

Zenon und die Grundlagenkrise der griechischen
Mathematik.

Von

B. L. van der Waerden in Leipzig.

1614 p. 141
WAERDEN, B.L.v.d.
1940 p. 141-161.

Was war der Zweck der berühmten Antinomien des Zenon? Nach der landläufigen Meinung, die wohl auf Elias¹⁾ zurückgeht, wollte Zenon die Möglichkeit der Bewegung widerlegen. Demgegenüber hat Paul Tannery²⁾ im Rahmen seiner naturphilosophischen Deutung der eleatischen Philosophie geltend gemacht, daß Zenon doch kein Skeptiker sei. Zenon habe keineswegs die Bewegung verneint, sondern sein Ziel sei, die Pythagoreische These zu widerlegen, nach der die Körper, die Flächen und die Linien Vielheiten, nämlich Vielheiten von Punkten seien. In diesem Sinne aufgefaßt, erscheinen ihm die Argumente Zenons „nets, pressants, irréfutables“ und in ihrem Erfolg durchschlagend.

Von diesen Anschauungen Tannerys sind die Philologen inzwischen (aus guten Gründen, wie sich zeigen wird) allgemein abgekommen, aber eine Reihe von Philosophen und Mathematikern haben sie freudig aufgenommen und weiter ausgestaltet. So schien Zenon eine immer größere Bedeutung für die Geschichte der Mathematik zu erlangen, indem er angeblich weit verbreitete infinitesimale Schlußweisen als Fehlschlüsse entlarvt und so den Weg für die exakte Mathematik des vierten Jahrhunderts vorbereitet habe.

Am schärfsten pointiert, um nicht zu sagen dramatisiert, tritt diese Auffassung bei Hasse und Scholz³⁾ hervor, die ein lebendiges und auf den ersten Blick sehr ansprechendes Bild von einer Grundlagenkrise der Mathematik im frühen fünften Jahrhundert entwerfen, in dem Zenon die zentrale Rolle spielt. Sie stellen die Hypothese auf, daß „die Pythagoreer“, die ihre These „Alles ist Zahl“ durch die Entdeckung des Irrationalen gefährdet sahen, diese These durch die Auffassung einer Strecke als Aggregat von unendlich vielen unendlich kleinen Teilstrecken retten wollten. Sie vermuten weiter, daß auch die Mathematik auf den gefährlichen Seitenweg des „Unendlichkleinen“ geraten war. Sie behaupten schließlich, daß Zenon durch seine unerbittliche Kritik die Mathematik wieder in die Bahn der wissenschaftlichen Strenge zurückgerufen hat. Zenon, der „unter dem Einfluß der Autorität des Aristoteles über zwei Jahrtausende nur als ein scharfsinniger Sophist und Urheber von geistreichen

¹⁾ Vgl. Diels, Die Fragmente der Vorsokratiker, Zenon A 15.

²⁾ P. Tannery, Pour l'histoire de la science hellène. Paris 1887.

³⁾ H. Hasse u. H. Scholz, Die Grundlagenkrise der griechischen Mathematik. Berlin, Pan-Bücherei, 1928.

Trugschlüssen gegolten hat“, sei in Wirklichkeit „der Schicksalsmensch der antiken Mathematik in der Stunde ihrer größten Krisis“.

Verschiedene Mathematikgeschichtler, wie Enriques und Dyksterhuis, haben sich, mit mehr oder weniger Reserve, den Anschauungen von Tannery, Hasse und Scholz angeschlossen. Ich glaube aber, die Unhaltbarkeit dieser Hypothesen, soweit sie Zenon und seine Zeit betreffen, nachweisen zu können. Die Pythagoreerfrage lasse ich dabei ganz außer Betracht, da ich davon zu wenig verstehe. Das Verhältnis Zenons zum Unendlichkleinen und zur Grundlagenkrise der griechischen Mathematik kann aber, wie ich glaube, unabhängig davon geklärt werden.

Unter „Infinitesimalmathematik“ verstehe ich jede Verwendung einer fingierten Zerlegung der Raumgrößen (Strecken, Flächen usw.) in unendlich kleine Teile zu mathematischen Herleitungen. Ich werde nun in doppelter Weise zeigen, daß Zenon und die Infinitesimalmathematik nichts miteinander zu tun haben. Zuerst wird der Nachweis von der Philosophie des Zenon her geführt. Es wird gezeigt, daß die Tannerysche Interpretation zu dem, was wir authentisch von der eleatischen Philosophie wissen, in Widerspruch steht, daß sich bei genauer Betrachtung in den überlieferten Zenonfragmenten keine Spur von einer Polemik gegen die Zerlegung einer Strecke in kleinste oder unendlich kleine Teile findet, und daß die Worte des Aristoteles sogar direkt gegen eine solche Auffassung der Zenonschen Antinomien sprechen. In diesem Teil der Beweisführung lehne ich mich eng an das vorzügliche Werk von Calogero⁴⁾ an. Calogero hat gezeigt, daß man die Absichten Zenons von der eleatischen Philosophie her viel besser verstehen kann als von der Infinitesimalhypothese aus. Zenon war weder ein Sophist, noch ein „Schicksalsmensch der antiken Mathematik“, sondern ein eleatischer Philosoph und Dialektiker, was die Antike auch niemals bezweifelt hat.

Der zweite Nachweis geht von der Mathematik aus. Es wird untersucht, welchen Inhalt eine Infinitesimalmathematik zur Zeit Zenons haben könnte, welche Probleme den Anlaß zur Anwendung von Infinitesimalmethoden hätten geben können, und welche historischen Hinweise auf solche Methoden wir haben, alles mit eindeutig negativem Ergebnis. Es gibt keine historische Nachricht über eine Infinitesimalmathematik vor 450, und es ist auch in keiner Weise einzusehen, wieso und wozu es eine solche Mathematik geben sollte.

Die Grundlagenkrise der griechischen Mathematik hat in der Tat nichts mit Zenon zu tun und ist vermutlich viel später zu datieren. Sie geht nicht von der Widerlegung des Infinitesimalen, sondern von der Entdeckung des Irrationalen aus. Ich werde noch genauer zeigen, wie die Entdeckung des Irrationalen die Mathematik am Anfang des vierten Jahrhunderts zu einer radikalen Revision ihrer Begriffe und Umgestaltung der Methoden zwang.

⁴⁾ Calogero, Studi sull' eleatismo, Publ. Scuola di Filos. di Roma, 1932.

Zum besseren Verständnis der folgenden Ausführungen füge ich hier eine kleine Zeittafel ein.

Zeittafel.

Zenon von Elea	± 465 ,	
Hippokrates von Chios	} eine Generation später.	
Demokritos von Abdera		
Archytas von Tarent	} ± 400 ,	
Theodoros von Kyrene		
Theaitetos von Athen	$\dagger 367$,	
Eudoxos von Knidos	$\dagger 355$,	
Eudemos (Schüler des Aristoteles),		
Euklid	± 300 ,	
Archimedes	$\dagger 212$.	

§ 1.

Die Antinomien der Bewegung.

„Zénon n'a nullement nié le mouvement (ce n'est pas un sceptique), il a seulement affirmé son incompatibilité avec la croyance de la pluralité“ schreibt Tannery. Ähnlich meinen Hasse und Scholz, daß es Zenon nicht um die Leugnung der Bewegung zu tun ist, sondern: „Diese Paradoxie“ (des fliegenden Pfeils) „hat die ad absurdum zu führende Voraussetzung einer Zeitstrecke als eines Aggregats von unendlich vielen Zeitpunkten zur Voraussetzung.“

Nach diesen (und erstaunlich vielen anderen) Autoren hätte also Zenon folgendermaßen geschlossen: Wenn die Hypothese der Vielheit (etwa die Auffassung einer Raum- oder Zeitstrecke als einer Vielheit von kleinsten Teilen) richtig wäre, so wäre keine Bewegung möglich; *da wir aber sehen, daß Bewegung stattfinden kann*, ist die Hypothese der Vielheit zu verwerfen.

Aber so kann Zenon unmöglich geschlossen haben, betont Calogero mit Recht. Zenon kann nicht von der Realität der Bewegung als feststehender Tatsache ausgegangen sein, da er als Eleat diese Realität unmöglich anerkennen konnte⁵⁾! Zenon ist doch (nach dem Zeugnis Platons im Dialog Parmenides)

⁵⁾ Mit beißendem Spott schreibt Calogero (S. 114—115): „Ma l'assurdo di questa interpretazione si chiarisce immediatamente, appena si pensi che, a questo modo, Zenone sarebbe venuto a dire che l'unica maniera di poter giustificare la realtà del moto era quella di negare il molteplice e di ammettere l'uno: solo l'uno, cioè, poteva veramente muoversi! Che sarebbe stato, davvero, un modo singolare di venire in soccorso del l'immobilità dell' ente parmenideo. Eppure, per strano che paia, questo tipo di collocazione sistematica della polemica zenoniana è pur quello che, esplicito o implicito, appare in molti dei più autorevoli e moderni interpreti, anche se spesso accostato o confusi con altri motivi critici con esso in realtà inconciliabili.“

ein treuer Schüler des Parmenides, und Parmenides behauptet in seinem authentischen Lehrgedicht ausdrücklich, daß das Seiende sich nicht bewegt, oder an anderer Stelle noch deutlicher, daß jede Veränderung des Ortes ein leerer Name, eine bloße Einbildung der Sterblichen sei ⁶⁾.

