

1541 pdk
 ZEUTHEN, H.G.
 1896

Inhaltsübersicht

	Seite
Einleitung.	
1. Vorgeschichte der Mathematik	1
2. Ägypter und Babylonier.....	8
Die griechische Mathematik.	
1. Historischer Überblick	14
2. Die pythagoreische Mathematik	32
3. Die geometrische Arithmetik.....	40
4. Die geometrische Algebra	44
5. Numerische quadratische Gleichungen; Anziehen der Quadratwurzel	54
6. Das Unendliche	64
7. Die Quadratur des Kreises	70
8. Dreiteilung des Winkels; Einschreibungen	79
9. Verdoppelung des Würfels	82
10. Probleme und Theoreme; Bedeutung der geometrischen Konstruktion	88
11. Die analytische Methode; die analytisch-synthetische Dar- stellungsform	92
12. «Elemente»; analytische Hilfsmittel	105
13. Überblick über Euklids Elemente; synthetisches Lehr- gebäude	108
14. Euklids geometrische Voraussetzungen	115
15. Anmerkung über die Voraussetzungen der Geometrie....	132
16. Die allgemeine Lehre von den Proportionen; Euklids 5tes und 6tes Buch.....	139
17. Kommensurable Grössen und ihre Behandlung durch Zahlen; Euklids 7.—9. Buch	155

indirekt durch Reihen von Hülfsätzen über jetzt verlorene Werke der grossen griechischen Mathematiker gebracht haben.

In einem einzelnen Zweige der Mathematik ist jedoch noch zu Pappus Zeit etwas Neues hervor gebracht worden, nämlich in der Arithmetik. Aus der Zeit zwischen den grossen Mathematikern und Pappus besitzen wir Arbeiten von mehreren arithmetischen Schriftstellern, unter denen namentlich Nikomachus (etwa 100 n. Chr.) grossen Ansehen genoss. Er hat eine erhaltene Einführung in die Arithmetik geschrieben. Dass er und einige andere arithmetische Schriftsteller uns etwas Neues haben bringen können, hat seinen Grund zunächst wohl darin, dass weitergehende arithmetische Untersuchungen nicht in den Rahmen der Arbeiten hineinpassten, die uns aus der besten Zeit aufbewahrt sind. Dagegen nehmen die Arbeiten, welche wir von Pappus' Zeitgenossen Diophant besitzen, eine derartige Sonderstellung ein, dass wir darin eine wirkliche Erweiterung der griechischen Mathematik erblicken müssen. Von seiner Hand ist uns das Meiste von einem grossen Werke über arithmetische Dinge erhalten; ob eine kleine Schrift über Polygonalzahlen einen Teil dieser grösseren ausgemacht hat, wissen wir nicht.

2. Die pythagoreische Mathematik.

Wenn wir uns nun dem mathematischen Inhalt der griechischen Geometrie zuwenden und mit der ältesten Zeit beginnen, so erfahren wir über das 6te Jahrhundert nur ausserordentlich wenig. Allerdings schreibt Eudemus dem Thales verschiedene Sätze zu. Unter diesen kann er recht wohl den gekannt haben, dass der Peripheriewinkel auf dem Halbkreise ein Rechter ist, einerlei ob

er ihn selbst gefunden oder von den Ägyptern erhalten hat; denn der Satz ergibt sich ohne weiteres aus der leicht erkennbaren Thatsache, dass sich um ein Rechteck ein Kreis beschreiben lässt. Dagegen ist es schwierig irgend welchen Sinn darin zu finden, wenn Eudemos dem Thales den Satz zuschreibt, dass ein Kreis von einem Durchmesser halbiert wird, denn man kann kaum damit begonnen haben etwas so in die Augen fallendes zu beweisen. Eudemos kann jedoch gemeint haben, dass Thales notwendigerweise denselben Satz gekannt haben müsse, der zu Eudemos' eigenen Zeiten für notwendig angesehen wurde, um den Satz über Peripheriewinkel im Halbkreise zu beweisen. Auf ähnliche Weise kann es sich mit den gleichfalls von Eudemos genannten Sätzen verhalten, dass Scheitelwinkel oder Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkeligen Dreiecks gleich gross sind, oder dass ein Dreieck durch eine Seite und die beiden anliegenden Winkel bestimmt ist. Der letzte Satz namentlich erhält erst seine Bedeutung als theoretischer Satz, wenn er in seiner natürlichen Verbindung mit anderen ähnlichen erscheint. Da über Thales' Bekanntschaft mit solchen nichts mitgeteilt wird, so hängt die Sache vielleicht damit zusammen, dass die Tradition dem Thales gewisse praktische Operationen beigelegt hat, zu deren theoretischer Begründung dieser Satz notwendig ist. Hierbei kann man denken an die dem Thales zugeschriebene Bestimmung des Abstandes von unzugänglichen Punkten oder Höhenmessung durch Schatten. Der Satz würde zunächst darauf hindeuten, dass diese Messungen mit Hilfe kongruenter Dreiecke ausgeführt worden sind. Die von den Ägyptern vorgenommene Bestimmung der Neigung einer Pyramidenkante deutet darauf hin, dass sie dazu ähnliche Dreiecke zu benutzen verstanden, also weiter waren als Thales; diesem fällt aber doch die Ehre zu,

