

A 1510

C3
THEOREM

Lehrstuhl für Mathematik und ihre Didaktik – Universität Bayreuth

BLK-MODELLVERSUCH

STEIGERUNG DER EFFIZIENZ DES
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN UNTERRICHTS

Materialien zum Mathematikunterricht

November 1998

Modulbezogene Erläuterungen zu
"Pythagoras und kein Ende?"

Peter Baptist, Bayreuth

1510
BAPTIST, P.
1998

UNIVERSITÄT BAYREUTH, POSTFACH 101251, 95440 BAYREUTH

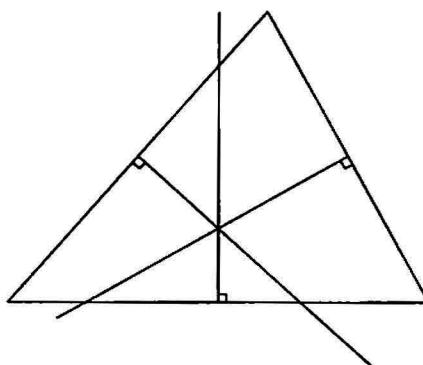


Fast ist man versucht zu fragen: Wer kennt ihn nicht, den Lehrsatz des Pythagoras? Sicherlich gehört er zu den bekanntesten Ergebnissen der Elementargeometrie. Manche meinen sogar, er sei der bekannteste geometrische Lehrsatz überhaupt – zumindest bei mathematischen Laien. In den Lehrplänen nahezu aller Schularten hat er sich einen Stammplatz gesichert. Worin liegt wohl die Ursache seiner Bedeutung für die allgemeinbildende Schule? Hier lassen sich m.E. mehrere Gründe anführen:

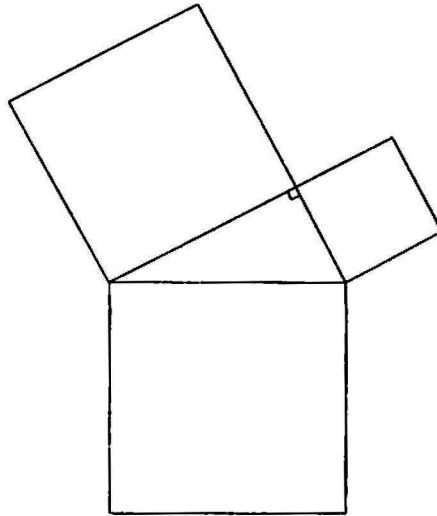
- Ein erstes Beispiel substantieller Mathematik innerhalb des Schulstoffs.
- Der Beziehungsreichtum zu vielen Inhalten des Lehrplans.
- Die Vielfalt kulturgeschichtlicher Aspekte.

Was macht den Lehrsatz des Pythagoras zu einem Beispiel wirklich substantieller Mathematik innerhalb des Schulstoffs? Worin besteht beispielsweise der Unterschied zu der Schnitteigenschaft der drei Mittelsenkrechten im Dreieck?

Die Antwort ist offenkundig. Bei den Mittelsenkrechten in einem Dreieck sieht man an einer sauber gezeichneten Figur die Aussage auf den ersten Blick: Sie schneiden sich in einem Punkt.

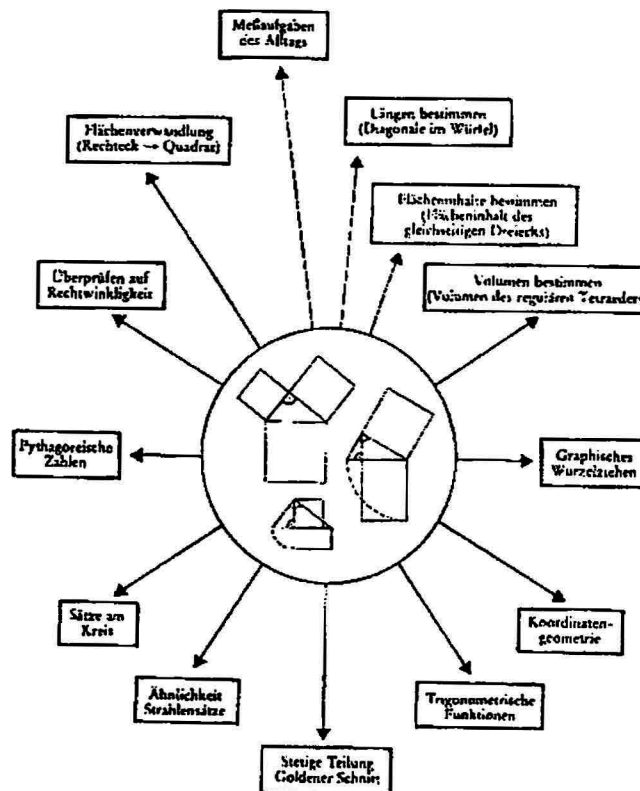


Ganz anders beim Satz des Pythagoras. Wir können die zugehörige Konfiguration betrachten, aber die eigentliche Aussage des Lehrsatzes bleibt zunächst verborgen.



