

1868
CANTOR, M.
1894
IN: GESCHICHTE DER
MATHEMATIK.
VI Bl. 137-159

VORLESUNGEN

ÜBER

GESCHICHTE DER MATHEMATIK

VON

MORITZ CANTOR.

ERSTER BAND.

VON DEN ÄLTESTEN ZEITEN BIS ZUM JAHRE 1200 N. CHR.

MIT 114 FIGUREN IM TEXT UND 1 LITHOGR. TAFEL.

ZWEITE AUFLAGE.



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1894.

diesen Richtungen können wir den Mann als seinen Nachfolger betrachten, dem wir jetzt uns zuwenden: Pythagoras von Samos.

6. Kapitel.

Pythagoras und die Pythagoräer. Arithmetik.

„Nach diesen verwandelte Pythagoras die Beschäftigung mit diesem Wissenszweige in eine wirkliche Wissenschaft, indem er die Grundlage derselben von höherem Gesichtspunkte aus betrachtete und die Theoreme derselben immaterieller und intellectueller erforschte. Er ist es auch, der die Theorie des Irrationalen und die Construction der kosmischen Körper erfand.“

Pythagoras von Samos, über welchen wir soeben das alte Mathematikerverzeichniss haben reden lassen, war Sohn des Mnesarchus. Er gründete in den dorisch bevölkerten Städten von Süditalien, in dem sogenannten Grossgriechenland, eine Schule, die zahlreiche Anhänger versammelte und so geschlossen auftrat, eine solche auch politische Bedeutung gewann, dass sie die Feindschaft der ausserhalb der Schule Stehenden auf sich zog und gewaltsam zersprengt wurde.

Diese Thatsachen stehen nach den Aussprüchen sämmtlicher alten Berichterstatter allzu fest, als dass sie auch nur von einem einzigen neueren Geschichtsschreiber angefochten würden. In jeder anderen Beziehung aber herrschen über das Leben des Pythagoras, über seine Lehre, über das was man ihm, was man seinen Schülern zuzuschreiben habe, die allergrössten Meinungsverschiedenheiten. Greifen wir nur einige gewiss wichtige Punkte heraus: das Geburtsjahr des Pythagoras, das Jahr seiner Ankunft in Italien, sein Todesjahr, die Zeit, zu welcher die Schule zersprengt wurde, das Alles liegt im Widerstreite der Meinungen. Wenn ein Forscher¹⁾ Pythagoras 569 geboren, 510 in Italien aufgetreten, 470 bei dem gegen die Schule entbrannten Aufstande umgekommen sein lässt, sagt uns ein anderer Forscher²⁾, die Geburt habe um 580, die Ankunft in Italien um 540 stattgefunden, Pythagoras sei um 500 gestorben, die Schule erst ein halbes Jahrhundert später zersprengt worden. Aehnliche Gegensätze treten in allen Aeusserungen derselben Gelehrten über Pythagoras und die Pythagoräer hervor, und wir können diese Gegensätze so ziemlich auf einen einzigen grundsätzlichen zurückführen. Der erste Gelehrte, dessen Datirungen wir angaben, ging von dem Bestreben

¹⁾ Röth, Geschichte der abendländischen Philosophie. Bd. II. ²⁾ Zeller I.

aus, die überreichen Mittheilungen, welche erst in nachchristlichen Jahrhunderten von griechischen Schriftstellern in Form spannender aber Roman-artiger mit Wundergeschichten reichlich durchsetzter Bücher zusammengestellt wurden, nach Ausscheidung dessen, was augenscheinlich sagenhafte Erfindung war, zu benutzen. Der Zweite verwirft jene Romane ganz und gar, lässt höchstens die Benutzung einiger weniger Stellen derselben zu, wo die Gewährsmänner ausdrücklich genannt sind und ihre Nennung selbst Vertrauen verdient. Beide gehen wohl in ihren polemisch erprobten und dadurch nur um so stärker befestigten Meinungen zu weit, wenn wir auch heute gern erklären, dass wir uns in den meisten Punkten den Ansichten des Vertreters derjenigen Auffassung, die man als skeptische bezeichnen könnte, nähern, wenn nicht anschliessen. Für uns gibt es aber noch einen Mittelweg, den wir vielfach an der Hand des letzten Bearbeiters¹⁾ unseres Gegenstandes zu gehen lieben, so weit überhaupt die Geschichte der Mathematik uns die Pflicht auferlegt über die Streitpunkte ein Urtheil auszusprechen.

