

1768
BECKER, O.
1959

Die Archai in der griechischen Mathematik

Einige ergänzende Bemerkungen zum Aufsatz von K. v. Fritz¹⁾
(Archiv für Begriffsgeschichte, Bd. 1)

Oskar Becker, Bonn

1.

Zum platonischen Hypothesis-Begriff (v. Fritz a.O. S. 38ff.)

Außer Rep. VI 510c ist für den Hypothesis-Begriff vor allem Meno 86e—87c heranzuziehen (was v. Fritz unterläßt), woselbst es sich ja gerade um ein mathematisches Beispiel handelt.

Die Frage ist, ob die Tugend lehrbar ist. Sokrates möchte zunächst untersuchen, was die Tugend ist; Menon ist dazu zu ungeduldig und will gleich die Hauptfrage angreifen. Sokrates findet es bedenklich, nach der Beschaffenheit von etwas zu fragen, wenn man nicht weiß, (ob und) was es ist: σκοπεῖν . . . ποῖόν τι ἐστὶν οὐ μήπω ἴσμεν οὐ τι ἐστὶν (e 1): Er schlägt daher ein Kompromiß vor: ἐξ ὑποθέσεως αὐτὸ σκοπεῖσθαι (e 7) und erläutert dies „hypothetische Verfahren“ durch ein geometrisches Beispiel: λέγω δὲ ἐξ ὑποθέσεως ὥδε, ὥστε οἱ γεωμέτραι πολλάκις σκοποῦνται.

Es handelt sich um die Aufgabe, ein Dreieck von gegebenem Flächeninhalt in einen gegebenen Kreis einzuschreiben. Die dazu gehörige geometrische Hypothese lautet:

„Wenn dieses Flächenstück (ein Rechteck) so gestaltet (d. i. so proportioniert) ist, daß einer, der es längs einer gegebenen Linie hinstreckt (d. h. an eine gegebene Strecke anlegt), um ein so gestaltetes Flächenstück zurückbleibt, wie das hingestreckte selbst (gestaltet) ist, dann geschieht das Eine, wie mir scheint, und wiederum ein Anderes, wenn es unmöglich ist, daß es (das angelegte Flächenstück) diese Eigenschaft hat.“

¹⁾ Die folgenden Bemerkungen zu der ausgezeichneten Abhandlung von K. v. Fritz sind zum größten Teil ergänzender, nur zum kleinsten Teil kritischer Art. In der Hauptsache stimme ich mit dem Verf. durchaus überein; besonders erscheint mir die eingehende Erörterung des Verhältnisses der Euklidischen Axiomatik zu den entsprechenden Kapiteln der Analytica posteriora sehr aufschlußreich und wichtig. Zumal dieses Thema seit T. Heath, Einleitung zu seiner Euklid-Übersetzung (Cambridge 1908), so viel ich weiß, nicht wieder behandelt worden war.

(εἰ μὲν ἐστὶν τοῦτο τὸ χωρίον τοιοῦτον ὅσον παρὰ τὴν δοθεῖσαν αὐτοῦ γραμμὴν παρατείναντα ἑλλείπειν τοιοῦτον χωρίον ὅσον ἂν αὐτὸ τὸ παρατεταμένον ᾖ, ἄλλο τι συμβαίνειν μοι δοκεῖ, καὶ ἄλλο αὖ, εἰ ἀδύνατόν ἐστιν ταῦτα παθεῖν.)²⁾

Die Rahmenfrage ist: εἰ ποῖόν τι ἐστὶν τῶν περὶ τὴν ψυχὴν ὄντων (87 b 5), so daß die Formel οὐ τι ἐστὶν (86 e 1) als οὐ τί ἐστὶν „was sie (die Tugend) ist“ — zu trennen von der Formel „wie beschaffen sie ist“ (ποῖόν τι ἐστὶν) — aufzufassen ist. Schließlich wird die Hypothese ja auch so formuliert: εἰ ἐστὶν ἄλλοιόν ᾧ ὅσον ἐπιστήμη (b 7) — ganz analog wie im geometrischen Beispiel εἰ μὲν ἐστὶ τοῦτο τὸ χωρίον τοιοῦτον ὅσον (a 3—4).

Es handelt sich in beiden Fällen nicht um einen reinen Existenzsatz, doch es ist gewissermaßen zugleich davon die Rede, ob es so etwas — ein solches χωρίον oder so etwas wie ἐπιστήμη — im geometrischen Raum bzw. in der Seele gibt.

Der Abstand zu Aristoteles, Physik Θ 3, 253b 5—6 (zitiert von v. Fritz S. 38, Anm. 46) ist nicht sehr groß; denn die dortige Hypothesis: οὐ ἢ φύσις ἀρχὴ τῆς κινήσεως kann ja auch so gedeutet werden, daß die Physis als Ursprung der „Bewegtheit“ Wirklichkeit hat. Die Bewegtheit ist in der Erfahrung unmittelbar aufzuweisen, nicht aber ihr „physischer“,

²⁾ Ich schreibe αὐτὸ für überliefertes αὐτοῦ (87a 4), weil erstens nur so das aktive Partizip παρατείναντα (a 5) (das neben παρατεταμένον nicht gut intransitiv gemeint sein kann) ein Akkusativ-Objekt erhält und zweitens αὐτοῦ auch mathematisch ohne Sinn wäre, da ja das Flächenstück (ein Rechteck) nicht an eine seiner gegebenen (Rand-)Linien angelegt wird, sondern an eine von ihm zunächst ganz getrennte Linie, nämlich den Durchmesser des gegebenen Kreises, in den das Dreieck eingeschrieben werden soll. — Die Wortstellung (des αὐτοῦ) ist zwar ungewöhnlich, aber nicht unmöglich; sie ist wahrscheinlich gerade das gewesen, was die Verderbnis der Stelle veranlaßt hat.

³⁾ Zu vergleichen ist eine weitgehend analoge Stelle bei Proklos (in Euclid. p. 419, 24—420, 6 Friedlein), wo συμπαρατείνης vom zeichnenden Geometer gesagt wird und ἑλλείπειν auch intransitiv — allerdings nicht vom Geometer, sondern vom Flächenstück — gebraucht ist.

Platon selbst nennt Rep. VII, 527a, 8—9: τετραγωνίζειν τε καὶ παρατείνειν καὶ προστιθέναι als angebliche „Aktionen“ (πράξεις) des Geometers, was er freilich für eine „lächerliche und unnötige“ Redeweise erklärt. Zur Sache selbst ist z. B. Sir Thomas Heath, A History of Greek Mathematics (Oxford 1921) I. p. 300 zu vergleichen. Aber schon K. B. Mollweide hat in seinen Commentat. mathematico-philologicae III, p. 33—64 (Leipzig 1813) den geometrischen Sachverhalt vollkommen richtig verstanden. Die gegenteilige Meinung A. Beneckes („Über die geometrische Hypothesis in Platons Menon“, Elbing 1867) ist m. E. nicht haltbar, weil τοιοῦτον — ὅσον (tale, quale nicht tantum, quantum) nicht auf die Flächengleichheit, sondern auf die Ähnlichkeit der Figuren sachlich wie sprachlich anspielt (vgl. Euklid, Elem. VI, def. 1 [ὁμοία σχήματα]).