So wie Tannery ihn deutet, hat Zenon es also bestimmt nicht gemeint. Aber was war dann seine Absicht? Eine gewisse Schwierigkeit ergibt sich aus dem bestimmten Zeugnis Platons (im Parmenides), Zenon wolle mit seiner Schrift *ausschließlich* die Hypothese der Vielheit widerlegen, und alle seine verschiedenen Beweisgründe dienten nur dem einen Zweck. Wollte man in aller Strenge daran festhalten, so bliebe (nach Calogero) nur die Annahme übrig, daß die überlieferten vier Bewegungsaporien zusammen nur das eine Glied einer Antinomie bilden, indem in ihnen gezeigt wird, daß das Seiende, wenn es Vieles ist, sich nicht bewegen kann. Im anderen (nicht überlieferten) Teil der Antinomie müßte dann gezeigt werden, daß das Seiende, wenn es Vieles ist, auch nicht ruhen kann. Diese Auffassung erscheint aber recht gezwungen; es liegt viel näher, die Äußerung der Platonischen Dialogperson Zenon mit einem Körnchen Salz zu genießen und anzunehmen, wie es das spätere Altertum auch immer getan hat, daß Zenon, um die Thesen seines Lehrers allseitig zu stützen, seinen vielen Beweisgründen gegen die Vielheit noch vier Beweisgründe gegen die Möglichkeit der Bewegung hinzufügte. Diese ungezwungene Interpretation steht auch am besten in Einklang mit den Worten: „Vier sind die Argumente Zenons über die Bewegung“, mit denen Aristoteles seinen Bericht über die vier Bewegungsaporien anhebt.

Da dieser Bericht des Aristoteles unsere einzige Quelle für die Bewegungsaporien darstellt, wollen wir ihn wörtlich zitieren ⁷⁾.

Ζήνων δὲ παραλογίζεται· εἰ γὰρ αἰεί, φησὶν, ἡρεμεῖ πᾶν ἢ κινεῖται, <οὐδὲν δὲ κινεῖται>, ὅταν ᾖ κατὰ τὸ ἴσον, ἔστι δ' αἰεὶ τὸ φερόμενον ἐν τῷ νῦν, ἀκίνητον τὴν φερομένην εἶναι οἰστόν.

Zenon macht einen Fehlschluß; denn wenn, sagt er, immer alles entweder in Ruhe oder in Bewegung ist, (aber nichts in Bewegung sein kann), wenn es sich in einem mit ihm selbst gleichen Raume aufhält, wenn ferner das Bewegte jeweils im Jetzt ist, dann müßte der in Bewegung befindliche Pfeil unbewegt sein.

⁶⁾ H. Diels, Die Fragmente der Vorsokratiker, Parmenides B 8. Die zitierte Stelle heißt wörtlich: τῷ πάντ' ὄνομα(α) ἔσται, ὅσα βροτοὶ κατέθεντο πεποιθότες εἶναι ἀληθῆ, . . . καὶ τόπον ἀλλάσσειν . . .

⁷⁾ Text nach Diels, Fragmente. Die Übersetzung wurde mir von Herrn Gadamer freundlichst zur Verfügung gestellt.

τοῦτο δ' ἐστὶ ψεῦδος· οὐ γὰρ σύγκειται ὁ χρόνος ἐκ τῶν νῦν τῶν ἀδιαιρέτων, ὥσπερ οὐδ' ἄλλο μέγεθος οὐδέν.

τέτταρες δ' εἰσὶν οἱ λόγοι περὶ κινήσεως Ζήνωνος οἱ παρέχοντες τὰς δυσκολίας τοῖς λύουσιν, πρῶτος μὲν ὁ περὶ τοῦ μὴ κινεῖσθαι διὰ τὸ πρότερον εἰς τὸ ἡμῖς δεῖν ἀφικέσθαι τὸ φερόμενον ἢ πρὸς τὸ τέλος, περὶ οὗ διείλομεν ἐν τοῖς πρότερον λόγοις.

δεύτερος δ' ὁ καλούμενος Ἀχιλλεύς. ἔστι δ' οὗτος ὅτι τὸ βραδύτατον οὐδέποτε καταληφθήσεται θεόν ὑπὸ τοῦ ταχίστου· ἐμπροσθεν γὰρ ἀναγκαῖον ἐλθεῖν τὸ διώκον, ὅθεν ὠρμησε τὸ φεῦγον, ὥστ' αἰεὶ τι προέχειν ἀναγκαῖον τὸ βραδύτερον. ἔστι δὲ καὶ οὗτος ὁ αὐτὸς λόγος τῷ διχοτομεῖν, διαφέρει δ' ἐν τῷ διαιρεῖν μὴ δίχα τὸ προσλαμβάνομενον μέγεθος.

τρίτος δ' ὁ νῦν ῥηθείς, ὅτι ἡ διστὸς φερομένη ἔστηκεν. συμβαίνει δὲ παρὰ τὸ λαμβάνειν τὸν χρόνον συγκεῖσθαι ἐκ τῶν νῦν μὴ διδομένου γὰρ τούτου οὐκ ἔσται ὁ συλλογισμός.

Dies aber ist falsch. Denn nicht ist die Zeit aus den unteilbaren Jetzt zusammengesetzt, ebenso wenig wie irgend eine andere Größe.

Vier sind die Argumente Zenons über die Bewegung, die den Auflösenden solche Schwierigkeiten bereiten: erstens das, welches die Bewegung leugnet, weil das Bewegte immer vorher bis zur Hälfte gekommen sein müsse als bis zum Ende — worüber wir in den vorangegangenen Erörterungen gesprochen haben.

Zweitens der sogenannte Achilles. Er lautet so, daß das langsamste Wesen in seinem Lauf niemals von dem allerschnellsten eingeholt werden könne. Vorher nämlich müßte der Verfolger jedesmal notwendig erst dorthin kommen, von wo der Fliehende schon losgelaufen sei, so daß der Langsamere doch immer ein Stück voraus sein müsse. Auch dieses Argument ist mit dem der Halbierung identisch, nur darin besteht der Unterschied, daß die Teilung der jeweils neu hinzugenommenen Strecke nicht in zwei gleiche Teile erfolgt.

Das dritte ist das eben genannte, daß der fliegende Pfeil steht. Es folgt das aber nur von der Annahme her, daß die Zeit aus Jetztpunkten zusammengesetzt sei; wenn das nämlich nicht zugegeben wird, wird der ganze Beweis nicht herauskommen.

τέταρτος δ' ὁ περὶ τῶν ἐν σταδίῳ κινουμένων ἐξ ἐναντίας ἴσων ὄγκων παρ' ἴσους, τῶν μὲν ἀπὸ τέλους τοῦ σταδίου τῶν δ' ἀπὸ μέσου, ἴσῳ τάχει, ἐν ᾧ συμβαίνειν οἴεται ἴσον εἶναι χρόνον τῷ διπλασίῳ τὸν ἡμῖσιν. ἔστι δ' ὁ παραλογισμὸς ἐν τῷ τὸ μὲν παρὰ κινούμενον τὸ δὲ παρ' ἡρεμοῦν τὸ ἴσον μέγεθος ἀξιοῦν τῷ ἴσῳ τάχει τὸν ἴσον φέρεσθαι χρόνον. τοῦτο δ' ἐστὶ ψεῦδος. οἷον ἔστωσαν οἱ ἐστῶτες ἴσοι ὄγκοι ἐφ' ὧν τὰ AA, οἱ δ' ἐφ' ὧν τὰ BB ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ μέσου τῶν A, ἴσοι τὸν ἀριθμὸν τούτοις ὄντες καὶ τὸ μέγεθος, οἱ δ' ἐφ' ὧν τὰ ΓΓ ἀπὸ τοῦ ἐσχάτου, ἴσοι τὸν ἀριθμὸν ὄντες τούτοις καὶ τὸ μέγεθος, καὶ ἰσοταχεῖς τοῖς B. συμβαίνει δὴ τὸ πρῶτον B ἅμα ἐπὶ τῷ ἐσχάτῳ εἶναι καὶ τὸ πρῶτον Γ, παρ' ἄλληλα κινουμένων. συμβαίνει δὲ καὶ τὸ Γ παρὰ πάντα τὰ B διεξελθῆναι, τὰ δὲ B παρὰ τὰ <A> ἡμίση· ὥστε ἡμῖσιν εἶναι τὸν χρόνον· ἴσον γὰρ ἐκάτερόν ἐστι παρ' ἑκάστον. ἅμα δὲ συμβαίνει τὰ B παρὰ πάντα τὰ Γ παρελθῆναι· ἅμα γὰρ ἔσται τὸ πρῶτον Γ καὶ τὸ πρῶτον B ἐπὶ τοῖς ἐναντίοις ἐσχάτοις, ἴσον χρόνον παρ' ἑκάστον γινόμενον τῶν B ὅσον περ τῶν A, ὡς φησι, διὰ τὸ ἀμφοτέρα ἴσον χρόνον παρὰ τὰ A γίνεσθαι.