Ein derartiger Streitpunkt ist der Aufenthalt des Pythagoras in Aegypten, der von grösster Bedeutung für die ganze Entwicklungsgeschichte der griechischen Mathematik ist, wenn man an ihn glaubt, jene Geschichte noch räthselhafter macht, als sie vielfach bereits erscheint, wenn man ihn verwirft. Der älteste Bericht über diesen Aufenthalt, um dessen Glaubwürdigkeit oder Unglaubwürdigkeit es sich begreiflicher Weise in erster Linie handelt, stammt von dem Redner Isokrates, dessen schriftstellerische Thätigkeit auf 393, also höchstens etwa 100 Jahre nach dem Tode des Pythagoras und bevor die Mythenbildung sich seiner Persönlichkeit bemächtigt hatte, fällt. Isokrates sagt von den ägyptischen Priestern²⁾: Man könnte, wenn man nicht eilen wollte, viel Bewunderungswürdiges von ihrer Heiligkeit anführen, welche ich weder allein noch zuerst erkannt habe, sondern Viele der jetzt Lebenden und der Früheren, unter denen auch Pythagoras der Samier ist, der nach Aegypten kam und ihr Schüler wurde und die fremde Philosophie zuerst zu den Griechen verpflanzte. Dieser Stelle ist mit entschiedenem Zweifel begegnet worden³⁾, der auf den Inhalt der Rede des Isokrates sich gründet. Busiris war eine ägyptische Stadt mitten im Nildelta, in der grosse Isisfeste gefeiert wurden. In Erinnerung an die frühere

¹⁾ A. Ed. Chaignet, *Pythagore et la philosophie Pythagoricienne contenant les fragments de Philolaus et d'Archytas. Ouvrage couronné par l'institut.* Paris, 1873. Wir citiren dieses Werk kurz als Chaignet. ²⁾ Isokrates, *Busiris* cap. 11. ³⁾ Die Zweifel sind hier theilweise wörtlich aus Zeller I, 259 Note 1 entnommen.

Abgeschlossenheit Aegyptens Fremden gegenüber hatte die griechische Sage aber auch einen König gleichen Namens mit der Stadt erdacht, der jeden Fremden schlachten liess. Zur Zeit der Sophisten liebten die griechischen Rhetoren sich mit Redestückchen gegenseitig zu überbieten, Lobreden auf Tadelnswerthe, Anklagen gegen Vortreffliche zu verfassen. So hatte Polykrates eine Apologie jenes Busiris geschrieben, und nun wollte Isokrates dem Nebenbuhler zeigen, wie er sein Thema eigentlich hätte behandeln müssen. Polykrates, meint er, habe darin gefehlt, dass er dem Busiris ganz unglaubliche Dinge zugeschrieben habe, einerseits die Ableitung des Nils, andererseits das Auffressen der Fremden; dergleichen werde man bei ihm nicht finden. Wir lügen zwar beide, sagt er aufrichtig genug, aber ich mit Worten, welche einem Lobenden, Du mit solchen, welche einem Scheltenden geziemen. Aus diesem Geständnisse hat man die Folgerung gezogen, dass Angaben, die sich selbst als rednerische Erfindung geben, nicht den geringsten Werth haben. Diese Folgerung ist aber nur da richtig, wo es um rednerische Erfindung sich überhaupt handeln kann. Hätte also Busiris, dem Isokrates lobend nachlügt, er sei der Urheber der ganzen ägyptischen Kultur gewesen, wirklich gelebt, wir würden doch von jenem Lobe nichts halten. Sind wir deshalb berechtigt, auch von der ägyptischen Kultur nichts zu halten, nichts von den ägyptischen Priestern als Trägern dieser Kultur? Das wünscht wohl der Zweifelsüchtigste nicht. Und wenn die allgemein anerkannte Thatsache ägyptischer hoher Bildung nur den unwahren Zwecken des Isokrates mittelbar dienen soll, so hat es für ihn auch nur mittelbare Bedeutung, wenn er jener Thatsache eine Stütze gibt, wenn er sich darauf beruft, Pythagoras sei Schüler dieser hochgebildeten Priester gewesen. Der falsche Satz: Busiris sei der Urheber aller Bildung, wird dadurch in keiner Weise wahr, wenn die Bildung vorhanden war, wenn sie auf fremde Persönlichkeiten sich übertrug. Ueberdies bedurfte Isokrates zu diesem letzteren Erweise keiner Unwahrheit. Er konnte auf die Reisen, auf die Berichte anderer Männer sich beziehen, eines Thales, eines Herodot, eines Demokritos. Wenn er es vorzog, statt ihrer nur Pythagoras zu nennen, so wird man das dadurch erklären müssen, dass das Ansehen, in welchem Pythagoras schon zur Zeit des Isokrates stand, doch ein anderes war, als das der eben genannten wenn auch berühmten Persönlichkeiten. Isokrates, wir können es nur immer stärker betonen, log nicht um zu lügen, er log nur in den Lobsprüchen, die er seinem um jeden Preis zu erhebenden Helden zollte, und die erfundenen Verdienste des Busiris konnten eine gewisse Scheinbarkeit, auf deren Erlangung es bei dem rednerischen Kunststückchen allein