Zum eigenartigen, vom Deutschen und Englischen abweichenden Gebrauch des bestimmten Artikels in den Worten παρὰ τὴν δοθεῖσαν αὐτὸ γραμμὴν vgl. Anm. 5 zu S. 222.

d. h. ihr aus der inneren Natur erwachsender Ursprung. Denn etwa die Atomisten glauben, daß alle Bewegung auf Zufall beruhe.

Jedenfalls kann man nicht sagen, daß *Platon* in der Mathematik lediglich die Existenz einzelner Gebilde (des Geraden und Ungeraden, der drei Arten der Winkel etc.) als Hypothese aufgestellt habe, sondern er hat auch ganze mathematische Zusammenhänge darunter verstanden.

Man kann ferner noch auf *Phaedo* 100a, 101de hinweisen; die dortigen Begriffsbestimmungen sind auch auf die mathematischen Wissenschaften anwendbar. (101d, 4—5: Widerlegung einer Hypothese durch ihre widersprüchlichen Folgen — so, wenn etwa aus der Kommensurabilität der Quadratdiagonale mit der Seite folgt, daß eine gerade Zahl gleich einer ungeraden ist!)

2.

Zum 4. und 5. Euklidischen Postulat

Die Einordnung der sog. „4. und 5. Postulate“ unter die Kategorie der *ἀνθήματα* im ersten Buch der „Elemente“ hat schon in der Antike Bedenken hervorgerufen, man vgl. den Kommentar des *Proklos* (in *Euclid.* p. 178ff., 188ff., 191ff. *Friedlein*).

H. G. Zeuthens These, daß die Postulate Existenzsätze seien, scheint am 4. Postulat (das die Gleichheit aller rechten Winkel behauptet) zu scheitern und beim 5. (Parallelen-)Postulat jedenfalls nicht ganz zuzutreffen. Denn auch dieses weicht in seiner Form von den drei ersten Postulaten erheblich ab.

a) Es werde zunächst das 5. Postulat diskutiert.

Es stellt zweifellos einen Existenzsatz dar; denn es fordert ja die Existenz des Schnittpunkts zweier konvergierender Geraden. In der Form ist es aber von den Postulaten 1—3 verschieden. Denn diese drei fordern die Möglichkeit konstruktiver Operationen: 1. *εὐθείαν γραμμὴν ἀγαγεῖν*. 2. *πεπερασμένην εὐθείαν ἐκβαλεῖν*. 3. *κύκλον γράψαι*. Das 5. Postulat aber sagt nicht: ... *ἐκβαλεῖν τὰς δύο εὐθείας ὥστε συμπίπτειν*, sondern: *ἐκβαλλομένης ... συμπίπτειν*. Das Sich-Schneiden (*συμπίπτειν*) ist aber keine Operation, sondern die Folge einer solchen, nämlich des Verlängerns der Geraden, wie es im 2. Postulat gefordert worden war. Von hier aus wird die abweichende Form des 5. Postulats verständlich; es braucht in ihm ja keine zusätzliche Operation zu den drei fundamentalen, in den drei ersten Postulaten eingeführten Operationen (des Verbindens zweier Punkte durch eine Gerade, des Verlängerns einer Geraden und des Schlagens eines Kreises mit gegebenem Mittelpunkt und Radius) neu ge-

fordert zu werden; vielmehr wird bloß die bereits im 2. Postulat eingeführte Operation des Verlängerns in ihm verwendet. Aber es wird in ihm die Existenz des Schnittpunkts zweier konvergierender Geraden behauptet, der durch das Verlängern derselben hervorgebracht wird — weil sie nicht bewiesen werden kann.

Anmerkung. Daß *Speusippos* die konstruktiven Postulate 1—3 eingeführt habe, wie *v. Fritz* (S. 97 mit Anm. 181) mit Berufung auf *Proklos* (in *Euclid.* p. 179) behauptet, scheint mir ganz unwahrscheinlich. Denn *Proklos* spricht nur davon, daß *Speusipp* die Prinzipien (*ἀρχαί*) von den späteren Sätzen durch ihre Einfachheit, Unbeweisbarkeit, Evidenz aus sich selbst heraus (*τῷ αὐτονόστῳ*) unterschieden habe. *Speusipp* meint die Prinzipien überhaupt, nicht speziell die Postulate (*ἀνθήματα*) oder gar nur die Operationen einführenden Postulate 1—3. Das über diese Gesagte stammt von *Proklos* selbst oder allenfalls von *Geminus*.

Vor allem aber würde die Zuschreibung konstruktivistischer Neigungen an *Speusipp* seiner Stellungnahme im Streit mit *Menaichmos* um den Vorrang der Theoreme oder Probleme (*Procl.* in *Euclid.* p. 77, 7—78, 19) widersprechen. Dort standen sich die Meinungen von *Speusippos* und *Amphinomos* einerseits und *Menaichmos* andererseits derart gegenüber, daß *Speusipp* als treuer Platoniker — entsprechend der so lebhaft im „Staat“ (527a) geäußerten Auffassung *Platons* selbst — das konstruktive Tun (*ποιεῖν*) der Mathematiker für nur scheinbar und der theoretischen Wissenschaft eigentlich nicht angemessen erklärt (*οἱ περὶ Σπείσιππον καὶ Ἀμφινόμον, ἡγούμενοι ταῖς θεωρητικαῖς ἐπιστήμαις οἰκιοτέραν εἶναι τὴν τῶν θεωρημάτων προσηγορίαν ἢ τὴν τῶν προβλημάτων* [p. 77, 16—19]). Denn bei den ewigen Dingen, den Gegenständen der Mathematik, gebe es kein Werden (*οὐ γὰρ ἐστὶ γένεσις ἐν τοῖς αἰδοῖς ὥστε οὐδὲ τὸ πρόβλημα χώραν ἐπὶ τούτων ἂν ἔχοι, γένεσιν ἐπαγγελλόμενιν καὶ ποίησιν τοῦ μήπω πρότερον ὄντος* [77, 20—78, 1]). Nach *Menaichmos* dagegen sei die Intention der Mathematiker zweifach: *ὅτε μὲν πορίσασθαι τὸ ζητούμενον ὅτε δὲ πεπορισμένον* (so ist wohl für *πεπορισμένον* zu lesen) *αἰσθάνεσθαι ἵδεν, ἢ τί[ς] ἐστίν, ἢ ποῖόν τι, ἢ τί πέπονθεν, ἢ τίνας ἔχει πρὸς ἄλλο λήσεις* (p. 78, 10—13). Also in erster Linie wird die konstruktive Lösung eines Problems und dann die Untersuchung des Konstruierten ins Auge gefaßt.

