nombreuses allusions à cette représentation « figurée » des nombres, ou, comme on dit encore, cette « arithmo-géométrie »; il s'y rattache par ailleurs de nombreuses spéculations d'allure mystique sur les nombres, trait commun à toutes les civilisations primitives, qui semble avoir été cultivé avec faveur dans certains cercles pythago-

riciens; nous ne nous arrêterons naturellement pas à de semblables enfantillages, qui se poursuivent, hélas, jusque chez Platon, et que nous n'avons cités que pour montrer combien, en dépit de ses pas de géants dans la formation de l'esprit scientifique, le Pythagorisme reste encore proche, par certains côtés, des traditions antérieures.

Quant à la géométrie proprement dite, il est assez vraisemblable qu'elle soit, elle aussi, chez les Pythagoriciens (et sans doute déjà chez leurs prédécesseurs ioniens), dérivée de notions se rattachant à la mesure des grandeurs, et notamment à la *similitude* des figures (notion intuitivement claire, et qui n'offrirait pas de difficulté tant qu'on admettait la commensurabilité des grandeurs). Il semble, en tous cas, que c'est par de telles considérations qu'était démontré initialement (comme il l'est encore dans notre enseignement élémentaire) le théorème central de la théorie, que nous connaissons encore aujourd'hui sous le nom de « théorème de Pythagore ». Toute démonstration de cette nature suppose d'ailleurs l'existence de toute une série de propositions géométriques antérieures, notamment sur la théorie des parallèles, et aussi, bien entendu, d'une série de postulats de base clairement formulés; il est certain que dès le milieu du ve siècle, la géométrie grecque avait atteint ce niveau, ce qui est particulièrement remarquable si on songe à la difficulté qu'a dû présenter cette mise en ordre logique d'un écheveau de propositions d'une complexité bien plus grande que celles de l'arithmétique. Il y a plus, car, partant du théorème de Pythagore, les Pythagoriciens et leurs successeurs immédiats savaient résoudre des problèmes difficiles de construction géométrique par la règle et le compas (telle l'inscription du pentagone régulier dans un cercle, qu'ils considéraient comme un de leurs plus beaux succès), ou effectuer des évaluations ingénieuses d'aires, courbes comme les lunules d'Hippocrate.

Arrivées à ce point d'un développement aussi brillant, les mathématiques grecques vont cependant subir une crise extrêmement sérieuse, d'où elles ne sortiront qu'après un siècle d'efforts. C'est que le superbe édifice logique monté par les Pythagoriciens recelait une contradiction interne, que va faire apparaître la confrontation de leur géométrie et de leur arithmétique.

Nous avons vu en effet que toute la Mathématique pythagoricienne repose sur le postulat — sans doute implicitement admis — de la commensurabilité des grandeurs de même espèce; la recherche des rapports simples entre deux telles

grandeurs étant un des principaux objectifs de l'école, il était naturel qu'on se préoccupât entre autres de l'évaluation du rapport entre la diagonale d'un carré et son côté, par exemple par le procédé de l'algorithme d'Euclide.

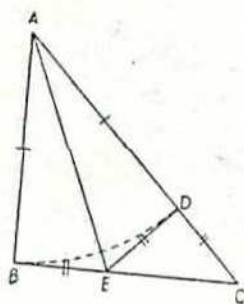


FIG. 2.

Or celui-ci conduit aussitôt à une impossibilité : en effet (fig. 2) si $AD = AB$, on a, dans les triangles rectangles ABE, ADE, $AB = AD$, AE commun, d'où $BE = ED = DC$, le triangle rectangle CDE étant isocèle ; autrement dit, une fois fait le premier pas de l'algorithme (retrancher de AC le plus grand multiple de AB, ici $AD = AB$), le second pas, qui consiste à retrancher de BC le plus grand multiple de DC, revient aussi à retrancher de EC le plus grand multiple de DC, c'est-à-dire le même problème que le problème initial, mais pour un triangle plus petit ; si le processus s'arrêtait (comme il devrait le faire si AC et AB étaient commensurables), on aboutirait à un triangle rectangle isocèle où le côté de l'angle droit et l'hypoténuse seraient égaux.

Le théorème de Pythagore permet d'ailleurs de donner une autre démonstration de cette impossibilité, par « réduction à l'absurde » : le rapport de AC à AB étant supposé mis sous forme irréductible p/q , la relation $AC^2 = 2AB^2$ donne $p^2 = 2q^2$; $p = 2p'$ est donc pair, d'où $q^2 = 2p'^2$ et par suite q aussi est pair, ce qui est absurde, puisque 2 ne peut diviser à la fois p et q d'après l'hypothèse.