Der Philosoph Arthur Schopenhauer bezeichnet den *Pythagoras* daher auch als eine „qualitas occulta des rechtwinklichten Dreiecks“. Dem Beweis des Lehrsatzes kommt hier eine zweifache Bedeutung zu. Zum einen dient er der Erkenntnissicherung, zum anderen ermöglicht er erst Einsicht in die Aussage selbst. In diesem Fall wird nicht nur verifiziert, was man an einer guten Zeichnung sofort ablesen kann. Es besteht also ein echtes Beweisbedürfnis.

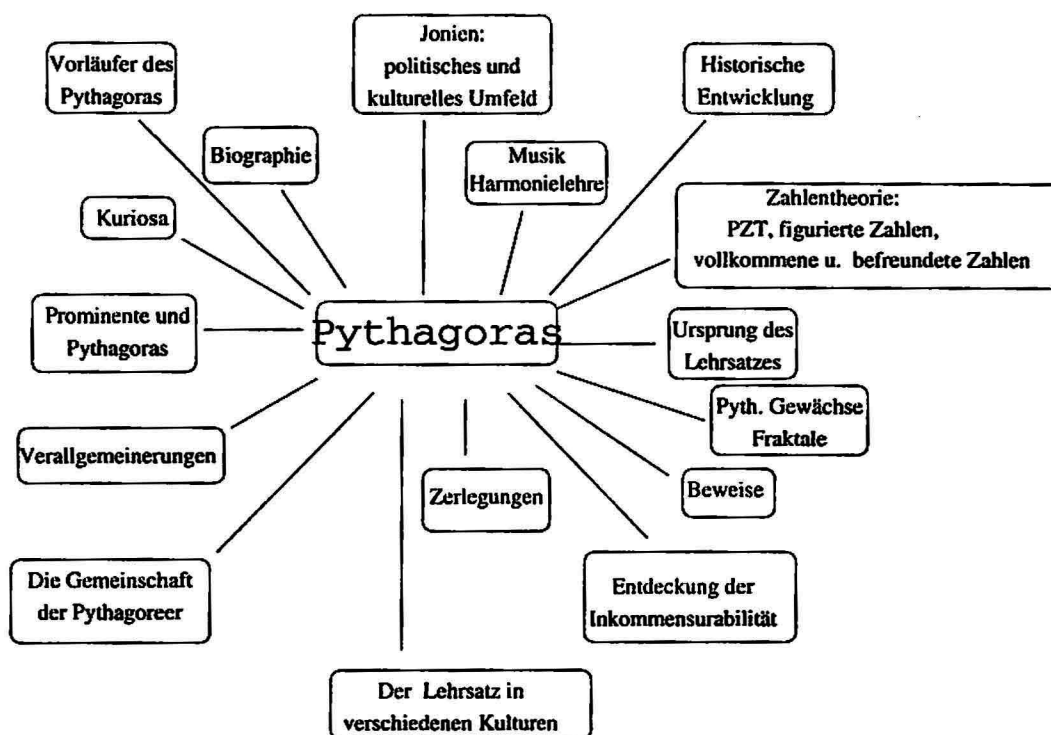
Den Beziehungsreichtum des *Pythagoras* und seines Umfeldes (Katheten- und Höhensatz) verdeutlicht Heinrich Winter sehr anschaulich mit nachstehendem Diagramm. Hier läßt sich die Vernetzung mit unterschiedlichen Themenbereichen des Schulstoffs erkennen, wobei sich oftmals Gelegenheiten zur Wiederholung des Lehrsatzes bietet.



Mathematikunterricht kann und soll aber noch umfassender verstanden werden, als mit obigem Diagramm belegt wird.

- Mathematik in der Schule darf nicht in einem Manipulieren mit Formeln und Zahlen erstarren.
- Mathematik ist ein Kulturgut ersten Ranges, das müssen wir den Schülerinnen und Schülern bewußt machen.
- Mathematik entsteht in der Regel nicht in Elfenbeintürmen. Wie Mathematik betrieben wird, ist u.a. abhängig von der jeweiligen Gesellschaft und vom sozialen Umfeld.
- Mathematik unterrichten bedeutet auch das Vermitteln mathematischer Denk- und Arbeitsweisen, nicht nur das Vermitteln von Lehrsätzen und Algorithmen. Hierin liegt u.a. der Bildungswert des Schulfaches Mathematik.