zuerst unter den Griechen mathematische Untersuchungen aufgenommen zu haben. Wieweit man ausserdem im 6ten Jahrhundert gekommen war, das sieht man am besten aus dem, worauf man im nächsten Jahrhundert weiter bauen konnte. Wenn die Pythagoreer beispielsweise die 5 regulären Polyeder entdeckten, so hat das jedenfalls mehr als unbedeutende, von ihren Vorgängern entwickelte, geometrische Voraussetzungen erfordert.

Weit mehr befriedigende Mitteilungen liegen vor uns über die Mathematik der Pythagoreer. Sind diese auch nicht nur unzuverlässig mit Bezug auf das, was dem Meister zugehört und was den Schülern, sondern auch vielleicht geneigt den Pythagoreern vieles zuzuerkennen, was nur ihrer Zeit bekannt wurde, so geben sie doch demjenigen, der mit der späteren griechischen Mathematik vertraut ist, ein so zusammenhängendes, deutliches und verständliches Bild von ihrer ersten Entwicklungsstufe, von den Bestrebungen, die früh rege waren und später so deutliche Spuren in der griechischen, ja in der spätern Mathematik überhaupt, hinterlassen haben, dass sie es verdienen zusammengestellt zu werden. Dadurch wird man die Grundlage für die folgenden Arbeiten am Schlusse desselben Jahrhunderts erhalten und zugleich erreichen, deren Zweck richtig zu verstehen, und dabei wird auch die Gestalt, die man, namentlich im folgenden Jahrhundert, der Mathematik gab, ihre Erklärung finden.

Nach dem Bericht des Eudemos haben die Pythagoreer zunächst «die Geometrie zu einer wirklichen Wissenschaft erhoben, indem Pythagoras ihre Grundlage von einem höheren Gesichtspunkte aus betrachtete und ihre Lehrsätze mehr immateriell und intellektuell erforschte. Er hat ferner die irrationalen Grössen entdeckt und die Konstruktion der kosmischen Figuren (der regulären Polyeder).» Zu den specielleren Nachrichten, die

wir anderen Schriftstellern verdanken, gehört — ausser einigen mehr philosophischen als mathematischen Definitionen von Punkt, Linie, Fläche und Körper — auch die, dass die Pythagoreer die Winkelsumme des Dreiecks kannten und die Einteilung der Ebene in (wahrscheinlich reguläre) Polygone, von denen um einen Punkt herum 6 Dreiecke oder 4 Vierecke oder 3 Sechsecke liegen konnten. Sie sollen die sogenannte Flächenanlegung erfunden haben, worunter man, wie wir sehen werden, die Auflösung quadratischer Gleichungen in geometrischer Form verstand, und die bekannte Konstruktion eines Polygons, das einem gegebenen gleich und einem anderen ähnlich ist. Von einem Pythagoreer wird erzählt, dass er sich des Verbrechens gegen die Schule schuldig machte, «den Satz von 12 Fünfecken in einer Kugel» zu verraten. Endlich kann angeführt werden, dass als pythagoreisches Zeichen das sogenannte Pentagramm angegeben wird, ein regelmässiges Sternfünfeck, dessen Seiten in dem umschriebenen Kreise Sehnen zu Bogen von der Grösse $\frac{4\pi}{5}$

sind. Während einzelne Fälle des Satzes, der noch heutigen Tages der pythagoreische genannt wird, gewiss schon früher bekannt gewesen sind, wird der allgemeine Satz den Pythagoreern zugeschrieben; ferner eine von den Regeln, nach denen man rationale Zahlen für die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks bilden kann, nämlich die Zahlen a , $\frac{a^2-1}{2}$ und $\frac{a^2+1}{2}$, worin a eine ungerade Zahl

bedeutet, während die Zahlen a , $\left(\frac{a}{2}\right)^2 - 1$ und $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 1$,

worin a eine gerade Zahl bedeutet, dem Plato zugeschrieben werden. Es wird berichtet, dass die Pythagoreer die drei Proportionen kannten, nämlich die arithmetische, die geometrische und die harmonische, ferner die Dreiecks-

zahlen, d. h. die Summen der ersten Zahlen der natürlichen Zahlenreihe, und dass sie sich überhaupt mit Differenzreihen beschäftigten. Endlich wird berichtet, dass Pythagoras die Zahl zum Princip aller Dinge gemacht habe, und dass die Pythagoreer sich mit Untersuchung über gewisse ganze Zahlen beschäftigt haben, wie «freundete Zahlen», von denen die eine gleich der Summe der Faktoren der anderen ist, und «vollkommene Zahlen» die gleich der Summe ihrer eigenen Faktoren sind ($6 = 1 + 2 + 3$). Endlich soll Pythagoras Arithmetik und Musik mit der Geometrie in Verbindung gebracht haben.