Das vierte ist das über die sich im Stadion in entgegengesetzter Richtung aneinander vorbeibewegenden gleich großen Teilchen, von denen die einen vom Ende des Stadion, die anderen von der Mitte aus mit gleicher Geschwindigkeit sich bewegen sollen. Hier, meinte er, ergäbe sich, daß die halbe Zeit der doppelten Zeit gleich sei. Der Fehler liegt darin, daß man meint, die gleiche Größe bewege sich mit gleicher Geschwindigkeit in der gleichen Zeit ebenso an einer selber bewegten wie an einer stehenden Größe vorbei. Das aber ist falsch. Zum Beispiel seien AA die stehenden gleichen Teilchen, ferner BB von der Mitte her anfangende, mit den ersten gleich an Zahl und Erstreckung, schließlich ΓΓ vom Ende anfangende, ebenfalls an Zahl und Erstreckung diesen ersten gleich und gleich schnell wie die B. Dann ergibt sich offenbar, daß das erste B gleichzeitig am Ende ist wie das erste Γ, wenn sie sich aneinander vorbeibewegen. Es ergibt sich aber, daß zwar das Γ an allen B vorbeigekommen ist, das B aber nur an der Hälfte der A, so daß die Zeitdauer dieser Bewegung nur die halbe ist. Die gleiche Zeit benötigt ja ein jedes von ihnen im Vorbeimarsch an jedem einzelnen. Zugleich aber ergibt sich, daß das erste⁸⁾ B an allen Γ vorbeigekommen ist, denn gleichzeitig werden das erste Γ und das erste B an den entgegengesetzten Enden sein, weil beide in der gleichen Zeit an den A vorbeikommen.

⁸⁾ Im Text steht „die B“, was aber keinen Sinn ergibt.

Man hat vielfach versucht, in diese vier Beweisgründe eine Systematik etwa folgender Art hineinzubringen: In den ersten beiden wird die Annahme gemacht, eine Raum- oder Zeitstrecke sei unendlich teilbar, in den letzten beiden dagegen die, die Teilung führe einmal zu letzten, indivisiblen Teilen. Diese Systematik ist aber im überlieferten Text nicht zu finden, sondern erst von den Kommentatoren hineingebracht. Aristoteles zeigt zwar, daß die ersten beiden Aporien auf demselben Grundgedanken beruhen, aber doch nur, um sie gemeinsam widerlegen zu können („ὥστ' ἀνάγκη καὶ τὴν λύσιν εἶναι τὴν αὐτὴν“). Zenon aber setzt die unendliche Teilbarkeit nicht voraus, sondern er beweist sie durch fortgesetzte Halbierung. Aus der schlichten Tatsache, daß jede Strecke eine Mitte besitzt, leitet er die Unendlichkeit ab, die er für seinen Beweis braucht. In der zweiten Aporie, dem Achilleus, konstruiert er in anderer Weise eine unendliche Folge von Augenblicken. Auch in anderen Zenonischen Aporien wiederholt sich dieses typische Schlußverfahren: Einerseits führt die Wiederholung eines bestimmten Schlusses zu einer unendlichen Folge, andererseits ist eine fertige, „seiende“ Unendlichkeit nicht denkbar (vgl. vor allem Fragment 3 bei Diels).

Auch beim fliegenden Pfeil ist die Voraussetzung, daß die Zeit eine Vielheit von Momenten sei, nicht im Text der Aporie zu finden, sondern erst in der Aristotelischen Auflösung. Aristoteles sagt: „Die Aporie beruht auf der Voraussetzung, daß die Zeit aus einzelnen Jetzt bestehe; wenn das aber nicht zugegeben wird, wird der ganze Beweis hinfällig.“ Diese Bemerkung ist, wie aus dem ganzen Zusammenhang hervorgeht, als Kritik gemeint, nicht als Wiederholung einer von Zenon ausdrücklich gemachten Voraussetzung. „Zenon macht einen Fehlschluß“, heißt es ja auch kurz vorher bei der Besprechung derselben Aporie. Das bewußte Ausgehen von einer falschen Voraussetzung, wie es beim indirekten Beweis immer geschieht, ist (auch für Aristoteles) kein Fehlschluß. Bei Zenon ist von einer Zerlegung der Zeitspanne in einzelne Momente, soviel wir wissen, nicht die Rede⁹⁾.

⁹⁾ In der Tat kann man nach Calogero, auch ohne eine solche Zerlegung voraussetzen, Zenon sehr gut verstehen. Für ihn, wie für Parmenides, ist Sein = jetzt sein. Ein Werden und ein Gewordenes gibt es nicht; das Werden ist mit dem Begriff des Seins unverträglich. Von dieser Grundüberzeugung der eleatischen Philosophie kann Zenon aber bei seiner Beweisführung nicht ausgehen, denn sie ist ja erst durch die Aporie zu beweisen. Wohl aber kann er davon ausgehen, daß Sein = jetzt sein ist, denn das liegt für ihn in der Wortbedeutung selbst. Da nun der Pfeil im Jetzt nicht von der Stelle kommt, kann er sich jetzt nicht bewegen. Da er aber immer im Jetzt ist, muß er dauernd ruhen. Diese Deutung hat den Vorteil, daß sie nichts hineininterpretiert, was nicht im Aristotelischen Text ausdrücklich dasteht. Die Widerlegung des Aristoteles geht von der entgegengesetzten Grundüberzeugung aus, wonach Sein bedeutet Sein in der Zeit. Demgemäß fragt Aristoteles: Wieso soll daraus, daß der Pfeil jetzt nicht von der Stelle kommt, folgen, daß er auch mit der Zeit nicht von der Stelle kommt? Der Schluß wäre doch nur berechtigt, wenn

Es ist sehr verständlich, daß die Philosophen, die sich um die Auflösung der Zenonischen Paradoxien bemühten, dabei auf die Frage nach der Natur des Kontinuierlichen stießen, oder daß umgekehrt diejenigen, die die Natur des Kontinuums bestimmen wollten, genötigt waren, sich mit den Zenonischen Aporien auseinanderzusetzen. Auch Zenon mag sich über das Kontinuum Gedanken gemacht haben, aber die Bestimmung der Natur des Kontinuierlichen war sicherlich nicht das Ziel seiner Beweisführungen, sondern er bediente sich der Gegenüberstellung des Zeit- und des Raumkontinuums nur als Mittel, um eine Unendlichkeit zu erhalten und damit zu einem Widerspruch zu kommen.

Oder sollte es sich anders verhalten mit jenem teilweise authentischen Fragment, in dem Zenon die räumliche Natur des als Vielheit vorausgesetzten Seienden untersucht, um zu zeigen, daß man sich dabei in Widersprüche verwickelt? Wir geben hier den Text, wie er sich bei Simplicios findet, mit der Übersetzung von Kranz unter Berücksichtigung einer Bemerkung aus der Rezension von O. Becker (Quellen u. Studien Bd. 4, S. 153).

1. Simpl. Phys. 140, 34. τὸ δὲ κατὰ μέγεθος [nämlich ἄπειρον ἔδειξε] πρότερον κατὰ τὴν αὐτὴν ἐπιχείρησιν. προδείξας γὰρ ὅτι 'εἰ μὴ ἔχοι μέγεθος τὸ ὄν, οὐδ' ἂν εἴη', ἐπάγει 'εἰ δὲ ἔστιν, ἀνάγκη ἕκαστον μέγεθος τι ἔχειν καὶ πάχος καὶ ἀπέχειν αὐτοῦ τὸ ἕτερον ἀπὸ τοῦ ἑτέρου. καὶ περὶ τοῦ προύχοντος ὁ αὐτὸς λόγος. καὶ γὰρ ἐκεῖνο ἔξει μέγεθος καὶ προέξει αὐτοῦ τι. ὁμοίον δὲ τοῦτο ἅπαρ τε εἰπεῖν καὶ αἰεὶ λέγειν· οὐδὲν γὰρ αὐτοῦ τοιοῦτον ἔσχατον ἔσται οὔτε ἕτερον πρὸς ἕτερον οὐκ ἔσται. οὕτως εἰ πολλὰ ἔστιν, ἀνάγκη αὐτὰ μικρὰ τε εἶναι καὶ μεγάλα· μικρὰ μὲν ὥστε μὴ ἔχειν μέγεθος, μεγάλα δὲ ὥστε ἄπειρα εἶναι'.

1. Das der Größe nach Unendliche legte er vorher (vor fr. 3) nach demselben Beweisgang dar. Er zeigt zuerst, daß wenn das Seiende keine Größe besitze, es auch nicht sei. Dann fährt er so fort: Wenn es aber ist, so muß notwendigerweise ein jeder Teil eine gewisse Größe und Dicke und Abstand der eine vom anderen haben. Und von dem vor jenem liegenden Teile gilt dieselbe Behauptung. Auch dieser wird nämlich Größe haben und es wird ein anderer vor ihm liegen. Die gleiche Behauptung gilt nun ein für allemal^{9a)}. Denn kein derartiger Teil desselben (des Ganzen) wird die äußerste Grenze bilden, und nie wird der eine ohne Beziehung zum anderen sein. Wenn also viele Dinge sind, so müssen sie

die Zeit aus einzelnen Jetzt zusammengesetzt wäre. Läßt man das aber nicht gelten, so entfällt auch die Schlußfolgerung.