ankam, nur dann gewinnen, wenn alles Beiwerk der Wahrheit entsprach, wenn nicht auch nebensächliche Dinge den Hörer sofort kopfscheu machten. Wir zweifeln daher keinen Augenblick, dass der Aufenthalt des Pythagoras in Aegypten, dass der Unterricht, welchen er bei den dortigen Priestern genoss, zu den Dingen gehört, die landläufige Wahrheit waren, als Isokrates sie aussprach, die Niemand neu, Niemand absonderlich oder gar unwahrscheinlich vorkamen¹⁾.

Der Aufenthalt des Pythagoras in Aegypten, den wir jetzt schon für durchaus gesichert halten, wird weiter durch eine Menge anderer Schriftsteller behauptet. Freilich sind es Schriftsteller, die insgesamt später, theilweise viel später als Isokrates gelebt haben. Strabon meldet uns in nüchternem, einfachem und dadurch um so glaubwürdigerem Tone: Die Geschichtsschreiber theilen mit, Pythagoras sei aus Liebe zur Wissenschaft nach Aegypten und Babylon gegangen²⁾. Antiphon, allerdings der Lebenszeit nach nicht genauer bestimmt, aber von späteren Schriftstellern unter Namensnennung mit grosser Zuversicht benutzt, hat in seinen Lebensbeschreibungen von durch Tugend sich auszeichnenden Männern Ausführliches über den ägyptischen Aufenthalt des Pythagoras erzählt³⁾. Viel weniger Gewicht legen wir — von anderen Zeugnissen zu schweigen — dem bei, was ägyptische Priester ruhmredig dem Diodor erzählten und was er uns mit folgenden Worten wiederholt: Die ägyptischen Priester nennen unter den Fremden, welche nach den Verzeichnissen in den heiligen Büchern vormals zu ihnen gekommen seien, den Orpheus, Musäus, Melampus und Dädalus, nach diesen den Dichter Homer und den Spartaner Lykurg, ingleichen den Athener Solon und den Philosophen Platon. Gekommen sei zu ihnen auch der Samier Pythagoras und der Mathematiker Eudoxus, ingleichen Demokritos von Abdera und Oinopides von Chios. Von allen diesen weisen sie noch Spuren auf⁴⁾. Diese altägyptischen Matrikellisten mit sammt den aufgewiesenen Spuren sind an sich recht sehr verdächtig, doppelt verdächtig durch Namen wie Orpheus und Homer, die dort eingetragen sein sollen. Wir haben die Stelle überhaupt nur aus einem, wie uns scheint, erheblichen Grunde mitgetheilt. Sie beweist nämlich, dass zu Diodors Zeiten um die dort genannten Männer ein ziemlich

¹⁾ Chaignet pag. 43 hält die ägyptische Reise auch für erwiesen, lässt sich aber auf eine Vertheidigung des Ausspruches des Isokrates, wie wir sie geliefert haben, nicht ein. Dagegen sind bei ihm die Citate anderer Schriftsteller, welche über jene Reise berichten, in grosser Vollständigkeit gesammelt.