Man sieht hier den Gegensatz des platonischen Philosophen, der um die Betrachtung der zeitlosen mathematischen Gebilde bemüht ist, und des schöpferischen Mathematikers *Menaichmos*, des *Eudoxos*-Schülers, der die wirklich vollzogene Konstruktion allein als das Wesentliche gelten läßt. In der Tat hat ja auch derselbe *Menaichmos* das sog. Delische Problem der Würfelverdoppelung durch eine geniale Konstruktion

mittels zweier Kegelschnitte gelöst, eine Methode, die für viele spätere Lösungen kubischer Aufgaben, wie etwa der Archimedischen Kugelteilung, vorbildlich geworden ist. Und sein Bruder *Deinostratos*, Schüler des *Eudoxos* wie er, hat als erster eine Konstruktion mittels der Quadratrix angegeben, die die Länge eines Kreisbogens mit beliebig genauer Annäherung zu bestimmen erlaubt.

Die operative Form der drei ersten Euklidischen Postulate scheint also viel eher aus der *Menaichmos*-schule zu stammen als von *Speusipp*.

b) Welche Rolle spielt nun aber das 4. Postulat, das doch offenbar weder eine neue Operation einführt noch ein Existenzsatz ist?

Ich möchte mich der Ansicht derer anschließen, die das 4. Postulat mit dem 5. eng zusammenstellen. Die Numerierung der Postulate ist ja nicht im Euklidischen Urtext enthalten, sondern späteren Datums; noch *Proklos* kannte sie nicht. Es ist also durchaus möglich, daß das 4. und 5. Postulat ursprünglich eine Einheit bildeten. Es ist ja auch die Einführung des 4. Postulats nötig, um der Bedingung des 5. Postulats („... wenn die schneidende Gerade die inneren Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte macht“) einen präzisen Sinn zu verleihen. Denn hier wird „zwei Rechte“ offenbar als absolutes Winkelmaß benutzt.

Man könnte sich nun denken, daß diese letztgenannte Tatsache — daß zwei Rechte ein absolutes Maß darstellen — besser am Anfang des 5. Postulats, etwa in Form eines Genitivus absolutus, stünde (*πασῶν τῶν ὀρθῶν γωνιῶν ἰσῶν ἀλλήλαις ὀσῶν*), aber das würde doch einen Rückweis auf eine frühere Behauptung desselben Inhalts besagen.

Andererseits könnte man sich die Gleichheit aller Rechten auch im unmittelbaren Anschluß an die Definition 10 (des rechten Winkels) ausgesprochen denken, analog wie am Ende der Definition 17 (des Durchmessers eines Kreises) gesagt wird, daß ein Durchmesser seinen Kreis in zwei gleiche Teile teilt. Daß dies nicht geschehen ist, muß seinen Grund haben.

H. G. Zeuthen hat (vgl. v. *Fritz* S. 51, Anm. 74) behauptet⁴, daß das 4. Postulat die Eindeutigkeit der Streckenverlängerung, die das 2. Postulat fordert, aussage. Man hat mit einigem Recht (so auch v. *Fritz* a.O.) dagegen eingewandt, daß diese Eindeutigkeit schon im 2. Postulat selbst mit enthalten sei. Auch das sog. 6. Postulat, nach dem zwei Gerade keinen Raum einschließen, wurde ja von *Heiberg* unter anderem aus dem Grunde für unecht erklärt, weil es nichts anderes besage als

⁴) Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter (Kopenhagen 1896) S. 123ff.

die Eindeutigkeit der im 1. Postulat geforderten Operation der Verbindung zweier Punkte durch eine Gerade.

Mir scheint daher die Sache eher umgekehrt zu liegen: Die Gleichheit der rechten Winkel ist nicht der Grund, sondern die Folge der Eindeutigkeit der Streckenverlängerung. Bei der Verlängerung einer Strecke *AB* über *B* hinaus bis *C* entsteht das, was wir heute einen „gestreckten Winkel“ nennen. Die Alten kannten diese Bezeichnung zwar nicht — nach der 8. Definition ist der ebene Winkel „die Neigung (*κλίσις*) zweier Linien gegeneinander“ —; jedoch faßten sie die Summe zweier Nebenwinkel als eine bestimmte Größe auf. Und diese ist eindeutig bestimmt, weil die Streckenverlängerung eine eindeutige Konstruktion ist. Jeder rechte Winkel ist aber nach Definition 10 die Hälfte eines „gestreckten“ bzw. der Summe zweier Nebenwinkel, die infolge ihrer eindeutigen Bestimmtheit ein absolutes Maß darstellt, sodaß dies auch vom rechten Winkel gilt. In der Tat wird diesem auch von *Proklos* der Charakter des absoluten Maßes ausdrücklich, wiederholt und eindringlich, zugesprochen — im Gegensatz zur Unbestimmtheit eines spitzen oder stumpfen Winkels. (Vgl. z. B. *Procl. in Eucl.* p. 131, 13 τῆς μὲν (ὀρθῆς) κατὰ τὸ ἴσον καὶ ταῦτόν καὶ ὁμοιον ἀπωρισμένης: p. 133, 14 ἔστι (ἢ κάθετος) καὶ μέτρον θεῖον καὶ νοεροῦ σύμβολον. cf. p. 132, 9 u. andere Stellen.)

Jedoch war eine derartige Aussage im unmittelbaren Anschluß an Definition 10 (analog der oben erwähnten Halbierung des Kreises durch den Durchmesser im Anschluß an Definition 17) logisch nicht möglich, weil die Eindeutigkeit der Streckenverlängerung ja erst im 2. Postulat enthalten ist. Erst nach diesem Postulat konnte also die Gleichheit aller rechten Winkel ausgesprochen werden, und das ist auch geschehen! Höchstens könnte man bemängeln, daß sie nicht unmittelbar nach Postulat 2, sondern erst nach Postulat 3 (Konstruktion des Kreises) gebracht wird. Hier wird nun wohl der engere Zusammenhang der drei eine Operation einführenden Postulate 1—3 und die nahe Beziehung des 4. zum 5. Postulat maßgebend gewesen sein.

Die Formulierung *Euklids* ist äußerst knapp und setzt beim Unterricht offensichtlich die mündlichen Erläuterungen des Lehrers als Ergänzung voraus, dem es oblag, auf die Verbindung des sogenannten 4. Postulats zum 2. zurück und zum 5. voraus hinzuweisen.

c) Die eigenartige Zusammenstellung des 4. und 5. Postulates fordert dazu auf, sich die Frage der historischen Entstehung der Euklidischen Formulierung vorzulegen. Hat das 5. Postulat immer so ausgesehen wie bei *Euklid*? Haben *Theudios* oder gar *Leon* es auch schon so gefaßt?