Cette découverte se place vraisemblablement dans la 2^e moitié du V^e siècle, et est attribuée aux Pythagoriciens. Elle va faire l'objet d'études assidues à Athènes, parmi les mathématiciens de l'entourage de Platon. Il est superflu de rappeler ici le rôle éminent que Platon assigne dans sa philosophie aux mathématiques, qui le fascinent visiblement, et auxquelles il doit peut-être ses conceptions essentielles ; ses écrits témoignent d'ailleurs d'une compréhension parfaite des méthodes et des problèmes de la science mathématique de son temps. Mais, en dépit de témoignages de disciples tardifs, il semble bien que Platon n'ait jamais été plus qu'un mathématicien amateur, à qui aura toujours manqué le don d'invention qui fait le vrai mathématicien. En tout cas, il est hors de doute que les mathématiques sont assidûment cultivées dans le cercle de ses amis et disciples, et qu'il s'y trouve

au moins deux mathématiciens de premier ordre : son contemporain et ami Théétète (auquel Platon a dédié un dialogue), et Eudoxe de Cnide, un peu plus jeune. Tous deux s'attaquent au grand problème de l'heure, posé par la découverte de ces rapports « inexprimables » ($\alpha\lambda\omicron\gamma\omicron\varsigma$) que nous nommons maintenant les irrationnelles. Tandis que Théétète donne une classification très poussée des plus élémentaires d'entre elles (si, comme il paraît probable, il faut lui attribuer la substance du Livre X d'Euclide, consacré à cette classification), Eudoxe, par un rare tour de force, parvient à donner de nouveau un fondement solide à la géométrie pythagoricienne, ébranlée de fond en comble par l'existence des rapports incommensurables.

Les conceptions géniales d'Eudoxe n'ont vraiment été appréciées à leur juste valeur que dans la seconde moitié du XIX^e siècle, au moment de la grande révision critique des mathématiques modernes : elles s'apparentent en effet aux méthodes les plus hardies de l'axiomatique contemporaine.

Pour les Pythagoriciens, le rapport de deux grandeurs est défini *a priori* comme rapport de deux entiers, les mesures des grandeurs considérées à l'aide d'une commune unité ; cette dernière n'existant pas en général, cette voie se trouve fermée. L'idée essentielle d'Eudoxe consiste à renoncer à définir le rapport de deux grandeurs, en le ramenant à des notions déjà connues (en espèce, les entiers chez les Pythagoriciens), et à remarquer que malgré cela, toute la géométrie demeure pratiquement inchangée. Comment cela peut-il se faire ? C'est que, si on examine les démonstrations où intervient la notion de rapport de deux grandeurs, on constate qu'il est inutile de se servir de la définition des Pythagoriciens, mais qu'il suffit de savoir : 1^o ce que veut dire l'égalité et l'inégalité de deux rapports A/A' , B/B' ; 2^o ce que signifient les opérations fondamentales sur de tels rapports (essentiellement leur addition et leur multiplication). Le second point est facile à traiter par voie géométrique une fois le premier élucidé (par exemple, le produit de A/A' et de A'/A'' est A/A''). Quant à celui-ci, ce que fait Eudoxe revient à introduire par une voie détournée la comparaison des rapports incommensurables (non définis) aux rapports d'entiers. Un rapport A/A' de 2 grandeurs de même espèce sera considéré comme plus grand que le rapport m/m' de 2 entiers si $m'A > mA'$, inégalité qui ne fait intervenir que des additions de grandeurs, opération toujours possible d'après les postulats de la géométrie ; un rapport A/A' sera plus grand qu'un autre B/B' s'il existe un rapport d'entiers m/m' tel que $A/A' > m/m' > B/B'$; A/A' et

B/B' seront égaux enfin si aucun des deux n'est plus grand que l'autre.