²⁾ Strabo XIV, 1, 16. ³⁾ Als Bruchstück erhalten bei Porphyrius, *De vita Pythagorae* cap. 7, auch bei Diogenes Laertius VIII, 3. ⁴⁾ Diodor I, 96.

gleicher Strahlenkranz von Berühmtheit sich gebildet hatte, der von ihnen auf die Lehrer, die sie hatten oder gehabt haben sollten, zurückstrahlt.

Die von uns angeführte Stelle des Strabon gibt auch Auskunft über eine Studienreise des Pythagoras nach Babylon. Offenbar genoss diese zur Zeit von Christi Geburt, das ist zur Zeit Strabons, einer hinreichend guten Beglaubigung, um als geschichtliche Tatsache kurz erwähnt zu werden. Als sicher gestellt erscheint uns damit so viel, dass Pythagoras in Babylon hätte gewesen sein können. Drücken wir uns deutlicher aus. Wir meinen, es müssen innerhalb der pythagoräischen Schule Lehren vorgetragen worden sein, welche überraschende Aehnlichkeit mit solchen Dingen besaßen, denen das Griechenthum seit dem Alexanderzuge an dem zweiten Mittelpunkte ältester Kulturverbreitung neben Aegypten, in Babylon wiederbegegnete. Eine gegentheilige Annahme würde das Entstehen des Glaubens an die Sage von dem Aufenthalte bei den Chaldäern jeder Grundlage berauben. Wir nennen den Aufenthalt eine Sage, weil auch uns jetzt ein erstes Zeugniß Strabons ohne Kenntniß des Alters seiner Quellen zur vollen geschichtlichen Wahrheit nicht ausreicht. Immerhin bleibt die Art, wie babylonische Elemente, deren wir auf mathematischem Gebiete einige erkennen werden, in die pythagoräische Lehre einströmen, und die Rolle, welche sie darin spielten, in hohem Grade räthselhaft, wenn wir ganz verwerfen wollten, Pythagoras selbst oder einer seiner nächsten Schüler sei unmittelbar an die Quelle gerathen, aus welcher dieselben zu schöpfen waren.

Mit dem Ausdrucke Pythagoras selbst oder einer seiner nächsten Schüler haben wir eine unleugbare Schwierigkeit bezeichnet, einen Gegenstand wissenschaftlichen Zweifels berührt, welcher hier im Wege liegt und zu dessen Wegräumung uns keine Mittel gegeben sind. Die pythagoräische Schule war, wie schon oben erwähnt wurde, eine eng geschlossene. Mag es Wahrheit oder Uebertreibung genannt werden, dass unverbrüchliches Stillschweigen überhaupt den Pythagoräern zur Pflicht gemacht war, dass ihnen unter allen Umständen das verboten war, was wir sprichwörtlich aus der Schule schwatzen nennen, sicher ist, dass über den oder die Urheber der meisten pythagoräischen Lehren kaum irgend welche Gewissheit vorliegt. *Ἐκείνος ἔφα* oder *Αὐτὸς ἔφα*, ER, der Meister, hat's gesagt, war die vielbenutzte Redensart, und welcher Zeit dieselbe auch angehört, sie lässt, je später sie aufgekommen sein mag, um so deutlicher die ganz ungewöhnliche, durch viele Jahrhunderte in der Ueberlieferung sich erhaltende geistige Ueberlegenheit des Pythagoras, der Alles, was von Werth war, selbst gefunden und gelehrt haben sollte, lässt aber

auch die Unmöglichkeit erkennen scharf zu sondern, was wirklich von Pythagoras selbst, was von seinen Schülern herrührte. Vielleicht ist es dabei gestattet aus den erwähnten inneren Gründen anzunehmen, dass, wo ein Pythagoräer als Entdecker bestimmt genannt ist, die Richtigkeit der Angabe nicht leicht zu bestreiten sei, dass dagegen, wo Pythagoras selbst der Urheber gewesen sein soll, sehr wohl eine Namensverschiebung stattgefunden haben könne.