Wir glauben, diese Frage ist zu verneinen. Und man kann die frühere Formulierung auch noch erraten. Sie wird gelautes haben: „Konvergierende Gerade schneiden einander, wenn unbegrenzt verlängert“ [griechisch etwa: *εὐθείας συνεούσας ἐκβαλλομένας ἐπ' ἀπειρον συμπέπτειν (ἐς δ' ἄμερον συνεούσιν)*]. In dieser Formel kommen Winkel gar nicht vor, das 4. Postulat war damals also überflüssig — zum mindesten an der Stelle unmittelbar vor dem 5. Postulat.

Daß eine solche Fassung des 5. Postulats wirklich existiert hat, kann man mangels erhaltener Quellen nur wahrscheinlich machen, nicht streng beweisen. Für einen solchen Wahrscheinlichkeitsbeweis aber liefert der *Euklid*kommentar des *Proklos*, diese fast unerschöpfliche Fundgrube, reiches Material. Dazu kommt noch eine Stelle aus dem Kommentar des *Johannes Philoponos* zu den *Analytica priora* des *Aristoteles*.

Zunächst ist auf das *νεύειν*, das Sich-Richten auf einen bestimmten Punkt wie auf ein Ziel (*πρὸς ἓνα σκόπον νέειν* bei *Polybios* bedeutet: „nur auf ein Ziel gerichtet sein“) hinzuweisen, das von *Proklos* als ein wesentliches Charakteristikum der Geraden angesehen wird; in *Euclid*. p. 179,22—180,1: *τὸ μὲν ἀπὸ σημείου γραμμὴν εὐθεῖαν ἐπὶ σημείον ὡς πρόχειρον λαμβάνει καὶ εὐόριστον. τῇ γὰρ ὁμαλῇ ὁρᾷ τοῦ σημείου συγκινουμένη καὶ συμπροιοῦσα τῷ μηδαμοῦ μᾶλλον καὶ ἥττον ἀπονεύειν εἰς τὸ ἕτερον καταντᾷ σημείον.*

Die Gerade ist charakterisiert durch eine bestimmte unveränderliche Richtung. (Vgl. p. 106,20—25, wo die Gerade als einfacher als der Kreis bezeichnet wird, der wegen des Hohen und Erhabenen an ihm ein „Anderswerden“ (*ἐτεροίωσις*) zeige, das die Gerade nicht besitze.)

Entsprechend werden die Parallelen nach *Poseidonios* als weder konvergierende noch divergierende Gerade (in einer Ebene) gekennzeichnet. (176,6 *ὁ δὲ Ποσειδώνιος παράλληλοι, φησὶν, εἶναι αἱ μὴτε συνεούσαι μὴτε ἀπονεύουσαι ἐν ἐνὶ ἐπιπέδῳ.*) Diese Definition wird *Poseidonios* kaum erfunden, sondern sie als „naive“ Kennzeichnung der Parallelen, die aus einer viel älteren Zeit stammt, wiederaufgenommen haben. Es kann sehr wohl eine stoische Tradition, die sich nicht in dem Maße wie die akademisch-peripatetische in mathematicis auf *Euklid* stützt, bestanden und bei *Proklos* einen teilweisen Niederschlag gefunden haben, was durch öftere Erwähnung der Stoiker *Poseidonios* und *Geminus* erhärtet wird.

Weiterhin findet sich in der Erörterung des 5. Postulats selbst durch *Proklos* der Begriff des Konvergierens oft verwendet. (Hier übrigens auch eine Erwähnung des *Geminus* p. 192,5). So p. 192,4: *τὴν πλίστιν*

παρεχόμενον τῆς τῶν εὐθειῶν συνεούσεως καὶ συμπτώσεως. p. 192,15—17: *τὸ μὲν ἡλαττουμένων τῶν ὀρθῶν συνεύειν τὰς εὐθείας ἀληθὲς καὶ ἀναγκαῖον, τὸ δὲ συνεούσας ἐπὶ πλεόν ἐν τῷ ἐκβάλλεσθαι συμπεσεῖσθαι ποτε πιθανόν, ἀλλ' οὐκ ἀναγκαῖον.*

Dazu kommen noch einige Stellen über den Zusammenhang des Konvergierens zweier Geraden und des Zurückbleibens der Summe der inneren Winkel hinter zwei Rechten:

Zwei Gerade stehen senkrecht auf einer dritten. Wenn ein Dreieck entstehen soll, müssen sie konvergieren (p. 311,3). Aber dieses Konvergieren vermindert die inneren Winkel so, daß ihre Summe unter zwei Rechten bleibt (311,5—7).

Ausführlicher drückt sich eine spätere Stelle (p. 384,14—21) aus: *ἐὰν γὰρ νοήσωμεν εὐθεῖαν καὶ ἐπὶ τῶν περάτων αὐτῆς τινὰς πρὸς ὀρθὰς ἐστῶσας, εἰτα συνιούσας εἰς τριγώνον γένεσιν, ὁρῶμεν ὅτι καθόσον συνεούσιν κατὰ τοσοῦτον ἐλαττοῦσι τὰς ὀρθὰς, ὅς ἐποιοῦν πρὸς τῇ εὐθείᾳ, ὥστε ὅσον ἔχει (δ' ἐκείν)ων ἀφείλον, τοσοῦτον προσλαβοῦσαι κατὰ τὴν πρὸς τῇ κορυφῇ σύνευσιν ἐξ ἀνάγκης, τὰς τρεῖς ποιοῦσιν δυοῖν ὀρθαῖς ἴσας.* Hier wird gesagt: Um wieviel die Geraden konvergieren, um so viel vermindern sie die — ursprünglich rechten — inneren Winkel.

Es wird so verständlich, daß die Konvergenz bei *Euklid* durch das Zurückbleiben der beiden inneren Winkel unter zwei Rechten ersetzt wird. Der Konvergenzbegriff ist zunächst noch anschaulich beschreibend und wird noch nicht auf die anderen genau definierten Grundbegriffe zurückgeführt. Das korrigiert dann *Euklid*, wie er ja auch die *νεῦσις* als Konstruktionsmittel (die sog. „Einschiebung“) nicht mehr verwendet.

Endlich muß noch kurz auf die erwähnte *Philoponos*-Stelle eingegangen werden. (Vgl. dazu *Th. Heath*, *Mathematics in Aristotle* (Oxford 1949), p. 27—30.)

Aristoteles führt als Beispiel einer *petitio principii* in den *Analytica priora* II, 16 (65a, 4—9) eine gewisse Konstruktion von Parallelen mißbilligend an, die offenbar zu seiner Zeit noch diskutiert wurde. Er selbst gibt keine näheren Angaben, aber *Philoponos* erzählt in seinem Kommentar zur Stelle (p. 454,4ff.) von der Konstruktion von Parallelen durch Ausrichtung zweier (horizontaler) Geraden nach dem Meridian (genauer nach dem Nord- und Südpunkt am Horizont): *σημείον ὡς εἴπειν προσπίπττον περὶ τὸ ἐπίπεδον ἐκείνου* (scil. τοῦ μεσημβρινοῦ κύκλου). Er ist offenbar der Meinung, daß zwei von verschiedenen Standpunkten in der Nord-Süd-Richtung gezogene horizontale Gerade parallel sind, weil sie dieselbe Richtung haben. Wir haben also hier (bei *Aristoteles*) eine Richtungstheorie des Parallelismus vor uns.