^{9a)} Herr Bessel-Hagen macht mich aufmerksam, daß der Text viel prägnanter ist: „Es ist nun ungefähr dasselbe, dieses einmal zu sagen und es immer wieder zu sagen“. Er bemerkt dazu, daß hier (vermutlich zum ersten Mal) das Prinzip der vollständigen Induktion ausgesprochen erscheint.

2. Simpl. Phys. 139, 5. ἐν μέντοι τῷ συγγράμματι αὐτοῦ πολλά ἔχοντι ἐπιχειρήματα καθ' ἕκαστον δείκνυσιν, ὅτι τῷ πολλά εἶναι λέγοντι συμβαίνει τὰ ἐναντία λέγειν. ὧν ἓν ἐστὶν ἐπιχείρημα, ἐν ᾧ δείκνυσιν ὅτι 'εἰ πολλά ἐστὶ, καὶ μεγάλα ἐστὶ καὶ μικρά· μεγάλα μὲν ὥστε ἄπειρα τὸ μέγεθος εἶναι, μικρά δὲ οὕτως ὥστε μηθὲν ἔχειν μέγεθος' [B 1]. ἐν δὲ τούτῳ δείκνυσιν, ὅτι οὐ μήτε μέγεθος μήτε πάχος μήτε ὄγκος μηθεὶς ἐστὶν, οὐδ' ἂν εἴη τοῦτο. 'εἰ γὰρ ἄλλωι ὄντι, φησί, προσγένοιτο, οὐδὲν ἂν μεῖζον ποιήσειεν· μεγέθους γὰρ μηδενὸς ὄντος, προσγενομένου δέ, οὐδὲν οἷόν τε εἰς μέγεθος ἐπιδοῦναι. καὶ οὕτως ἂν ἤδη τὸ προσγινόμενον οὐδὲν εἴη. εἰ δὲ ἀπογινόμενον τὸ ἕτερον μηδὲν ἔλαττον ἐστὶν μηδὲ αὖ προσγινόμενον αὐξήσεται, δῆλον ὅτι τὸ προσγενομένον οὐδὲν ἦν οὐδὲ τὸ ἀπογενόμενον'. καὶ ταῦτα οὐχὶ τὸ ἐν ἀναιρῶν ὁ Ζήνων λέγει, ἀλλ' ὅτι μέγεθος ἔχει ἕκαστον τῶν πολλῶν καὶ ἁπείρων τῷ πρὸ τοῦ λαμβανομένου ἀεί τι εἶναι διὰ τὴν ἐπ' ἄπειρον τομήν· ὁ δὲ δείκνυσι προδείξας, ὅτι οὐδὲν ἔχει μέγεθος ἐκ τοῦ ἕκαστον τῶν πολλῶν ἑαυτῷ ταῦτόν εἶναι καὶ ἓν.

notwendig zugleich klein und groß sein: klein bis zur Nichtigkeit, groß bis zur Grenzenlosigkeit.

2. In seiner Schrift, die viele Beweisgänge enthält, zeigt er in jedem, daß wer die Vielheit behauptet, sich Widersprechendes sagt. So ist einer dieser Beweisgänge folgender. Er will zeigen, daß „wenn Vieles ist, dies zugleich groß und klein sein muß, und zwar groß bis zur Grenzenlosigkeit und klein bis zur Nichtigkeit“ [B 1]. Darin sucht er nun zu zeigen, daß ein Ding, das weder Größe noch Dicke noch Masse besitzt, überhaupt nicht sein könne. Denn würde es zu einem anderen Seienden zugefügt (so lauten seine Worte), so würde es dieses um nichts vergrößern. Denn wird etwas, was keine Größe hat, einem anderen Ding hinzugefügt, so kann dieses an Größe nichts gewinnen. Und so wäre denn bereits der Zuwachs Nichts. Wenn ferner durch Abziehen das andere um nichts kleiner und andererseits durch Zufügen nicht größer werden wird, so war offenbar das Zugefügte wie das Abgezogene nichts. Und dies führt Zenon nicht aus, um das Eine aufzuheben, sondern weil ein jedes der vielen und unendlichen Dinge Größe haben muß. Denn vor jedem einzelnen, das man nimmt, muß stets wieder irgendein anderes sein wegen der Teilung ins Grenzenlose. Dies legt er dar, nachdem er zuvor gezeigt, daß nichts Größe besitzt, weil jedes der vielen Dinge mit sich selbst identisch und eins ist.

Der Text ist leider etwas dunkel. Wir geben zunächst die Interpretation von Hasse und Scholz wieder:

„Wenn es zulässig ist, eine Strecke als ein Aggregat von unendlich vielen, unendlich kleinen Elementarstrecken aufzufassen, so sind zwei und nur zwei Fälle möglich. Entweder haben jene Elementarstrecken eine endliche, von Null verschiedene Größe. Dann wird die aus ihnen zusammengesetzte Strecke unendlich groß sein müssen; denn ein Aggregat von unendlich vielen Elementarstrecken von endlicher Größe übersteigt jede endliche Strecke. Oder die angenommenen Elementarstrecken sind Nullstrecken im strengen Sinne des Wortes. Dann ist auch die aus ihnen zusammengesetzte Strecke eine Nullstrecke; denn eine Zusammenstellung von Nullstrecken kann immer wieder nur eine Nullstrecke liefern, gleichviel wie groß die Anzahl der hierbei verwendeten Strecken ist.“

Wo Zenon eine Vielheit von Dingen mit räumlicher Ausdehnung betrachtet, erblicken die Interpreten eine Strecke. Wo Zenon (an zwei Stellen bei Simplicios übereinstimmend) schreibt „*zugleich klein und groß: klein bis zur Größelosigkeit, groß bis zur Unendlichkeit*“ heißt es hier „*entweder Null oder unendlich groß*“. Die Behauptung „unendlich klein“ wird hier in die Voraussetzung hereingenommen (eine Voraussetzung, die übrigens nicht benutzt wird). Die Unendlichkeit der Anzahl, die Zenon erst mühsam beweist, wird hier ebenfalls als Voraussetzung eingeführt. Usw.

Vergleicht man ganz phantasielos die beiden Fragmente, so sieht man, daß sie sich beide auf dieselbe Beweisführung beziehen. Was bewiesen werden soll, ist in beiden Fragmenten dasselbe, nämlich: *Wenn Vieles ist, so ist dieses zugleich klein und groß: klein bis zur Größelosigkeit, groß bis zur Unendlichkeit*. Auch die einzelnen Beweisschritte finden sich in beiden Fragmenten wieder, nur sind einzelne Teile des Beweises im 1. Fragment, andere im 2. Fragment ausführlicher dargestellt. Im *ersten Beweisschritt* wird gezeigt: Jedes von den Vielen hat, sofern es ein Seiendes ist, auch Größe. So steht es klar formuliert in Fragment 1, und näher ausgeführt im Fragment 2, Zeile 11–28 (Zeile 10–30 der Übersetzung). Der *zweite Beweisschritt* will zeigen, daß vor jedem Einzelnen wieder ein Anderes liegt und so fort ins Unendliche. Er findet sich ausführlich formuliert in Fragment 1, Zeile 9–16 (Zeile 10–19 der Übersetzung), während in Fragment 2 Simplicios das Ergebnis nur kurz zusammenfaßt: „Denn vor jedem einzelnen, das man nimmt, muß stets wieder irgendein anderes sein.“ Dazu kommt der zunächst unklare Zusatz „wegen der Teilung ins Grenzenlose“, dessen Wortlaut ebenfalls von Simplicios herrührt, und der daher zunächst außer Betracht bleiben möge. Im wörtlichen Fragment 1 folgt auf den zweiten Beweisschritt gleich die Formulierung des Endergebnisses. Das ist auch ganz in der Ordnung, denn aus der unendlichen Anzahl der seienden Dinge und daraus, daß jedes Einzelne eine bestimmte Größe hat, folgt für

Zenon offenbar direkt, daß das Ganze der unendlich vielen Dinge eine unendliche Größe hat.

Im Fragment 1 wird demnach nur die zweite Teilbehauptung, das „groß bis zur Unendlichkeit“ bewiesen. Das stimmt auch zu der vorausgeschickten Ankündigung: „Das der Größe nach Unendliche legt er vorher nach demselben Beweisgang dar.“

Wo bleibt nun der Beweis der ersten Teilbehauptung, des „klein bis zur Größelosigkeit“? Es scheint, daß dieser Beweis im letzten Satz des 2. Fragmentes angedeutet ist: „nachdem er zuvor gezeigt, daß nichts Größe besitzt, weil jedes der vielen Dinge mit sich selbst identisch und eins ist“. Die Andeutung ist allerdings so dunkel, daß es mir unmöglich scheint, daraus einen Beweis zu rekonstruieren. Vielleicht gehört auch der bisher beiseite gelassene Nachsatz „wegen der Teilung ins Grenzenlose“ eher in diesen Zusammenhang hinein, denn durch Teilung ins Grenzenlose würde man eventuell auf Teilchen stoßen, die „klein bis zur Nichtigkeit“ wären. Jedoch diese Interpretation ist so unsicher, daß es ratsam scheint, keinerlei Schlüsse daraus zu ziehen. Gesichert sind eben nur die zwei oben herauspräparierten Beweisschritte.