Einige von den Dingen, welche ganz besonders der Geschichte der Mathematik angehören, werden wir allerdings nicht verziehen Pythagoras selbst zuzuschreiben. Dazu gehört der pythagoräische Lehrsatz, den wir unter allen Umständen ihm erhalten wissen wollen. Sei es darum, dass man den Zeugnissen des Vitruvius, des Plutarch, des Diogenes Laertius, des Proklus, so bestimmt sie auch lauten¹⁾, wegen ihres späten Datums kein Gewicht beilegen dürfe. Schwerer fallen doch die in die Wagschale, welche Proklus als seine Gewährsmänner anführt: „Die welche Alterthümliches erkunden wollen“²⁾ sei damit, wie man gewöhnlich annimmt, Eudemos gemeint oder nicht. Am Ueberzeugendsten vollends ist uns die mittelbare Bestätigung in dem alten Mathematikerverzeichnisse. Pythagoras, heisst es dort ausdrücklich, erfand die Theorie des Irrationalen. Eine solche Theorie war aber ganz unmöglich, eine Beschäftigung mit dem Irrationalen undenkbar, wenn nicht der Satz von den Quadraten der drei Seiten des rechtwinkligen Dreiecks vorher bekannt war, und man würde, wollte man Pythagoras nicht als seinen Urheber gelten lassen, in die noch schwierigere Lage versetzt, ihn älter als Pythagoras annehmen zu müssen.

Auf Grundlage des Mathematikerverzeichnisses sehen wir ferner in Pythagoras selbst wirklich den Erfinder der Construction der kosmischen Körper, d. h. der regelmässigen Vielflächner in einem Sinne, der nachher noch auseinandergesetzt werden soll.

Glaubwürdig ist uns auch, was der bekannte Musikschriftsteller Aristoxenus, einer der zuverlässigsten Gelehrten der peripatetischen Schule, berichtet, dass Pythagoras vor Allen die Zahlenlehre³⁾ in Achtung gehabt und dadurch gefördert habe, dass er von dem Bedürfnisse des Handels weiter schritt alle Dinge den Zahlen vergleichend⁴⁾. Wir glauben an die Berechtigung der Verbindung des Namens des Pythagoras mit der musikalischen Zahlenlehre,

¹⁾ Diese Zeugnisse zusammengestellt bei Allman l. c. pag. 26. k.

²⁾ Proklus ed. Friedlein 426 τῶν μὲν ἱστορεῖν τὰ ἀρχαία βουλευμένων. Das Wort *ἱστορεῖν* besitzt bei Proklus nirgend eine spöttische Nebenbedeutung, man darf also nicht, wie es geschehen ist, übersetzen „die alte Geschichten erzählen wollen“. ³⁾ Diogenes Laertius VIII, 14. ⁴⁾ Stobaeus, Ecloga phys. I, 1, 6.

mag das Monochord von ihm herrühren |oder nicht, wir glauben, dass er hauptsächlich um die arithmetische Unterabtheilung der Geometrie sich bemüht habe¹⁾.

Ja wir gehen noch weiter und schreiben dem Pythagoras den Besitz einer mathematischen Erfindungsmethode zu, des mathematischen Experimentes, wie wir dieses Verfahren anderwärts genannt haben²⁾, womit freilich ebensowenig gesagt sein soll, dass das Bewusstsein ihm innewohnte darin eine wirkliche Methode zu besitzen, als dass er ihr Erfinder war, die er aus den in Aegypten gewonnenen Anschauungen jedenfalls leicht abstrahiren konnte, wenn er sie nicht fertig von dort mitbrachte.

Auf die persönliche Zuweisung sonstiger Dinge verzichten wir und werden im Folgenden von der Mathematik der Pythagoräer, nicht des Pythagoras reden. Freilich vergrössert sich dadurch der Zeitraum, dessen wissenschaftliches Bild wir zu gewinnen trachten, erheblich. Wenn auch nicht bis zu den letzten eigentlichen Pythagoräern, deren Thätigkeit auf 366 angesetzt wird³⁾, so doch bis vor Platon, etwa bis zum Jahre 400 erstreckt sich unserer Meinung nach die mathematische Thätigkeit des Pythagoräismus als solchem. Von seinen meistens namenlosen, mitunter an bestimmte Persönlichkeiten geknüpften Leistungen wissen wir aus verschiedenen theilweise späten, uns jedoch in den Dingen, für welche wir sie gebrauchen wollen, als zuverlässig geltenden Quellen.