Im Ganzen genommen sind also sehr wohl Gründe vorhanden, eine primitivere Theorie des Parallelismus als die Euklidische anzunehmen, die dieser vorausging. Parallele wurden als Gerade gleicher Zielrichtung (*ρεῦσις*) angesprochen, infolgedessen auch als weder konvergierende noch divergierende Gerade definiert. So kann mit nicht geringer Wahrscheinlichkeit die Urform des 5. Postulats rekonstruiert und auch von dieser Seite her verständlich gemacht werden, daß das jetzige 4. und 5. Euklidische Postulat eine Einheit bilden, die aus jener Urform entstanden ist.

Anmerkung. Auch *Schopenhauer* hat in seinem Bestreben, den „Grund des Seyns“ elementar-geometrischer Sätze unmittelbar anschaulich zu machen, auf den Richtungs- bzw. Neigungsbegriff rekurriert. Vgl. „Über die vierfache Wurzel des Satzes vom zureichenden Grunde“ (1813), § 39.

3.

Der mutmaßliche Beweis des *Hippokrates* von Chios für die Proportionalität von Kreisfläche und Durchmesserquadrat (vgl. v. Fritz S. 92)

Es wird ziemlich allgemein, auch von v. Fritz, angenommen, daß der Satz, daß sich zwei Kreise wie die Quadrate ihrer Durchmesser verhalten, nur durch ein Exhaustionsverfahren bewiesen werden könne und daß demgemäß *Hippokrates* eine unvollkommene Vorform des *Eudoxischen* Beweises für den Satz (Euclid. Elem. XII, 2) vorgelegt haben müsse.

Indessen ist das wenig wahrscheinlich. Denn *Hippokrates* versuchte ja (um 440), den Kreis zu quadrieren durch Ausmessung endlicher Teilflächen, aus denen sich der Kreis durch Addition oder auch Subtraktion herstellen läßt — was nicht gelingen konnte. Auch ist wohl der erste Entwurf eines Exhaustionsverfahrens durch den Sophisten *Antiphon* (etwa 430) oder vielleicht durch *Anaxagoras* (wie überliefert, im Gefängnis etwa 434) angegeben worden, also wohl erst ungefähr zehn Jahre nach der Quadratur der „Möndchen“ durch *Hippokrates*.

Wie ist nun aber ein Beweis unseres Satzes ohne Exhaustion oder irgendeinen unendlichen Prozeß möglich? Und nicht nur rein sachlich möglich, sondern auch historisch denkbar?

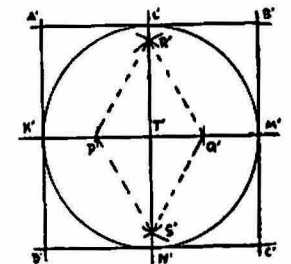
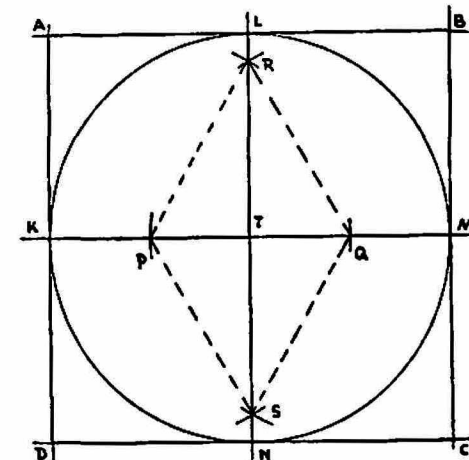
Eine Bemerkung des *Aristoteles*, Physik III, 7 (207 b, 29—34) führt hier weiter. Es ist eine von jenen Anspielungen auf elementare, den Zuhörern bekannte mathematische Tatbestände, an denen die Aristotelischen Pragmatien so reich sind. In seiner charakteristischen, bloß andeutenden Art sagt *Aristoteles*: Die Mathematiker bedürfen jetzt nicht

(mehr) des Unendlichen — sie brauchen es nämlich nicht — sondern nur einer begrenzten Strecke, die so groß ist, wie sie wollen (*δοῖν ἂν βούλωνται πεπερασμένην*). Denn in demselben Verhältnis wie die größte (Strecken)-Größe kann man eine beliebig größere oder kleinere andere Größe teilen. So daß es für den geometrischen Beweis nichts ausmacht, daß er innerhalb der „wirklichen“ Größendimensionen (d. i. im Raumgebiet innerhalb der Himmelskugel, der Fixsternsphäre) geführt wird.

(τῷ δὲ μεγίστῳ μεγέθει τὸν αὐτὸν ἔστι τεμῆσθαι λόγον ὀπηλικονοῦν μέγεθος ἕτερον. ὥστε πρὸς μὲν τὸ δεῖξαι ἐκείνοις οὐδὲν διοίσει τὸ [δ'] εἶναι ἐν τοῖς οὐρανοῖς μεγέθεσιν.)

Hier ist durchaus klar das Prinzip ausgesprochen, daß die Proportionen einer geometrischen Figur unabhängig von ihrer absoluten Größe sind und daher die geometrischen Beweise an einer beliebig kleinen Figur ebenso gut durchgeführt werden können wie an der allergrößten. Dem entspricht auch die ausführliche Erläuterung der *Aristoteles*-Stelle durch *Simplicius* (in Phys. p. 510, 15—512, 36).

Wir können nun auf Grund dieses Aristotelischen „Ähnlichkeitsprinzips“ dieselbe Konstruktion gewissermaßen mit verschiedenen Zirkelöffnungen ausführen, ohne daß sich die Proportionen innerhalb der jeweiligen Figuren ändern. Das ist besonders einleuchtend bei Konstruktionen mit fester Zirkelöffnung. Nun kann man wirklich einen Kreis mit umgeschriebenem Quadrat mit fester Zirkelöffnung folgendermaßen konstruieren:



Man nehme eine Gerade an (der Anschaulichkeit halber etwa horizontal) und auf ihr einen Punkt *P*. Nun trage man von *P* mit der festen

Zirkelöffnung a die Strecke $PQ = a$ ab. Dann konstruiere man (gemäß Elem. I, 1) nach beiden Seiten, oben und unten, die gleichseitigen Dreiecke PQR und PQS über PQ als Basis, mit den beiden Spitzen R und S . RS steht dann auf PQ senkrecht und halbiert sie im Schnittpunkt T . Nun schlage man um T mit derselben festen Zirkelöffnung a den Kreis, der die beiden Geraden PQ, RS in den vier Punkten K, L, M, N schneiden möge, und schlage wiederum um K, L, M, N Kreise mit der Zirkelöffnung a , welche sich offenbar in den vier Eckpunkten A, B, C, D des dem Kreise um T umgeschriebenen Quadrats schneiden werden.