Diese aber geben nicht den geringsten Anhaltspunkt dafür, daß die Frage der „kleinsten Teile“ des Seienden irgendwie zur Diskussion stand. Es ist nur von den „seienden Dingen“, ihrer Größe und ihrer Dicke und Abstand von anderen, aber nicht von ihrer Unteilbarkeit die Rede, außer in dem unklaren Nachsatz „wegen der Teilung ins Grenzenlose“. Aber sogar dieser Nachsatz läßt sich nicht so deuten, daß Zenon von der Annahme der „indivisiblen Teile“ ausgegangen wäre, um sie zu widerlegen, denn er beruft sich ganz im Gegenteil (wenn der Nachsatz echt sein soll) auf die Teilung ins Grenzenlose.

Schließlich noch eines: Wenn die Zenonischen Beweisgründe den Zweck hätten, die Zerlegung geometrischer Größen in kleinste Teile zu widerlegen, so wäre Zenon in diesem Punkte völlig einer Meinung mit Aristoteles, der im gleichen Buch Z der Physik mit allem Nachdruck darlegt, daß das Kontinuierliche nicht aus Unteilbarem bestehen kann (Physik Z 1). Wie wäre es dann zu erklären, daß Aristoteles dem Zenon immerfort $\psi\epsilon\upsilon\delta\omicron\varsigma$ (Physik Z 2) und $\pi\alpha\rho\alpha\lambda\omicron\gamma\iota\sigma\mu\acute{o}\varsigma$ (ebenda Z 9, zweimal) vorwirft und ihn ausführlich zu widerlegen sucht?

§ 2.

Die Infinitesimalmathematik.

Wenn nun Zenon aber doch die „Indivisiblen“, die unendlich kleinen Größen bekämpft hätte, konnten die damaligen Mathematiker sich davon betroffen fühlen? Konnte es dadurch zu einer „Grundlagenkrise“ kommen?

Fragen wir einmal ganz nüchtern: In welchen Teilen der klassischen Geometrie kann man unendlich kleine Größen mit Vorteil benutzen? Die

Antwort: Bei der Berechnung von Rauminhalten, Flächeninhalten und Bogenlängen und bei der Konstruktion von Tangenten. Sonst meines Wissens nirgends.

Fangen wir bei den Tangenten an. Die Tangente eines Kreises ist leicht genug zu finden, auch ohne Infinitesimalbetrachtungen. Und höhere Kurven gehörten, soweit sie damals (im 5. Jahrhundert!) schon betrachtet wurden, zur höheren Mathematik, nicht zu den Grundlagen. Wenn man ihre Tangenten noch nicht konstruieren konnte, so war das jedenfalls kein Grund zur Aufregung oder gar zu einer Krisis.

Ebenso kann es sich bei der Bogenlänge nur um Kreisbogen, also in erster Linie um den Kreisumfang handeln. Die einfachsten Inhaltsbestimmungen, zu denen man Infinitesimalbetrachtungen gut gebrauchen kann, sind die des Kreises und der Pyramide. Gleichzeitig mit dem Flächeninhalt des Kreises erhält man auch den Kreisumfang, sowie den Inhalt des Zylinders, und mit derselben Methode wie die Pyramide kann man auch den Kegel behandeln. Das ist aber auch alles: weiter ist man vor Archimedes überhaupt nicht gekommen.

Also im wesentlichen Kreisfläche und Pyramideninhalt. Genau auf diese beiden Probleme hat man nun auch, wie die Überlieferung lehrt, die Infinitesimalmethode angewandt. Berichten doch Aristoteles¹⁰⁾ und Simplicios¹¹⁾ über die Kreisquadratur des Sophisten Antiphon, die darin bestand, daß er in den Kreis ein regelmäßiges Polygon mit immer mehr Seiten einbeschrieb, bis diese Seiten mit dem Kreisumfang zusammenfielen. Und Archimedes stellt fest¹²⁾, daß Demokritos den Satz entdeckt hat, daß die Pyramide gleich dem dritten Teil des Prismas auf derselben Basis und mit derselben Höhe ist, allerdings ohne einen wissenschaftlichen Beweis dafür zu geben. Es ist nicht ganz klar, ob die Mitteilung Archimedes' sich auch auf den Kegel bezieht. Nimmt man noch den Bericht des Ploutarchos¹³⁾ hinzu, nach dem Demokritos die Frage aufgeworfen hat, ob beim Schnitt eines Kegels mit Ebenen parallel zur Basis die Flächen der Schnitte gleich oder ungleich seien (im letzten Fall würde nämlich der Kegel treppenförmig werden, im ersten Fall hätte er Zylindergestalt), so wird es wohl sehr wahrscheinlich, daß Demokritos sich bei seiner Herleitung des Pyramiden- oder Kegelinhalt der Methode der Zerlegung in unendlich dünne Scheiben bedient hat. Ob er die Herleitung selbst als schlüssigen Beweis betrachtet hat, steht nicht fest.

¹⁰⁾ Aristoteles, *Physica* I, 2, 185a, S. 14.

¹¹⁾ Simplicii in *Aristot. Phys. comm.* ed Diels, 54, 20—55, 11.

¹²⁾ Archimedes, *Ephodos* 430.

¹³⁾ Ploutarchos, *De communibus notitiis adversus Stoicos*, *Scripta Moralia* II (ed Dübner) 1321.

Bekanntlich hat dann Eudoxos die Inhaltsbestimmung der Pyramide und des Kegels ohne Infinitesimalbetrachtungen exakt durchgeführt¹⁴). Die Infinitesimalmethode lebte, wenn auch nicht offiziell anerkannt, weiter und wurde noch von Archimedes als heuristisches Prinzip benutzt¹⁵).

Könnte nun jemand vor Demokrit schon den Pyramideninhalt in ähnlicher Weise bestimmt haben? Dieser Annahme steht zunächst einmal die bestimmte Mitteilung des Archimedes entgegen. Aber nehmen wir es für einen Augenblick trotzdem an, könnte dann Zenons Kritik gegen diese Infinitesimalbetrachtung gerichtet sein? Es ist nicht anzunehmen, denn die Zenonische Schrift hat ganz gewiß großes Aufsehen erregt, und die Herleitung des Pyramideninhaltes müßte durch seine Kritik allgemeine Bekanntheit erlangt haben. Wie sollte es dann dem Demokrit möglich sein, eine Entdeckung, die so im Brennpunkt der Aufmerksamkeit stand, für seine eigene auszugeben?

Als letzte Möglichkeit einer Infinitesimalmathematik, gegen die Zenons Kritik gerichtet sein könnte, bliebe somit nur die Bestimmung der Kreisfläche und die Herleitung der Beziehung zwischen Kreisfläche und Kreisumfang. Es handelt sich also um die Sätze, daß die Kreisfläche proportional dem Quadrat des Durchmessers und gleich dem halben Produkt aus Kreisumfang und Radius ist. Diese Sätze können in der Tat „bewiesen“ werden, indem man den Kreis als Polygon mit unendlich vielen Seiten betrachtet, und es wäre immerhin möglich, daß eine solche Betrachtung nicht erst von dem Sophisten Antiphon, sondern schon vor Zenon aufgestellt worden wäre. Aber es handelt sich hier um eine bloße Möglichkeit, eine reine Phantasiekonstruktion: Nichts deutet darauf hin, daß es sich wirklich so verhalten hat. Außerdem gibt es noch Einwände genug. Wie käme z. B. Antiphon dazu, eine von Zenon endgültig widerlegte Betrachtungsweise von neuem aufzunehmen?

Nein, das Verhältnis zwischen Zenon und der Hypothese der Indivisibilen ist zeitlich und logisch umzukehren. Die Zenonischen Beweisgründe sind es, die spätere Denker dazu gebracht haben, eine Zerlegung der geometrischen Größen in kleinste Teile anzunehmen, um so den Aporien zu entgehen. So stellt es die peripatetische Schrift *περὶ ἀτόμων γραμμῶν* dar, die in ihrem ersten Teil (Aristoteles Opera II, 968a) die Scheingründe für die Existenz unteilbarer Linien darstellt und dabei schreibt: „Ferner nötigt der Zenonische Beweis zur Annahme einer unteilbaren Größe“. So berichten nach Simplicios¹⁶) auch Alexandros und Porphyrios, daß Xenokrates durch die Schlüsse Zenons zu der Annahme veranlaßt wurde, daß die wiederholte Teilung einer geometrischen Größe schließlich nach endlich vielen Schritten zu solchen Teilen führen würde, die zwar noch Größe haben, aber nicht mehr geteilt werden

¹⁴) Siehe Archimedes, *De sphaera et cylindro*, sowie Euklid, *Elemente*, Buch 12.