Grâce à cette ingénieuse définition, toutes les démonstrations géométriques des Pythagoriciens, valables pour le cas où les grandeurs qu'ils considèrent sont commensurables, le restent dans le cas général, en se ramenant au cas commensurable et

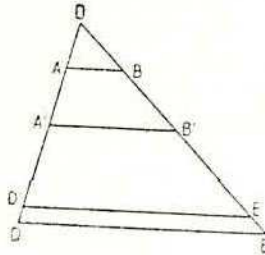


Fig. 3.

en faisant usage de la définition d'Eudoxe, qui joue le rôle de notre moderne « passage à la limite ». Par exemple, pour démontrer le « théorème de Thalès » $OA/OA' = OB/OB'$, (fig. 3), il suffit de prouver que si $OA/OA' > m/m'$, on a aussi $OB/OB' > m/m'$, et la même proposition avec $>$ remplacé par $<$: or si $m' \cdot OA > m \cdot OA'$, et par exemple $OD = m' \cdot OA$, $OD' = m \cdot OA'$, en menant par D et D' les

parallèles à AB, on a (théorème de Thalès pour les rapports rationnels), $OE = m' \cdot OB$ et $OE' = m \cdot OB'$, et $OE > OE'$, c. q. f. d.

Avec Eudoxe, les mathématiques grecques ont atteint leur structure définitive, qui sera codifiée 50 ans plus tard dans les célèbres *Eléments* d'Euclide. Le temps me manque pour suivre dans le détail la période suivante, marquée par les grands noms d'Archimède et d'Apollonius. D'ailleurs, les travaux de ces deux mathématiciens et de leurs contemporains, développant considérablement les connaissances antérieures, exigeraient, pour être exposées convenablement, un emploi encore plus abondant d'un vocabulaire technique dont je crains déjà de n'avoir que trop abusé. Je ne pourrai donc vous parler ni des problèmes algébriques de la duplication du cube ou de la quadrature du cercle, ni de la théorie des sections coniques, ni de celle des polyèdres réguliers, malgré leur intérêt et leur beauté. Je ne voudrais cependant pas terminer sans avoir évoqué, ne fût-ce que brièvement, la partie la plus profonde peut-être de la géométrie grecque, celle qui devait au XVII^e siècle donner naissance au Calcul infinitésimal. Préparée par l'arithmo-géométrie des Pythagoriciens et les travaux, malheureusement disparus, de Démocrite, la méthode d'*exhaustion* d'Eudoxe est étroitement liée à sa définition de l'égalité des rapports : elle consiste essentiellement à obtenir la valeur d'une mesure en l'approchant indéfiniment par des valeurs connues de plus en plus voisines. Le paradigme de la méthode est le calcul du volume d'une pyramide, tel qu'on

l'enseigne encore aujourd'hui dans nos classes élémentaires : on insère la pyramide entre deux empilements de prismes dont on connaît le volume et dont la différence des volumes est arbitrairement petite (fig. 4). La définition d'Eudoxe pour l'égalité des rapports permet alors de trouver aussitôt la formule classique $Bh/3$. Appliquée de la façon la plus ingénieuse par Archimède à une foule d'autres problèmes analogues, cette méthode est naturellement l'essence même de notre Calcul intégral, et repose de façon implicite sur la notion de limite, base des mathématiques modernes.

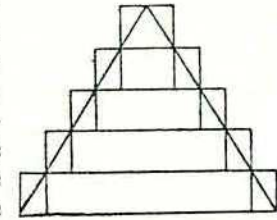


Fig. 4.

A partir du II^e siècle avant J.-C., le grand courant de la pensée mathématique grecque semble se tarir brutalement. A part quelques exceptions de second plan, il n'y aura plus désormais que des commentateurs des œuvres classiques, plus ou moins compétents d'ailleurs. On a cherché des causes diverses à cette décadence ; il me semble qu'elle s'inscrit naturellement dans le déclin général de la civilisation de langue grecque : on peut même dire que les mathématiques manifestent une vitalité plus grande que la littérature ou l'art, par exemple, puisque leur apogée se situe (avec Archimède) en plein III^e siècle avant notre ère. Si on peut trouver des causes de sclérose plus spécifiques, on pourra dire que la minutie, la rigueur et l'abstraction des méthodes eudoxiennes étaient peut-être en avance sur leur temps et paralysaient l'effort de conquête de domaines nouveaux ; car une telle conquête est le plus souvent due à l'intuition plutôt qu'à la stricte logique, et s'accompagne toujours au début de quelque incertitude sur les principes. D'autre part, les Grecs n'ont pas connu l'algèbre, ce langage si souple des mathématiques modernes ; il en résultait dans l'exposé de leurs théories une lourdeur de plus en plus pénible à mesure que se raffinaient les résultats ; cela aussi, surtout en période de relâchement intellectuel général, devait contribuer à la stagnation de leur mathématique, suivie de l'arrêt complet de toute pensée scientifique après l'effondrement du monde antique.