Dieselbe Konstruktion wiederholt man nun in allen Einzelheiten mit der von a verschiedenen Zirkelöffnung b und erhält so die den Punkten der ersten Konstruktion genau entsprechenden Punkte $P', Q'; R', S', T'; K', L', M', N'; A', B', C', D'$. Bezeichnen wir nun die Flächeninhalte der Kreise um T bzw. T' mit den Radien a bzw. b mit k bzw. k' und die ihnen umschriebenen Quadrate $ABCD$ bzw. $A'B'C'D'$ ihrem Flächeninhalt nach mit q bzw. q' , so muß wegen der Gleichheit der Proportionen, die innerhalb der beiden Figuren jeweils gelten, nach dem Aristotelischen Ähnlichkeitsprinzip die Proportion bestehen:

$$k : q = k' : q',$$

woraus durch Vertauschung der Innenglieder (*ἐναλλάττειν*, nach Elem. V, 16) folgt:

$$k : k' = q : q',$$

was zu beweisen war.

Es lassen sich mehrere Varianten dieses Beweises denken, so daß die Einzelheiten des Hippokratischen Beweises nicht mit Sicherheit zu rekonstruieren sind. Aber das Grundsätzliche daran läßt sich durchaus noch mit großer Wahrscheinlichkeit vermuten.

Einzelbemerkungen

Zu S. 24 Anm. 20; vgl. auch S. 21, Anm. 16 und S. 59. Zum Verhältnis der antiken Axiomatik zur heutigen ist zu sagen, daß es auch in der Antike selbst verschiedene Auffassungen gegeben zu haben scheint. Die Stellung des *Aristoteles* (und auch wohl *Euklids*) ist nicht dieselbe wie die des *Archimedes*. Dieser scheint der „modernen“ Auffassung (*Hilberts* u. a.) näher zu stehen; man denke an die bekannte Bemerkung in der Vorrede zur „Quadratur der Parabel“ über das Axiom des Messens (das sog. „archimedische Axiom“). Dieser „Hilfssatz“ wird durchaus nicht als aus sich heraus evident betrachtet, sondern empfiehlt

sich durch seine Zweckmäßigkeit zur Begründung von Theoremen, die als gültig anzusehen seien. „Es zeigt sich aber“, sagt *Archimedes*, „daß jeder von diesen Sätzen (wie der, daß der Inhalt eines Kreises dem Quadrat des Radius proportional ist) ebenso zweifelsfrei ist wie die Sätze, die ohne diesen Hilfssatz bewiesen worden sind. Es genügt mir, wenn die von mir gefundenen (neuen) Sätze denselben Grad der Zweifelsfreiheit besitzen.“ Hier zeigt sich doch wohl eine von der aristotelischen erheblich verschiedene Auffassung, wenn auch noch keineswegs der moderne „konventionalistische“ Standpunkt *Hilberts* und *H. Poincarés* erreicht ist. Man kann diesen Auffassungswandel, der im 3. Jh. einsetzt, in Parallele setzen zu einer gleichzeitigen Umformung fundamentaler Anschauungen auf dem Gebiet der Logik, wie sie sich im teilweise gegensätzlichen Verhältnis der stoischen Logik zur aristotelischen darstellt. Es sei auf die eingehenden Untersuchungen von *J. Lohmann* über dieses Thema hingewiesen (Lexis II, 2: „Vom ursprünglichen Sinn der aristotelischen Syllogistik“; III, 1: „Das Verhältnis des abendländischen Menschen zur Sprache“; Österreich. Zeitschr. f. öffentl. Recht VI, 3: „Denkform und Sprache“), die den Gegensatz des 4. und 3. Jhs indessen vielleicht doch allzustark betonen; es dürfte doch auch Übergangserscheinungen, repräsentiert durch Männer wie *Theophrast*, gegeben haben.

Zu S. 27. Zum Begriff der *κοινά*: Es dürfte sich bei den *κοινά* weniger um implizit definierte Begriffe als um 'logical constants' im Sinne *Bertrand Russells* handeln.

Zu S. 57. Zur Datierung archimedischer Schriften. — Ist die „*Quadratura parabolae*“ wirklich früher als die „*Methodus ad Eratosthenem*“? Für diese allgemein verbreitete Annahme sprechen zweifellos die Widmungsbriefe, die *Archimedes* den beiden Schriften vorausschickt. In der Vorrede zur Parabelquadratur wird diese Quadratur als eine neue Entdeckung hingestellt, als „ein Problem, das bisher noch nicht, jetzt aber durch mich in Angriff genommen worden ist“. Im Widmungsschreiben an *Eratosthenes* wird dagegen nur die benutzte Methode als offenbar neu bekannt gemacht, die Quadratur der Parabel aber gleich am Anfang ohne besonderen Hinweis gebracht. Also scheint die Sache klar: in der früheren Schrift „*quadr. parab.*“ wurde die Parabelquadratur zuerst veröffentlicht, in der späteren „*Ἐρῳδοῦς*“ als Beispiel für die neue Methode nochmals — unter anderen Beispielen — vorgeführt.

Indessen steht dieser so plausibel erscheinenden Argumentation doch ein schwerwiegendes Bedenken entgegen, das sich aus dem mathe-

matischen Inhalt der beiden Schriften ergibt. Die *Eratosthenes* mitgeteilte „mechanische“ Methode ist nämlich in der „*Epodos*“ in viel primitiverer Form dargestellt, als in der „quadr. parab.“, wo sie ja bekanntlich auch auftritt, aber mit regelrechten Exhaustionsbeweisen versehen. Die „mechanische“ Methode legt *Archimedes* also in zwei verschiedenen Formen, mit ganz verschiedenen Graden von Strenge dar. Es ist undenkbar, daß in seinem Geiste die Methode zuerst in der strengen und dann erst in der unstrengen Form entstanden ist, zumal die unstrengere Form historisch bei *Demokrit* (Fragm. B 155 *Diels*, wozu *Hero*, *Metrica*. II praef. (p. 94, 7—96, 11 *Schöne*) zu vergleichen ist) nachzuweisen ist, bei demselben *Demokrit*, den *Archimedes* in der Vorrede der „*Epodos*“ erwähnt.

Ich weiß aus diesem Dilemma nur einen Ausweg: Man muß annehmen, daß *Archimedes* seine „mechanische Methode“ schon in früher Zeit, angeregt durch Vorläufer wie *Demokrit* und vielleicht auch Praktiker in der Art des (späteren, dem 1. nachchristl. Jahrh. angehörigen) *Heron*, besessen hat, sich aber scheute, sie in dieser unvollkommenen Form zu veröffentlichen. Er gab daher zunächst die „quadr. parab.“, die dem *Dositheos*, einem „erfahrenen Mathematiker“, gewidmet ist, heraus. Erst später entschloß er sich dann zur Herausgabe der ursprünglichen, wenig strengen, aber schnellen und eleganten Methode, die als Forschungsmittel ihre Bedeutung bewahrte. So erklärt sich vielleicht die Widmung gerade an *Eratosthenes*, der zwar ein sehr vielseitiger und weitschauender Gelehrter, aber eigentlich kein Mathematiker von Rang war — *Archimedes* bezeichnet ihn ja auch sehr fein als „einen hervorragenden philosophischen Forscher und Lehrer, der auch mathematische Betrachtungen, wenn sie irgendwann auftauchen, hochschätzt“. Gerade bei einem solchen Mann konnte *Archimedes* vielleicht am ehesten auf Verständnis hoffen.