Wir werden ausführlicher über mehrere von diesen Gegenständen und ihre Bedeutung für die griechische Mathematik sprechen, wollen aber erst kurz den Zusammenhang zwischen ihnen nachweisen und die gute Übereinstimmung zwischen den Angaben, die aus Quellen verschiedener Werte stammen.

Zunächst sei auf das Bestreben hingewiesen, die Elemente Punkt, Linie u. s. w. klar von einander zu scheiden. Es ergibt sich auch, dass man bereits im Besitz des Winkelbegriffs war. Hiervon hat man Anwendung gemacht sowohl bei der Teilung der Ebene als bei der Untersuchung darüber, welche regulären Polyeder überhaupt möglich wären. Sicherlich war viel Arbeit zu leisten, bevor man zu einer so vollkommenen Bestimmung und Konstruktion auch vom Dodekaeder und Ikosaeder gelangte wie die ist, die wir bei Euklid finden; aber der erste Schritt hierzu, die Konstruktion des regelmässigen Fünfecks, war gemacht, und man war sichtlich stolz darauf, soweit gekommen zu sein. In der Konstruktion des Fünfecks- oder Zehnecksseite haben wir bereits dasjenige Beispiel für die geometrische Auflösung einer Gleichung zweiten Grades, welches die grösste Rolle b

Euklid spielt. Dass die Pythagoreer indessen bei diesem einen Falle nicht stehen geblieben sind, geht nicht nur aus der allgemeinen Erwähnung der Flächenanlegung hervor, sondern auch aus der besonderen Erwähnung des für diese Untersuchungen, wie wir sehen werden, so bedeutungsvollen pythagoreischen Lehrsatzes und einer dafür eben so wichtigen Konstruktion. Daran hat sich denn auch die Entdeckung angeschlossen, dass Gleichungen zweiten Grades Veranlassung gaben zu inkommensurablen, numerische Gleichungen zu irrationalen Grössen (worunter wir beständig solche verstehen wollen, die mit der gebrauchten Einheit inkommensurabel sind). Wenn auch ein Teil ihrer zahlentheoretischen Untersuchungen eine Fortsetzung der Zahlenmystik der Babylonier gewesen sein mag, so ging doch ein anderer Teil darauf aus solche quadratische Gleichungen zu bilden, bei denen die Irrationalität vermieden wird.

Bei allgemeinen Untersuchungen lassen sich irrationale Grössen nun einmal nicht vermeiden. Dadurch wurden aber die bis dahin benutzten mathematischen Begründungen unzuverlässig, und es ist das grosse Verdienst der Pythagoreer hierauf aufmerksam geworden zu sein. Man kannte nämlich wohl Proportionen und hat sie wahrscheinlich in der einen oder anderen Form schon früh angewandt; aber vor Eudoxus' Zeit konnte hierbei nur die Rede sein von Gleichheit der Verhältnisse zwischen ganzen Zahlen, oder von der Gleichheit solcher Verhältnisse mit den Verhältnissen zwischen geometrischen Grössen, die folglich kommensurabel sein mussten. Man benutzte die einfachen Rechnungsarten, z. B. die Multiplikation, und wusste edenso wie die Ägypter, dass z. B. ein Rechteck, wenn die Flächeneinheit das Quadrat über der Längeneinheit ist, gleich dem Produkte der Seiten wird; wenn aber die Seiten inkommensurabel sind, so wird nicht

nur der Beweis durch Einteilung in Quadrate unbrauchbar, sondern der Satz selbst wird sinnlos, da es dem beim gewöhnlichen Rechnen gebildeten Begriffe eines Produktes widerstreitet, wenn die Faktoren irrationale Zahlen sind.

Diese Schwierigkeit war es, die die Pythagoreer mit ihnen die folgenden griechischen Mathematiker überwinden durch geometrische Darstellung der allgemeinen Grösse. Im ersten Augenblick kann es allerdings so aussehen, als ob hiermit nur wenig gewonnen sei, da eine beliebig gezeichnete Strecke ebensowohl eine bestimmte Grösse hat wie eine beliebig gewählte Zahl. Die gezeichnete Figur dient jedoch nur dazu die Figur festzuhalten, die beschrieben wird, und in dieser können die Grössen alle die Werte annehmen, die zu der Beschreibung stimmen. Die Darstellung einer Grösse durch die Länge einer Strecke kann dadurch, ebenso wie die in der Algebra gebräuchliche Darstellung durch einen Buchstaben, auf kontinuierlich variierende Grössen angewandt werden. Die Griechen wussten allerdings ebensowenig etwas von negativen wie von imaginären Grössen; aber das Bedürfnis nach den ersteren wird dadurch etwas verringert, dass die Variationen der Figur teilweise dieselben Verallgemeinerungen darbieten können, die wir nun durch Benutzung negativer Grössen erreichen.