Als solche Quelle betrachten wir vor allen Dingen den „Timäus“ überschriebenen Dialog des Platon. Timäus von Lokri war ein echter Pythagoräer, Platon dessen Schüler. Soll man nun annehmen, Platon habe diesem seinem Lehrer wissenschaftliche Aeusserungen in den Mund gelegt, die er nicht ganz ähnlich von ihm gehört hatte, er habe ihm insbesondere Mathematisches untergeschoben? Wir können einem solchen Gedanken uns nicht hingeben, können es um so weniger, als Platons eigene Abhängigkeit von den Pythagoräern in vielen Dingen durch einen so unverdächtigen Zeugen wie Aristoteles bestätigt wird. Die Philosophie Platons, sagt er⁴⁾, kam nach der pythagoräischen, in Vielem ihr folgend, Anderes eigenthümlich besitzend. Eine zweite wichtige Quelle liefert uns ein Werk des Theon von Smyrna⁵⁾. Dieser Schriftsteller lebte zwar erst um 130 n. Chr., also in einer Zeit, wo die Mythenbildung, die Pythagorassage, wie

¹⁾ Diogenes Laertius VIII, 12: *μάλιστα δὲ σχολάσαι τὸν Πυθαγόραν περὶ τὸ ἀριθμητικὸν εἶδος αὐτῆς* (sc. γεωμετρίας) *τόν τε νόμον τὸν ἐν μιᾷ χορδῇ εὑρεῖν*. ²⁾ Math. Beitr. Kulturl. 92. ³⁾ Zeller I, 288, Note 5. ⁴⁾ Aristoteles Metaphys. I, 6. ⁵⁾ *Theonis Smyrnaei philosophi Platonici expositio rerum mathematicarum ad legendum Platonem utilium*. Edid. Ed. Hiller. Leipzig, 1878.

man einigermaßen schroff sich ausgedrückt hat, in dem Leben des Pythagoras von Apollonius von Tyana, in den unglaublichen Dingen jenseits Thule von Antonius Diogenes, schon romanhafte Gestalt gewonnen hatte. Aber für die Dinge, für welche wir Theon gebrauchen wollen, war in einem Roman blutwenig zu schöpfen. Man lese doch das Leben des Pythagoras von Porphyrius, das ähnliche theilweise daran sich anlehrende Buch von Jamblichus, man lese was Diogenes Laertius von dem Leben des Pythagoras aufgespeichert hat, und man wird zwar unterhaltende Geschichtchen genug finden, Mathematisches aber nur in so weit als Laien mit mathematischen Wörtern um sich zu werfen im Stande sind, es sei denn, dass ältere Fachleute wie der Musiker Aristoxenus, der Rechenmeister Apollodorus als Gewährsmänner auftreten, zu welchen als Fachmann Jamblichus selbst hinzutritt, der uns in dieser Gestalt im 23. Kapitel begegnen wird. Was also Theon von Smyrna als pythagoräische mathematische Lehren hervorhebt, das muss aus ganz anderen nicht mythischen Schriften geschöpft sein, von welchen Porphyrius, Jamblichus in ihren Biographien des Pythagoras wenigstens in diesem Sinne keinen Gebrauch gemacht haben.

Wer freilich solche Schriften verfasste, und wie sie hiessen, das dürfte ein unlösbares Räthsel bleiben, wenn man auch versucht hat die zweite Frage zu beantworten¹⁾. Bei Jamblichus findet sich Folgendes²⁾: „Die Pythagoräer erzählen, die Geometrie sei so in die Oeffentlichkeit gelangt. Das Vermögen der Pythagoräer sei durch einen derselben verloren gegangen, und da habe man ihm gestattet, die Geometrie als Erwerbszweig zu benutzen.“ Daran schliesst sich die fast unverständliche Stelle: *Ἐκαλείτο δὲ ἡ γεωμετρία πρὸς Πυθαγόρου ἱστορία*, welche unser Gewährsmann übersetzt: „Die Geometrie wurde aber Ueberlieferung von Pythagoras genannt.“ So ansprechend die Vermuthung an sich klingt, scheint sie doch sprachlich nicht aufrecht erhalten werden zu können, es sei denn dass man annähme, zwischen *γεωμετρία* und *πρὸς* sei ein Artikel *ἡ* weggefallen, eine Annahme von grosser Kühnheit.