Zu S. 60f. *Archimedes*, Opera II, p. 262 (*Heiberg*).

a) „κύκλω τῷ δοθέντι καὶ κύκλου τμήματι τῷ δοθέντι χωρίον εὐρεῖν ἐνθύγραμμον ἴσον“ bedeutet: „Eine gradlinig begrenzte Figur zu finden, die gleich ist der Summe eines beliebig gegebenen Kreises und eines beliebig gegebenen Kreisabschnitts“ (d. i. eines sog. „Möndchens“). Zum eigentümlichen Gebrauch des griechischen Artikels in mathematischen Texten ist auf eine Bemerkung von *Sir Thomas Heath* (*Mathematics in Aristotle*, p. 108) hinzuweisen⁵⁾.

⁵⁾ „The Greek idiom always favours the definite article with the word denoting an assigned magnitude, where we use the indefinite article. Cf. *Archimedes* (de lin. spir. 4, 13 *Heiberg*) τὰν δοθείσαν σφαῖραν ἐπιπέδῳ τεμεῖν ὥστε τὰ τμήματα

Diese Aufgabe hat *Hippokrates von Chios* nicht gelöst; er quadrierte zwar die Summe eines gegebenen Kreises und eines Möndchens, aber keines beliebigen Möndchens, sondern eines ganz bestimmten, folgendermaßen konstruierten: Sein äußerer Rand ist ein Kreisbogen von 120° mit dem Radius $r\sqrt{6}$ und sein innerer Rand ist ein Bogen von 60° mit dem Radius $3\sqrt{2}r$, wo r der Radius des gegebenen Kreises ist.

Die „nicht gut zuzugestehenden“ Hilfssätze (οὐκ εὐπαράχωρητα λήμματα) dürften in unzulässigen Verallgemeinerungen des sehr speziellen Satzes des *Hippokrates* bestanden haben.

b) Die Worte „χωρίον τε τὰς δόλου τοῦ κώνου τομᾶς καὶ εὐθείας περιεχόμερον“ werden sich wohl auf die Quadratur des Ellipsensegments beziehen. Denn nur die Ellipse ist unter allen Kegelschnitten eine ganz im Endlichen gelegene Figur, und nur in ihr wird daher der Kegel — im Endlichen, was die Griechen allein anerkannten — ganz durchschnitten. Die Geometer vor *Archimedes* scheinen da etwas falsch gemacht zu haben, vielleicht durch vorschnelle Verallgemeinerung leicht einzusehender Spezialfälle. Näheres wissen wir nicht.

Zu S. 86, Anm. 163. Zur Frage der „Wechselwegnahme“ (ἀνταίρεσις) ist zu sagen, daß bei *Nikomachos* (*Introductio arithmetica* I, XIII, 11; bei der Behandlung von *Euklid*, Elem. VII, 1.2) neben dem Verbum ἀνταφαίρειν auch das Substantiv ἀνταφαίρεσις steht; daß aber ἀνταφαίρειν und ἀνθυφαίρειν gleichbedeutend sind, wird durch *Iamblichos*, in *Nicomach.* 28, 24 (*Pistelli*) bezeugt, der ἀνθυφαίρειν ohne weiteres zur Wiedergabe von ἀνταφαίρειν bei *Nikomachos* benutzt. Da nun *Alexander von Aphrodisias* (in *Aristot. Topica* p. 545, 9—17 *Wallies*) ἀνταφαίρεσις gleich ἀνθυφαίρεσις (d. h. dem Euklidischen Teilerverfahren, El. VII, 1.2 und X, 2.3) setzt, ist die Identität von ἀνταφαίρεσις und ἀνθυφαίρεσις vollständig, auch rein von der Terminologie her, bewiesen. Ferner geben die drei arabischen Euklidkommentatoren *Al-Mahāni*⁶⁾, *An-Nairizi* und *Al-Hajjāmi* bei ihrer Erläuterung des V. Buchs der „Elemente“ sämtlich eine genaue Darstellung der Definition gleicher Verhältnisse — auch im irrationalen Fall — dadurch, daß die gleichen Zahlenfolgen bei dem Prozeß der „Wechselwegnahme“ auftreten.

αὐτὰς ποτ' ἀλλὰ τὸν ταχθέντα λόγον ἔχειν where we translate: 'To cut a sphere by a plane so that the segments of it have one another a given ratio'."

Weitere Beispiele bieten die Formulierungen von Problemen in *Euklides*, „Elementen“ wie I, 1—2, 9—12 und öfters.

⁶⁾ Die Stelle bei *Alexander* wiederholt *Suidas*, *Lexicon* sub verbo ἀνάλογον wörtlich; *Al-Mahāni* schreibt bereits um 820, so daß die Kontinuität zeitlich gewahrt erscheint. — Zu den Arabern vgl. *E. B. Plooj*, *Euclid's conception of ratio as criticized by Arabian commentators* (Rotterdam 1950).

Somit dürfte trotz der Bedenken von *K. Reidemeister* und *Th. Heath* (*Mathematics in Aristotele* p. 80—83) die aristotelische Definition gleicher Verhältnisse (Top. VIII, 3 p. 158b, 29 ff.) endgültig aufgeklärt sein.

Zu S. 87 (mit Anm. 165) u. S. 88. Zu *Alexanders v. Aphrod.* Bericht über *Brysons* Kreisquadratur (in Soph. El. p. 90, 10 ff.) sind die abfälligen Bemerkungen von *Th. Heath* (Math. in Aristotele p. 47—50) zu vergleichen. Die von *v. Fritz* für möglich gehaltene stetige Zunahme eines dem Kreise zunächst eingeschriebenen Quadrats bis zu seiner Flächengleichheit mit einem dem Kreise umgeschriebenen Quadrat scheint mir doch eine allzu moderne Vorstellung zu sein, als daß ich sie dem *Alexander* zutrauen könnte. Es wird z. B. die *ἀορίστος ὁδός*, die sich aus *Platons μάλλον καὶ ἥττον* im *Philebos* (p. 24a—d) entwickelt hat, im *Philebos-Kommentar* des *Porphyrrios* (an der sog. Ellen-Teilungsstelle: *Simplicius*, in Phys. Aristot. p. 453, 30—454, 16) sofort in ein unstetiges Fortschreiten nach oben und unten hin, im Sinne der Folgen $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}$... und $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$... umgewandelt.

Das Problem liegt eigentlich in der Frage, ob bei einer immer enger werdenden Intervallschachtelung innerhalb sämtlicher Intervalle ein genau bestimmter Punkt existiert. (Das ist das, was man auch heute noch unter Cantorscher Stetigkeit versteht.)