¹⁵) Archimedes, *Ephodos*.

¹⁶) Simplicii in Aristot. *Phys.* 138, 10 und 140, 6.

können, also zu Körperatomen, Flächenatomen und Linienatomen. Ebenso wie Aristoteles und andere Zeitgenossen scheint also Xenokrates beim Versuch der Auflösung der Zenonischen Paradoxien dazu gekommen zu sein, die Natur des Kontinuums zu untersuchen, und kam dabei, soweit die Berichte Vertrauen verdienen, zum geometrischen Atomismus.

Ebenso ist ja überhaupt, nach dem ausdrücklichen Zeugnis des Aristoteles¹⁷⁾, der Atomismus historisch eine Reaktion auf die eleatische Philosophie, nicht umgekehrt. Die Schlüsse der Eleaten hatten die Realität von Werden und Vergehen in Frage gestellt; um nun trotzdem das Werden und Vergehen in der Sinnenwelt zu erklären, hat man die Existenz unvergänglicher Atome angenommen, die mit allen Eigenschaften des parmenideischen Einen ausgestattet wurden. Durch dieses Zeugnis ist, wie mir scheint, allen Spekulationen über einen frühen Pythagoreischen Atomismus, gegen den sich die eleatische Philosophie richten würde, der Boden entzogen.

Aus alledem ergibt sich nun, daß nicht der geringste Anhaltspunkt für die Annahme einer Infinitesimalmathematik oder eines geometrischen Atomismus zu Zenons Zeiten vorhanden ist, und daß eine solche Annahme auch in keiner Weise paßt zu dem, was wir sonst von der Geschichte der Mathematik und des Atomismus wissen. Folglich werden die Zenonischen Beweisgründe auch nicht gegen eine solche Lehre gerichtet sein.

Diese Schlußfolgerung steht mit der auf ganz anderem Wege gewonnenen des § 1 in vollem Einklang.

Sollte der Leser durch das Vorangehende noch nicht überzeugt sein, sondern doch annehmen, daß die Zenonische Kritik gegen irgendeine Art von Indivisibilenlehre gerichtet sein könnte, so wird er doch wenigstens das zugeben müssen, was sich aus den mathematischen Entwicklungen am Anfang dieses Paragraphen ergibt, nämlich daß durch die Zenonische Kritik unmöglich eine Grundlagenkrise der Mathematik veranlaßt werden konnte; denn die mathematischen Anwendungen der Indivisibilen gehören nicht zu den Grundlagen der damaligen Mathematik, sondern sie könnten sich höchstens auf den Umfang und die Fläche des Kreises beziehen.

§ 3.

Die Krisis des Irrationalen.

Man soll mich nicht mißverstehen: Ich leugne nicht, daß es eine Grundlagenkrise in der griechischen Mathematik gegeben hat. Ich leugne nur, daß diese Krisis vom Problem des Unendlichkleinen ausgegangen ist, und daß Zenon etwas mit ihr zu tun gehabt hat.

¹⁷⁾ Aristoteles, Über Entstehen und Vergehen, Buch A, Kap. 2.

Die Grundlagenkrise der griechischen Mathematik war nach meiner Meinung keine philosophische, sondern eine innermathematische Angelegenheit, und sie hat von der Entdeckung des Irrationalen ihren Ausgang genommen. Durch die Entdeckung des Irrationalen war man genötigt, die Auffassung aufzugeben, daß alle Strecken durch Zahlen dargestellt werden können, eine Auffassung, die für die ganze Struktur der babylonischen und der frühgriechischen Mathematik bestimmend war. Man war genötigt, die Algebra, die unbekümmert Strecken und Zahlen durcheinandergeworfen hatte, in eine geometrische Algebra zu verwandeln und sie von der Zahlentheorie sauber zu trennen. Man war genötigt, sich nach einer neuen Definition des Verhältnisbegriffs umzusehen und neue Beweise für die Lehre von den ähnlichen Figuren zu suchen.

Zur Begründung dieser These muß ich zunächst an die hochentwickelte babylonische Algebra erinnern, wie sie in ungebrochener Kontinuität in den mathematischen Keilschrifttexten von der frühen Hammurapzeit bis zur Seleukidenzeit uns entgegentritt¹⁸⁾. In diesen Texten sind in der Tat Geometrie und Algebra in der Weise vermischt, daß die Terminologie meistens der Geometrie entnommen, der Gedankeninhalt aber immer algebraisch ist. Alle die „Längen“, „Breiten“, „Höhen“ und „Flächen“, die in den Texten vorkommen, sind nicht nur als geometrische Größen, sondern gleichzeitig und hauptsächlich als Zahlen aufzufassen, was sich unter anderem darin zeigt, daß sie ohne Rücksicht auf ihre Dimension addiert und multipliziert werden¹⁹⁾.

Dieses Wechselspiel von Geometrie und Algebra setzt die Grundüberzeugung voraus, daß alle geometrischen Größen sich durch Zahlen darstellen lassen. Bei einem leistungsfähigen Zahlensystem, wie es das sumerisch-babylonische ist, trifft das auch praktisch zu: Jede Strecke läßt sich mit beliebiger Genauigkeit durch eine sexagesimal geschriebene Zahl darstellen. Daß man sich unter Umständen mit einer genäherten Darstellung begnügt hat, zeigt das Beispiel der babylonischen Annäherung $\sqrt{2} \sim \frac{17}{12}$.

Aber auch das Bruchsystem der griechischen Logistik war reichhaltig genug, um jede Größe genähert darzustellen. Daher ist die Hypothese berechtigt, daß man auf den Frühstufen der griechischen Mathematik ebenso selbstverständlich wie in der babylonischen jede Strecke als durch eine Zahl darstellbar angenommen hat. Überhaupt: Daß man jede Strecke messen kann, ist für das vorwissenschaftliche oder frühwissenschaftliche Denken

¹⁸⁾ Siehe vor allem O. Neugebauer, *Mathematische Keilschrift-Texte, Quellen und Studien* A 3 (1935).

¹⁹⁾ Siehe z. B. den Text A O 8862 (Neugebauer, a. a. O., S. 108) oder Strssbg. 362 (a. a. O., S. 239).

(auch für unsere heutige Schuljugend und für die moderne Naturwissenschaft außer der Sphäre der exakten Mathematik) vollkommen selbstverständlich. Der Quellennachweis, den wir weiter unten führen werden, ist nicht dazu da, diese Selbstverständlichkeit für das frühgriechische Denken näher zu erhärten, sondern vielmehr, um festzustellen, zu welcher Zeit das griechische Denken angefangen hat, die Darstellbarkeit von geometrischen Größen durch Zahlen und damit die universelle Anwendbarkeit der Rechenkunst auf Geometrie zu bezweifeln.

Die Voraussetzungen für diesen Zweifel sind erst dann gegeben, wenn *erstens* der Anspruch absoluter Genauigkeit an die Geometrie gestellt wird, und wenn *zweitens* die Existenz irrationaler Streckenverhältnisse bekannt ist; denn wenn alle Strecken rational wären, wären sie durch die ganzen und gebrochenen Zahlen der griechischen Logistik ohne weiteres darstellbar. *Drittens* ist erforderlich, daß aus der Erkenntnis der Irrationalität die logische Konsequenz gezogen wird, daß Strecken nicht universell durch Zahlen darstellbar sind und daher auch nicht ohne weiteres wie Zahlen behandelt werden dürfen. Die dritte Forderung ist keineswegs überflüssig oder selbstverständlich; die meisten Vertreter der abendländischen Wissenschaft z. B. haben die Darstellbarkeit von geometrischen Größen durch Zahlen nie bezweifelt, obwohl sie mit der Existenz von irrationalen Verhältnissen bekannt waren und obwohl man vor Dedekind und Cantor nicht über den exakten modernen Begriff der „reellen Zahl“ verfügte. Die griechische Kultur ist meines Wissens die einzige, die diese logische Konsequenz wirklich vollzogen hat.

Zu welcher Zeit die Entdeckung der Existenz irrationaler Streckenverhältnisse anzusetzen ist, darüber sind die Historiker geteilter Meinung. Während Zeuthen bis zuletzt die traditionelle Auffassung festgehalten hat, daß Pythagoras oder seine unmittelbaren Schüler zumindest um die Irrationalität des Verhältnisses der Quadratseite zur Diagonale gewußt haben müssen, nimmt Vogt²⁰⁾, auf gute Quellen gestützt, an, daß die Entdeckung der Irrationalität nicht lange vor 400 stattgefunden haben kann. Wir können diese alte Streitfrage zum Glück unentschieden lassen, denn worauf es jetzt ankommt, ist der Nachweis, daß die Konsequenzen aus der Tatsache der Irrationalität erst am Anfang des vierten Jahrhunderts gezogen worden sind. Es läßt sich nämlich zeigen, daß Hippokrates von Chios noch unbedenklich den naiven numerischen Verhältnissbegriff anwendet, und daß noch Archytas von Tarent die Anwendbarkeit der Rechenkunst auf geometrische Probleme nicht bezweifelt, sondern die mit Hilfe der Logistik geführten Schlüsse für voll beweiskräftig, sogar den geometrischen Schlüssen an Klarheit und Wissenschaftlichkeit überlegen hält.