Alle diese Ziele (und noch andere) lassen sich mit dem Themenkreis *Pythagoras* erreichen. Der Beziehungsreichtum der Thematik läßt sich folgendermaßen veranschaulichen:



Das Buch *Pythagoras und kein Ende?* bietet Anregungen und Materialien für einen vielseitigen und aspektreichen Unterricht nach der eben skizzierten Art. Dabei gibt es an vielen Stellen Verknüpfungen mit den *Modulen* unseres Modellversuchs zur Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts. Im folgenden soll dies an einigen Themen exemplarisch aufgezeigt werden. Aufmerksame Leserinnen und Leser werden noch etliche mehr entdecken.

Geradezu ein Paradebeispiel für die Weiterentwicklung der Aufgabenkultur gemäß Modul 1 liefert der Clairautsche Zugang zum Lehrsatz des Pythagoras (Kapitel 3.4). Ausgangspunkt ist das Problem, zwei Quadrate in ein einziges flächengleiches überzuführen. Wir bezeichnen heutzutage den von Clairaut gewählten Weg als heuristisch-genetisch. Betrachten wir anstelle des rechtwinkligen Dreiecks ein beliebiges Dreieck, über dessen Seiten wir Quadrate errichten. Das Einzeichnen der verlängerten Höhen führt zu einer Aussage (Kapitel 5.2), die im Spezialfall in den *Pythagoras* übergeht und die sich mittels Ähnlichkeit oder Sehnen- bzw. Sekantensatz zeigen läßt. Die unterschiedlichen Beweise des Lehrsatzes (Kapitel 3) ermöglichen, entsprechend aufbereitet, verschiedenartige Zugangswege zum *Pythagoras*, die zudem vergleichend analysiert werden können.

Experimentieren, Beobachten, Vergleichen und Systematisieren spielt nicht nur im naturwissenschaftlichen Unterricht, sondern auch in der Mathematik eine bedeutende Rolle (Modul 2). In Kapitel 4.2.5 wird gezeigt, wie durch experimentelles Vorgehen der *Pythagoras* in den Lehrsatz des Ptolemaios übergeht. Im

Unterschied zu den Naturwissenschaften steht am Ende des “Experiments” eine Vermutung, die noch bewiesen werden muß (Kapitel 4.2.6). Auch die zahlreichen Verallgemeinerungen des Lehrsatzes (vgl. Kapitel 5) haben zum Teil ihren Ursprung im “Experimentieren” an der klassischen Konfiguration: Verändern der Figuren über den Seiten (Kapitel 5.1, 5.3), Verändern des Ausgangsdreiecks (Kapitel 5.2, 5.3, 5.4), Verändern der Dimension (Kapitel 5.5).

Der Abschnitt *Abenteuer im Fibonacci-Land* (Kapitel 4.3.5) läßt sich mit einem gewissen Augenzwinkern **Modul 3** zuordnen. Daß die Gleichung $169 = 168$ fehlerhaft ist, wird kaum ein Schüler anzweifeln. Wenn aber diese Gleichheit aus dem Vergleich zweier (anscheinend) flächengleicher Konfigurationen folgt, gerät man doch ins Grübeln und gebraucht künftig vielleicht nicht mehr so vorschnell das Argument: “Das sieht man doch”.

Das Beschäftigen mit verschiedenen Beweisen des Lehrsatzes (Kapitel 3) führt uns zu **Modul 4**, dem verständnisvollen Lernen auf unterschiedlichen Niveaus. Aus dem reichhaltigen Repertoire der Beweise sind einige Kostproben erläutert, die unterschiedliches mathematisches Vorwissen bzw. Verständnis erfordern. Die Bandbreite reicht von Zerlegungen bzw. Puzzle-Aufgaben (Kapitel 3.1, 3.5, 3.8) bis hin zu elementargeometrischen Beweisen (u.a. Scherung (Kapitel 3.2), Ähnlichkeit (Kapitel 2.3 bzw. 3.9)). Zahlreiche prominente Persönlichkeiten haben sich mit dieser Thematik befaßt, so daß u.a. Ausflüge in die amerikanische Geschichte (Kapitel 3.8), Philosophie (Kapitel 3.3), Physik (Kapitel 3.9), Kunstgeschichte (Kapitel 3.6) erfolgen können, bzw. umgekehrt von diesen Gebieten in die Mathematik.