Aus diesen Bemerkungen lässt sich erkennen, dass die Operationen mit den geometrisch dargestellten Grössen eine ähnliche Rolle spielen wie unsere algebraischen Operationen. Wir wollen deshalb die Lehre von diesen geometrischen Operationen die geometrische Algebra nennen. Diese soll hier so dargestellt werden, wie wir sie kennen teils aus dem zweiten Buche von Euklids Elementen, teils aus der Anwendung, die überall von ihr in der griechischen Mathematik gemacht wird, namentlich

da, wo man jetzt Gleichungen zweiten Grades benutzt. Sowohl bei Euklid als auch bei anderen liegt die geometrische Algebra so vielen Dingen zu Grunde, dass sich auch hieraus ein Beweis ergibt für das hohe Alter, das wir ihr in Übereinstimmung mit dem Bericht über die Bekanntschaft der Pythagoreer mit der Flächenanlegung beilegen. Ihre Anwendbarkeit auf beliebige Grössen, irrationale sowohl wie rationale, und ihre hieraus folgende abstrakte Natur stimmt gut zu der Äusserung des Eudemus über Pythagoras' immaterielle Behandlung der Geometrie.

Es ist jedoch wohl möglich, dass diese abstrakte Natur nicht von vornherein so bewusst und ausgeprägt gewesen ist, wie sie es zu Eudemus' Zeit geworden war und bei Euklid ist. Im Gegenteil ist es natürlich und wohl übereinstimmend mit den Berichten über die Verknüpfung von Geometrie und Arithmetik durch die Pythagoreer, wenn man annimmt, dass die entsprechende geometrische Behandlung ganzer Zahlen, die bei Euklid zum Teil als eine Anwendung der allgemeineren geometrischen Algebra auftritt, vorangegangen ist. In den nahe liegenden geometrischen Darstellungen von Eigenschaften ganzer Zahlen, mit denen man begonnen hat, hat man dann eine Darstellungsform gehabt, die von selbst ebenso leicht auf allgemeine kontinuierliche Grössen anwendbar war. Dessen ist man sich jedoch nur erst ganz allmählich bewusst geworden. Aus diesem Grunde wollen wir zuerst reden über die geometrische Arithmetik der Griechen als Einleitung zu ihrer geometrischen Algebra.

3. Die geometrische Arithmetik.

In unseren Lehrbüchern findet man durchgehen einen geometrischen Beweis für den Satz, dass in eine Produkte von ganzen Zahlen die Reihenfolge der Faktor beliebig ist. Dieser besteht darin, dass man die Einheit oder die Punkte, die diese darstellen, in Form ein Rechtecks hinschreibt. Jede horizontale Reihe enthält die Einheiten des Multiplikanden, und die Anzahl der Reihen ist der Multiplikator. Die Vertauschung der horizontalen Reihen mit den vertikalen ergibt dann die Vertauschbarkeit der Faktoren. Benutzt man statt der Einheiten kleine Quadrate mit der Seite 1, so hat man gleichzeitig den geometrischen Satz bewiesen, dass die Größe eines Rechtecks durch das Produkt der Seiten ausgedrückt wird. Unterlässt man dagegen eine bestimmte Einheit zu wählen, so erhält man, wenn die Seiten kommensurabel sind, den Satz, dass zwei Rechtecke sich wie Produkte ihrer Seiten verhalten.

Von dieser Darstellung rührt die bei den Griechen allgemein gebräuchliche Benennung ebene Zahlen für solche, die aus zwei Faktoren zusammengesetzt sind, also eine rechteckige Fläche bilden, und die noch jetzt gebräuchliche Quadratzahl. Ebene Zahlen heißen nämlich, wenn ihre Faktoren proportional sind; sie verhalten sich dann wie zwei Quadratzahlen.

Aus dem Quadrat, das eine gewisse Quadratzahl darstellt, erhält man die nächste $(n+1)^2$, indem man längs den beiden Seiten $2n$ neue kleine Quadrate hinzusetzt und noch eins in den dadurch entstehenden einspringenden Winkel. Diese ganze Ergänzungsfigur, sowie im allgemeinen eine Figur, die die Differenz zwischen zwei aufeinanderfolgenden ähnlichen Figuren mit einem Eckpunkt,