²⁰⁾ Vogt, Bibl. Math. (3) 10 (1910), S. 97—155.

Das Archytasfragment spricht für sich selbst²¹⁾:

καὶ δοκεῖ ἡ λογιστικὴ ποτὶ τὰν
σοφίαν τῶν μὲν ἄλλων τεχνῶν καὶ
πολὺ διαφέρειν, ἀτὰρ καὶ τὰς γεω-
μετρικὰς ἐναργεστέρῳ πραγματεύ-
εσθαι ἢ θέλει

καὶ ἃ ἐκλείπει αὐτὴ ἡ γεωμετρία,
καὶ ἀποδείξιας ἃ λογιστικὰ ἐπιτελεῖ

Und die Logistik hat, wie es scheint, in bezug auf Wissenschaft vor den anderen Künsten einen recht beträchtlichen Vorrang; besonders vor der Geometrie, da sie deutlicher als diese behandeln kann was sie will . . .

und wo die Geometrie wiederum versagt, bringt die Logistik Beweise zustande . . .

Das Fragment ist um so bemerkenswerter, als Archytas dem Kreise der Pythagoreer angehört, und gerade diese es sind, die (nach allen Zeugnissen übereinstimmend) die irrationalen Verhältnisse zuerst ans Licht gebracht haben.

Die Hippokrates-Stelle, die ich als weiteren Beleg anführen will, ist bekannt und findet sich am Anfang des Berichtes des Simplicios über die Mönchenquadraturen des Hippokrates²²⁾. Simplicios zitiert hier „wörtlich“ (κατὰ λέξιν) Eudemos' Geschichte der Geometrie, aber mit erläuternden Zusätzen von Simplicios selbst, „von der Erinnerung an die Elemente Euklids“ her (ἀπὸ τῆς τῶν Εὐκλείδου Στοιχείων ἀναμνήσεως). Es heißt dann an einer Stelle:

ὥς γὰρ οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους
ἔχουσιν, οὕτως καὶ τὰ ὅμοια τμήματα.
ὅμοια γὰρ τμήματά ἐστι τὰ τὸ αὐτὸ
μέρος ὄντα τοῦ κύκλου, οἷον, ἡμι-
κύκλιον ἡμικυκλίῳ καὶ τριτημόριον
τριτημορίῳ.

Denn wie sich Kreise zueinander verhalten, so verhalten sich auch die ähnlichen Segmente. Ähnliche Segmente nämlich sind die, die denselben Teil des Kreises ausmachen, wie z. B. Halbkreis zu Halbkreis, oder Drittelkreis zu Drittelkreis.

Es fragt sich nun, ob diese Stelle wörtlich aus Eudemos entnommen ist, oder einen Zusatz von Simplicios darstellt. Rudio und Zeuthen halten die Stelle für eudemisch, Tannery und Becker dagegen für einen Zusatz. Nun hat aber Dyksterhuis²³⁾ neuerdings auf Grund einer Überlegung, die ich für überzeugend halte, die eudemische Herkunft der Stelle dargetan. Dyksterhuis weist nämlich erstens darauf hin, daß Simplicios, wo er zur Erläuterung Definitionen anführt, diese immer aus Euklid schöpft. Er zitiert auch etwas später die euklidische Definition der ähnlichen Segmente als solche, die gleiche

²¹⁾ Siehe Diels-Kranz, Die Fragmente der Vorsokratiker, Fragment B 4.

²²⁾ Simplicii in Arist. Phys. libr. quattuor comment., ed. Diels, S. 61, Berlin 1882. Oder F. Rudio, Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen, S. 48. Leipzig 1907.

²³⁾ E. J. Dyksterhuis, De Elementen van Euklides I, S. 35. Groningen 1929.

Winkel enthalten; warum sollte er dann kurz vorher eine andere, vom nach-euklidischen Standpunkt weniger präzise Definition einschalten? Das zweite Argument ist, daß die Ausdrucksweise $\tau\acute{o} \alpha\upsilon\tau\acute{o} \mu\acute{\epsilon}\rho\omicron\varsigma$ bei Euklid konsequent nur für Zahlenproportionen und nur in den arithmetischen Büchern benutzt wird (und dann noch mit einem Zusatz: $\tau\acute{o} \alpha\upsilon\tau\acute{o} \mu\acute{\epsilon}\rho\omicron\varsigma \eta \tau\acute{\alpha} \alpha\upsilon\tau\acute{\alpha} \mu\acute{\epsilon}\rho\eta$). Für die Verhältnisgleichheit allgemeiner Größen hat Euklid immer andere Ausdrücke ($\acute{\alpha}\nu\acute{\alpha}\lambda\omicron\gamma\omicron\nu$ oder $\alpha\upsilon\tau\acute{o}\nu \lambda\omicron\gamma\omicron\nu$ oder $\acute{\omega}\varsigma \pi\rho\acute{o}\varsigma \dots \omicron\upsilon\tau\omega\varsigma \pi\rho\acute{o}\varsigma$). Daher würde Simplicios, der seine Geometrie-Kenntnisse in erster Linie aus Euklid schöpft, und der unmittelbar vor dem Hinschreiben der fraglichen Stelle noch in seinem Euklid geblättert haben muß, von selbst nie dazu kommen, den ungenauen Ausdruck $\tau\acute{o} \alpha\upsilon\tau\acute{o} \mu\acute{\epsilon}\rho\omicron\varsigma$ zu benutzen.

Überhaupt weist der Ausdruck $\tau\acute{o} \alpha\upsilon\tau\acute{o} \mu\acute{\epsilon}\rho\omicron\varsigma$ deutlich auf eine altertümliche (vor-eudoxische) Definition des Proportionsbegriffes hin. Die Proportion $a : b = c : d$ bedeutet nach dieser alten Auffassung, daß a „derselbe Teil“ (z. B. die Hälfte oder ein Drittel) von b ist wie c von d . So tief verwurzelt war diese numerische Auffassung des Verhältnissbegriffs, daß noch Eudemos sie bedenkenlos von Hippokrates übernommen oder sogar (das kann man nicht entscheiden) von sich aus hingeschrieben hat.

Es zeigt sich also, daß Hippokrates in seinen (übrigens sehr exakten) Untersuchungen den naiven numerischen Verhältnissbegriff benutzt, und daß sogar noch Archytas die Rechenkunst der Geometrie voranstellt und logistische Beweismittel in der Geometrie zuläßt.

Wenige Jahrzehnte später hat sich das Blatt bereits gewendet: Theaitetos entwickelt seine Klassifikation der irrationalen Strecken, und bei Plato ist das Verhältnis zwischen Logistik und Geometrie vollständig umgekehrt. Die bisherige Logistik ist als Wissenschaft verpönt, die geometrischen Schlüsse sind die wahren Vorbilder exakter Beweisführung. Bei Euklid ist die Algebra vollends aus dem Bereich der offiziellen Geometrie verbannt und darf nur in geometrischem Gewande, als Flächenrechnung oder „geometrische Algebra“, ihr Dasein fristen.

Es ist Zeuthens großes Verdienst, die latente algebraische Komponente in der klassischen griechischen Mathematik, wie sie in den Büchern II und VI der Elemente und in den Kegelschnitten des Apollonius zu finden ist, aufgedeckt zu haben; von ihm stammt der bezeichnende Name „geometrische Algebra“. Neugebauer²⁴⁾ aber hat den historischen Zusammenhang zwischen der babylonischen und der griechischen Algebra nachgewiesen. Er zeigt nämlich, daß die elliptische und hyperbolische Anpassung bei Euklid, Buch VI (Prop. 28 und 29) vollständig zu erklären sind als geometrische Verkleidungen der altbabylonischen Lösungsformeln für quadratische Gleichungen.

²⁴⁾ O. Neugebauer, Zur geometrischen Algebra, Quellen u. Studien 3 (1936), S. 245—260.

Die Normalformen nämlich, auf die in der babylonischen Mathematik alle quadratischen Probleme zurückgeführt werden, sind Gleichungspaare in zwei Unbekannten:

$$(I) \quad \begin{cases} xy = F, \\ x + y = a; \end{cases} \quad (II) \quad \begin{cases} xy = F, \\ x - y = a. \end{cases}$$

Die babylonischen Lösungsformeln heißen

$$(I) \quad \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - F}; \quad (II) \quad \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + F} \pm \frac{a}{2}.$$

Die Euklidischen Flächenanlegungen nun stellen, im einfachsten Falle der Anlegungen mit quadratischem Exzeß oder Defekt, ebenfalls das Problem, ein Rechteck von gegebener Fläche $xy = F$ zu errichten, dessen eine Seite x eine gegebene Strecke a teilweise bedeckt oder über a hinausragt, mit einem Defekt oder Exzeß gleich y (also mit $x = a - y$ bzw. $x = a + y$). Und die Lösung besteht (genau wie die babylonische) darin, daß die Fläche $\left(\frac{a}{2}\right)^2 - F$ bzw. $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + F$ in ein Quadrat verwandelt wird, dessen Seite w vermöge

$$(I) \quad \begin{cases} x = \frac{a}{2} + w \\ y = \frac{a}{2} - w \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad (II) \quad \begin{cases} x = w + \frac{a}{2} \\ y = w - \frac{a}{2} \end{cases}$$

die Lösung des Problems ergibt.