Damit sind wir bei Beispielen zu fächerübergreifendem und fächerverbindendem Arbeiten (**Modul 6**) angelangt. Der euklidische Beweis in Gedichtform, verfaßt von dem dänischen Dichter Hans Christian Andersen (Kapitel 3.7), wäre ein ungewöhnlicher und interessanter Zugang zum *Pythagoras*. Über die (vermeintliche) Entstehungsgeschichte des Lehrsatzes hat sich Adalbert von Chamisso in einem Sonett seine Gedanken gemacht (Kapitel 2.1). Querverbindungen existieren weiter zur Astronomie (Kapitel 4.2) und zur Biologie (Kapitel 4.3.2 und 4.3.3). Eine Auseinandersetzung mit dem “Göttinger Dreigestirn” Gauß, Kästner, Lichtenberg (Kapitel 1.1, 1.3, 3.3) führt uns in die Geistesgeschichte der Wende vom 18. zum 19. Jahrhundert, wobei der Fall Dorothea Schlözer (Kapitel 1.3) vielleicht das Tüpfelchen auf dem “i” darstellt.

Wie stark der *Pythagoras* mit anderen Inhalten des Lehrplans verzahnt ist und welchen Beziehungsreichtum die Thematik überhaupt besitzt, verdeutlichen die beiden Diagramme am Beginn dieser Ausführungen. Konsequentes Arbeiten mit solchen Vernetzungen, die von Fall zu Fall ergänzt bzw. erweitert werden müssen, macht neben dem Wiederholungsaspekt vor allem Querverbindungen und Zusammenhänge bewußt, ermöglicht neue Inhalte in bestehende Wissenskontexte

einzubinden und zeigt damit den erbrachten Lernfortschritt, d.h. im Sinne von **Modul 5** einen Zuwachs an Kompetenz auf. Daß man sich dabei nicht nur auf den Kosinussatz als Verallgemeinerung des Satzes des Pythagoras beschränken muß, wird bereits bei einer ersten Durchsicht des Buches offensichtlich.

Insgesamt vermittelt das Buch eine umfassendere Sichtweise der Thematik *Pythagoras*, als es normalerweise in der Schule üblich ist. Durch diese etwas andere Art, den Mathematikunterricht zu gestalten, besteht die Chance, die Attraktivität des Faches Mathematik zu erhöhen, und zwar aufgrund der Vielfalt der Aspekte sowohl bei Jungen als auch bei Mädchen (**Modul 7**).

Die Verzweigung der Pythagorasthematik in zum Teil völlig unterschiedliche Gebiete macht sie insbesondere für kooperatives Lernen (**Modul 8**) bedeutsam, da die Schüler so eher Themen finden, die ihren persönlichen Neigungen und Interessen entsprechen. Bereits der Blick in das Inhaltsverzeichnis des Buches zeigt die Bandbreite der möglichen Aufträge für Gruppenarbeiten.

Eine Verantwortung für das eigene Lernen (**Modul 9**) wird beispielsweise bei dem selbständigen Vorbereiten von Referaten gefordert. Hierzu liefert das Buch ausreichend Material, das gegebenenfalls durch Spezialliteratur (siehe auch Literaturverzeichnis, S. 152) ergänzt werden kann. Als Referatthemen eignen sich u.a. die fiktiven Begegnungen mit Thales (Kapitel 4.1), mit Ptolemaios (Kapitel 4.2) und mit Fibonacci (Kapitel 4.3). In einer nächsten Stufe können die Schüler mit dem vorliegenden Material das *Lernen durch Lehren* praktizieren, wobei der Lehrer sich bewußt zurücknimmt und lediglich als Moderator fungiert.

Eine der Thesen der Philosophisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Basel zum Schulunterricht lautet:

Wichtiger als Vollständigkeit des Wissens gemäß einem vorgegebenen Stoffplan (die doch nie erreicht werden kann) und der Kenntnis einer Fülle von Einzelfakten ist Verständnis für die für das jeweilige Fach charakteristische Art des Denkens und Problemlösens, demonstriert anhand ausgewählter typischer Beispiele, die dafür um so sorgfältiger erarbeitet werden sollen.

Hinweis: Alle zehn Baseler Thesen finden sich auf unserem BLK-Server unter

<http://blk.mat.uni-bayreuth.de>

Als ein solches typische Beispiel, das sorgfältig erarbeitet werden sollte, eignet sich der *Pythagoras* in besonderer Weise. Die Vielfalt der im Buch angesprochenen Aspekte hat ihre Auswirkungen auf nahezu alle Module unseres BLK-Modellversuchs.