Ob beim Übergang vom Größeren zum Kleineren stets ein Durchgang durch das Gleiche stattfindet, war den antiken Mathematikern und Philosophen zweifelhaft. (*Procl.* in Euclid. p. 234, 12—19, cf. *Plato*, *Parm.* 165a, 3—5; *Joh. Campanus*, *Kommentar zu Euklid*, Elem. III, 16.)

In einer früheren Arbeit⁷⁾ glaubte ich auf Grund des bei *Proklos* und den *Aristoteles-Kommentatoren* erhaltenen Materials feststellen zu können, daß die griechischen Mathematiker (vermutlich schon des 4. Jh.s) die entscheidende (notwendige und hinreichende) Bedingung für die Geltung des angeführten Stetigkeitsprinzips in der Gültigkeit des eudoxisch-archimedischen Axioms des Messens in der fraglichen Mannigfaltigkeit gesehen haben, die demnach nach heutiger Ausdrucksweise als ein „archimedisch geordneter Körper“ anzusehen wäre.

Sachlich bringt das jedoch eine gewisse Schwierigkeit mit sich. Das „archimedische“ Axiom des Messens ist gleichwertig mit dem sog. „Einschließungssatz“, nach dem jedes beliebige Verhältnis beliebig eng zwischen rationalen Verhältnissen eingeschlossen werden kann; d. h. geometrisch-anschaulich ausgedrückt: jeder Punkt einer Strecke kann beliebig eng zwischen solchen Punkten eingeschlossen werden, die durch die

⁷⁾ Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik (B), Bd. II, S. 369—387.

Teilung der Strecke in eine bestimmte Anzahl gleicher Teile entstehen.

Nun ist es aber auch bei Geltung des Einschließungssatzes nach unserer heutigen Auffassung noch durchaus fraglich, ob auch seine Umkehrung gilt; d. h. ob jede sich beliebig verengernde Einschachtelung von Strecken in ihrem Inneren überhaupt einen Streckenpunkt enthält.

Es sieht nun zunächst so aus, als ob die Alten diese Umkehrung des Einschließungssatzes sofort aus der Geltung des Satzes selbst gefolgert hätten. Aber haben sie wirklich die Existenz eines Punktes innerhalb einer sich unbegrenzt zusammenziehenden Intervallschachtelung zum mindesten in denjenigen Fällen angenommen, wo der Schachtelungsprozeß effektiv konstruktiv ausgeführt werden kann?

Es scheint doch so zu sein, daß z. B. die Punkte einer Strecke nach *Aristoteles* — und, soviel ich sehe, allen Späteren — nicht etwa im Sinne der heutigen Cantorschen Mengenlehre als aktuell in der Strecke von vornherein vorhanden angesehen werden (die Strecke ist ja nach *Cantor* nichts anderes als eine aktual-unendliche Punktmenge), sondern nur als *ὀράμετα ὄντα* da sind und erst durch den Teilungsakt selbst als Teilpunkte — oder entsprechend durch eine andere geometrische Konstruktion genau definierter Art — in die aktuelle Wirklichkeit gerufen werden. Damit mußte den Alten, so möchte ich vermuten, die ausdrückliche Annahme der „wirklichen“ Existenz eines Punktes innerhalb aller ineinander geschachtelten Intervalle überflüssig, ja eigentlich geradezu sinnlos erscheinen, zumal ja auch die Intervalle selbst nie (nach antiker Auffassung) in unendlicher Zahl aktuell existieren können.

Aber bezüglich der Existenz des Verhältnisses π von Kreisumfang und Durchmesser ist die Tatsache entscheidend, daß die Alten den Kreis als eine einfache Figur ansahen, an deren Existenz gar nicht zu zweifeln war. Von da aus ergab sich notwendig die Existenz von Kreisfläche und -umfang und damit von π . So scheint man sich in diesem Fall über die Schwierigkeit hinweggeholfen zu haben.

Daß es freilich auch skeptische Stimmen gab, beweisen die Einwände, die *Sporos* (nach *Pappos*, *Collect. math.* IV, p. 252 ssq.) gegen die Konstruktion des Verhältnisses $2:\pi$ durch *Deinostratos* mit Hilfe der Quadratrix erhob, eine Konstruktion, bei der es sich um die immer engere, unbegrenzt fortsetzbare Einschließung eines (problematischen!) Punktes auf einer Strecke durch schrittweise effektiv konstruierte Punkte handelt. Man muß vielleicht doch in den Einwänden des *Sporos* eine Art Zweifel an der Existenz des Verhältnisses $2:\pi$ sehen.

gemeinen Proportionen der Dedekindschen Annahme nahekommmt, niemals wie *Dedekind* die Existenz sämtlicher denkbarer Verhältnisse gefordert. *Dedekind* hat das sehr wohl empfunden, wie aus einem aufschlußreichen Briefwechsel mit *Lipschitz*⁸⁾ hervorgeht.

Die Formulierung des „Axioms des Messens“ durch *Eudoxos* als Definition (*Euclid*, Elem. V, def. 4, die wir als eudoxisch ansehen dürfen): „Λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἂ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ἐπερέχειν“ vermeidet offenbar eine allgemeine Existenzsetzung von Verhältnissen in konkreten Fällen; z. B. sagt *Eudoxos* nirgends, daß zwei beliebige Strecken immer ein Verhältnis haben. Und wenn das auch für Strecken gelten sollte, so doch nicht für alle Arten geometrischer Gebilde, z. B. nicht für die gemischtlinigen Winkel (vgl. *Procl.* in *Euclid.* p. 121, 24—122, 3).

Im vorliegenden Fall scheint also die Formulierung des „Maßaxioms“, das ja *Aristoteles* als ein wirkliches Axiom ausspricht (*Phys.* III, 6 (206b, 11); VIII, 10 (266b, 2—4)), durch *Eudoxos* als Definition doch eine wesentliche Bedeutung zu haben.

⁸⁾ *R. Dedekind* an *R. Lipschitz*, am 10. 6. und 27. 7. 1876 (*Rich. Dedekind*, Gesammelte mathematische Werke, Bd. III, Braunschweig 1932, S. 469ff.).

Hippocrates Mathematicus. — BECKER O., *Die Archai in der griechischen Mathematik* [et une démonstration due à Hippocrate de Chios]; cf. *Sciences : Mathématiques*.

59 — *Die Archai in der griechischen Mathematik. Einige ergänzende Bemerkungen zum Aufsatz von K. von Fritz* (cf. *APh* XXIX 551); *ABG* IV 1959 210-226. | A propos du concept d'hypothèse chez Platon. Sur les postulats 4 et 5 d'Euclide. A propos de la preuve fournie par Hippocrate de Chios de la proportion entre deux cercles égale à la proportion des carrés de leurs diamètres. Notes de détail.

Archiv f. Begriffsgeschichte

f3756
V9371