Die Formulierung bei Euklid ist etwas allgemeiner, indem dort statt eines Rechtecks ein Parallelogramm mit vorgegebenem Winkel, und statt eines Quadrates ein Parallelogramm von vorgegebener Form verwendet wird. Der vorhin behandelte Spezialfall hat aber sicherlich den Ausgangspunkt gebildet, wie man aus den Figuren zu Buch II, Prop. 5 und 6 ersehen kann, die das Prinzip dieser speziellen Flächenanlegung schon enthalten.

Zusammenfassend können wir sagen: Die Entdeckung der Irrationalität zwang die griechischen Mathematiker am Anfang des vierten Jahrhunderts, ihre Algebra, die eine Fortbildung der babylonischen Algebra bildete, von ihrem numerischen Ausgangspunkt loszulösen und in eine geometrische Algebra zu verwandeln.

Den Zeitpunkt und den Schauplatz dieser Umwandlung können wir noch näher bestimmen. Das 10. Buch Euklids, das die Klassifikation der Irrationalitäten behandelt, und das damit unmittelbar zusammenhängende 13. Buch über die regulären Polyeder werden aus guten Gründen allgemein dem Theaitetos zugeschrieben. Das 10. Buch benutzt aber durchweg die geometrische Algebra, während es von der Eudoxischen Proportionenlehre weitgehend unabhängig ist. Man kann nun nicht gut annehmen, daß Theaitetos, der sich gerade mit dem Begriff der Irrationalität so gründlich befaßt hat, die alte naive Algebra bedenkenlos auf irrationale Strecken übertragen hat. Also muß Theaitetos die geometrische Algebra entweder selbst geschaffen oder von einem anderen übernommen haben.

Proklos berichtet in seinem Euklid-Kommentar (ed. Friedlein, S. 419) unter Berufung auf Eudemos, daß die parabolische, hyperbolische und elliptische Flächenanlegung Erfindungen der Pythagoreer sind, und daß diese alten, götterähnlichen Männer jene Konstruktionen *παραβολή*, *ὑπερβολή* und *ἐλλειψις* nannten, welche Namen später auf die entsprechenden Kegelschnitte übertragen wurden. Diese Nachricht läßt zweierlei Deutung zu. Entweder die Pythagoreer haben tatsächlich die algebraische Lösungsformel der quadratischen Gleichungen ins Geometrische übertragen und sind somit als Schöpfer der geometrischen Algebra zu betrachten^{24a}). Oder sie haben nur die algebraische Lösungsformel überliefert, und die Übersetzung ins Geometrische ist das Werk eines späteren Forschers, etwa eines Zeitgenossen von Theaitetos. Dann kann man sich doch gut denken, daß dieser Forscher sich dessen bewußt war, daß die geometrischen Konstruktionen im Wesen mit den algebraischen, den Pythagoreern längst bekannten algebraischen Regeln identisch waren, und daß er diese Wesenidentität so ausgesprochen hat, daß die spätere Geschichtsschreibung daraus eine völlige Identität gemacht und die geometrischen Konstruktionen selbst den Pythagoreern zugeschrieben hat.

Wie dem auch sei, jedenfalls werden wir die Pythagoreer als Vermittler der altbabylonischen Algebra an die griechische Welt zu betrachten haben, genau so wie sie ja auch den altbabylonischen „Pythagoreischen Lehrsatz“ in ihrer Tradition überliefert hatten. Sollten sie selbst schon aus dieser Algebra eine „geometrische Algebra“ gemacht haben, so kann diese Verwandlung doch, nach dem was wir gesehen haben, nicht gut vor Archytas ihren Abschluß gefunden haben. Hätten nämlich die Pythagoreer zu Archytas' Zeiten schon eine geometrische Algebra gehabt, wären sie also im Stande gewesen, wie Euklid und Apollonius, algebraische Schlüsse durch rein geometrische zu ersetzen, so wäre des Archytas Ausspruch über die Logistik, die „Beweise zustande bringt, wo die Geometrie versagt“, gänzlich unverständlich. Aber es scheint überhaupt recht unwahrscheinlich, daß die Pythagoreer die Urheber der Geometrisierung der Algebra waren, wo doch ihr ganzes Streben (soviel wir wissen) umgekehrt darauf ging, die Mathematik und Musik soweit als möglich zu arithmetisieren.

Eher wird die Geometrisierung der Pythagoreischen Mathematik in dem Augenblick erfolgt sein, als diese von dem Kreis um Plato aufgenommen und assimiliert wurde. Der platonische Dialog Theaitetos gibt eine recht anschauliche Schilderung, wie die Berührung zwischen diesen beiden Kulturkreisen zustande kam; wenn auch die historischen Einzelheiten nicht genau

^{24a}) Es kann sich dabei nach dem Vorangehenden nur um spätere Pythagoreer (kurz vor Theaitetos) handeln. Man könnte z. B. an Theodoros von Kyrene denken. Die Worte des Theaitetos im Platonischen Dialog: „Theodoros entwarf eine Zeichnung von Quadraten“ deuten ja auf eine Art geometrische Algebra hin.

zuzutreffen brauchen, so wird Plato doch das Wesentliche richtig getroffen haben. Der Pythagoreer Theodoros von Kyrene kam also nach Athen und hielt dort einen Vortrag, in dem die Irrationalität von $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ usw. bis $\sqrt{17}$ bewiesen wurde. Der junge Theaitetos reagierte darauf mit einer genauen Begriffsbestimmung und Klassifikation der irrationalen Strecken, die wir im 10. Buch Euklids vollendet wiederfinden. Die einzelnen Stufen, die bis zu dieser Vollendung durchlaufen werden mußten, schildert uns Plato nicht, aber sie lassen sich aus der mathematischen Notwendigkeit erschließen. Für die Begründung seiner Klassifikation der Irrationalitäten brauchte Theaitetos, wie wir sahen, algebraische Methoden. Diese gab es nun zwar, aber sie waren legitim nur auf Zahlen anwendbar, nicht auf irrationale Strecken. Also mußte die Algebra zuerst geometrisiert werden, was in der Tat mit Hilfe der Flächenrechnung gelang.

Bei den hohen Ansprüchen an die Exaktheit der Beweisführung, die man in diesem Kreise stellte, trat auch bald die Unhaltbarkeit des naiven Verhältnisbegriffs, den wir oben bei Hippokrates noch gefunden haben, ans Licht. Wiederum waren es die irrationalen Verhältnisse, an denen er scheiterte. Damit wurde aber einer der Grundpfeiler des bisherigen Lehrgebäudes der Mathematik (das wir uns etwa in den Elementen des Hippokrates verkörpert denken können) verbesserungsbedürftig. Nur ein Teil der damaligen Mathematik (etwa der Inhalt der ersten vier Bücher Euklids) ließ sich ohne den Verhältnisbegriff begründen. Die endgültige Rettung brachte bekanntlich die Proportionenlehre des Eudoxos, die im 5. Buch der Elemente dargestellt ist. Es hat aber, wie Zeuthen²⁵⁾ und Becker²⁶⁾ an Hand einer Aristoteles-Stelle²⁷⁾ gezeigt haben, sehr wahrscheinlich eine ältere Verhältnislehre gegeben, die auf dem Begriff der wechselseitigen Wegnahme (*ἀντανάλειψις* oder *ἀνθυφαίρεσις*) beruht, und die ebenso wie die Eudoxische Proportionenlehre sowohl rationale als irrationale Verhältnisse exakt zu behandeln gestattete.

Die Grundlagenkrise des anfangenden vierten Jahrhunderts verlief demnach in der Weise, daß die Kritik der alten Grundlagen mit der neuen Grundlegung Hand in Hand ging. Daher ist es auch zu keiner Erschütterung des Lehrgebäudes, zu keiner Skepsis in bezug auf die Sicherheit der mathematischen Schlüsse gekommen. Die Konstruktion der regulären Körper durch Theaitetos, die bewundernswürdigen Inhaltsbestimmungen des Eudoxos und so viele andere Spitzenleistungen bewirkten, daß die Mathematik dieser Zeit den Zeitgenossen nicht als kriselnder Kranker erschien, sondern mit Recht als eine der großartigsten Schöpfungen des griechischen Geistes gewürdigt wurde.

²⁵⁾ H. G. Zeuthen, Skifter Ak. Kopenhagen 1917. Vgl. auch E. J. Dyksterhuis, De Elementen van Euklides I, S. 70ff.

²⁶⁾ O. Becker, Quellen u. Studien 2 (1933), S. 311–333.

²⁷⁾ Aristoteles, Topica VIII, 3, S. 158b, 29.

(Eingegangen am 4. 11. 1939.)