Je crains d'avoir été bien inférieur à la tâche que j'ai entreprise, et de n'avoir pu vous donner qu'une pâle idée de ce qui, à nos yeux de mathématiciens, constitue un des plus extraordinaires monuments du génie humain. Il est certes aisé de railler les mathématiciens grecs pour leur attachement au

caractère idéal de leur science, de les accuser de couper des cheveux en quatre et de les traiter d'abstracteurs de quintessence ; de Schopenhauer au biologiste anglais moderne Lancelot Hogben, on ne s'en est pas fait faute, au nom de l'intuition ou de l'utilitarisme. A ceux qui reprochent aux Grecs d'avoir systématiquement négligé les applications, on pourrait cependant répondre que ces subtilités, en apparence gratuites, étaient indispensables pour préparer le développement de l'Analyse moderne, dont personne ne niera le rôle d'outil essentiel dans les théories mécaniques ou physiques contemporaines. Mais le débat se situe plus haut : la mathématique grecque est — au moins autant que la philosophie antique — un des plus beaux témoignages de ce que peut l'homme dans son aspiration désintéressée vers la connaissance, dans sa recherche toujours inassouvie de l'absolu : et ceux qui se refusent à comprendre la noblesse et la beauté de cet effort spécifiquement humain ne sauraient, à mon sens, mériter pleinement le nom auquel nous attachons tous ici une si haute valeur, le beau nom d'humaniste.

J. DIEUDONNÉ.

Eudoxus Cnidius. — J. DIEUDONNÉ, *L'évolution de la pensée mathématique dans la Grèce ancienne* [chez Eudoxe de Cnide] ; cf. Sciences.

J. DIEUDONNÉ, *L'évolution de la pensée mathématique dans la Grèce ancienne* : BAGB 3^e Sér. N° 2 1951 6-18. | En face de la mathématique préhellénique, purement utilitaire, trois éléments nouveaux caractérisent la mathématique grecque : généralité, abstraction, méthode déductive. Évolution de ce travail d'analyse et de synthèse dans l'école pythagoricienne, chez Platon et Eudoxe de Cnide.

Bulletin de l'Association Guillaum Budé
UV2801

Socrate : son milieu historique, son actualité¹.

L'un de mes plus grands sujets de tristesse intellectuelle — et Dieu sait s'il n'en manque point en ce temps de grande pitié au royaume de l'intelligence — c'est le divorce que l'on peut constater de nos jours entre la philosophie et les humanités. Sans doute, les philosophes n'ont-ils jamais autant qu'aujourd'hui parlé d'humanisme ; mais ce qu'ils entendent par là n'a rien de commun, la plupart du temps, avec ce qu'appellent de ce nom les humanistes au sens traditionnel, ceux de l'Association Guillaume Budé, je veux dire ceux qui conservent le culte des lettres antiques, et plus généralement des grandes œuvres du passé, à quelque époque qu'elles remontent, de quelque contrée qu'elles proviennent, ceux pour qui demeurent vivantes les œuvres immortelles qui témoignent de la communauté de la nature humaine et de la pérennité du génie humain. L'humanisme dont se targuent nos philosophes n'a rien de commun avec celui-là ; il en serait plutôt la négation. Il revendique ce nom parce qu'il fait de l'homme la mesure de toutes choses : il n'est point, selon cette philosophie, de valeurs absolues, éternelles, transcendantes mais seulement humaines, relatives et historiques. Il n'y a pas même de nature humaine permanente : chaque époque, chaque génération, libre de toute attache avec le passé, de toute responsabilité envers l'avenir, se crée à elle-même son propre idéal ; il lui appartient de réaliser un exemplaire nouveau d'humanité ; elle ne reconnaît d'autre juge de son activité et de son genre de vie qu'elle-même. En même temps que cet humanisme abolit la nature humaine, cet historicisme exclut le jugement de l'histoire ; tout le prix d'une production humaine se mesure au bruit qu'elle fait dans le présent. De là l'indécence publicitaire que font autour de leurs ouvrages et de leur personne les philosophes en vogue, et le débordement inouï de la philosophie dans la littérature. Elle envahit tout les genres, submerge le roman, escalade la scène, voudrait trouver l'écran ; elle subornerait même la poésie, si celle-ci était encore un genre à succès. C'est en contraste avec cette

¹. Conférence donnée à la section bordelaise de l'Association Guillaume Budé, le 18 février 1950.