Die Benutzbarkeit des Theon von Smyrna gründet sich wesentlich auf dem ausgesprochenen Zwecke seines Werkes. Er will die zum Verständniss Platons und der Platoniker nöthigen Vorkenntnisse mittheilen. Er will dabei der Reihe nach die Arithmetik mit Inbegriff der musikalischen Zahlenverhältnisse, die Geometrie, die Stereometrie,

¹⁾ La géométrie Grecque, comment son histoire nous est parvenue et ce que nous en savons. Essai critique par Paul Tannery (Paris, 1887) pag. 81.

²⁾ De pithagorica vita (ed. Kiessling) 89 und Anse de Villoison, Anecdota Graeca II, 216 lin. 22—25.

die Astronomie, die Musik der Welten behandeln. Hier finden wir also hauptsächlich dasjenige in der Sprache des II. nachchristlichen Jahrhunderts vorgetragen, was von mathematischen Kenntnissen für das Studium Platons nothwendig ist. Das können aber vermöge der selbstverständlichen Thatsache, dass wissenschaftliche Anspielungen eines früheren Jahrhunderts nicht mit Hilfe der Errungenschaften eines späteren Jahrhunderts sich erklären, nur solche Kenntnisse sein, die nach Theons bestem Wissen den platonischen Schriften selbst geschichtlich voraus gingen, in ihnen zur Verwerthung kommen konnten. Da ferner Theon von Platon selbst sagt, er folge oft den Pythagoräern¹⁾, so wird seine Brauchbarkeit für uns hier vollends erhöht. Diese beiden Werke sind also unsere Hauptquellen. Wir werden zu ihnen auch noch aus anderen Schriftstellern da und dort einen geringen Zufluss erhalten, die sich, wie wir sehen wollen, zu einem ganz stattlichen Ganzen vereinigen.

Theon hat, sagten wir, zuerst die Arithmetik behandelt. Damit ist uns Gelegenheit geboten, eine ungemein wichtige Zweispaltung der Lehre von den Zahlen in's Auge zu fassen. Die ganze Mathematik zerfiel, nach Geminus²⁾, in zwei Haupttheile, deren Unterschied er darin erkannte, dass der eine Theil sich mit dem geistig Wahrnehmbaren, der andere sich mit dem sinnlich Wahrnehmbaren beschäftige. Geistigen Ursprungs ist ihm Arithmetik und Geometrie, sinnlichen Ursprungs dagegen Mechanik, Astronomie, Optik, Geodäsie, Musik, Logistik. Von den übrigen Theilen und dem, was Geminus des Weiteren über sie bemerkt, sehen wir ab. Arithmetik und Logistik erklärt er dahin, dass die Erstere die Gestaltungen der Zahl an und für sich betrachte, die Letztere aber mit Bezug auf sinnliche Gegenstände. Arithmetik ist ihm also eine theoretische, Logistik eine praktische Wissenschaft. Arithmetik ist ihm, um die heute gebräuchlichen Wörter anzuwenden, dass was seit Gauss höhere Arithmetik, seit Legendre Zahlentheorie genannt wird. Logistik ist ihm die eigentliche Rechenkunst.

Diese strenge Unterscheidung war allerdings in den Zeiten pythagoräischer Mathematik noch nicht zum Durchbruch gelangt. Die Pythagoräer stellten die beiden Fragen: Wie viel? und Wie gross?³⁾ In der Beantwortung beider trennten sie auf's Neue. Das eine Mal wurde die Vielheit an sich in der Arithmetik, die Vielheit bezogen auf Anderes in der Musik behandelt. Das andere Mal

¹⁾ Theon Smyrnaeus (ed. Hiller), pag. 12. ²⁾ Proklus ed. Friedlein, pag. 38. Vergl. auch Nesselmann, Algebra der Griechen, S. 40 fgg.

³⁾ Proklus ed. Friedlein 35—36.

bildete die ruhende Grösse den Gegenstand der Geometrie, die bewegte Grösse den Gegenstand der Sphärik.

Bei manchem Wechsel der sonstigen Systematik blieb die eigentliche Arithmetik vom VI. bis zum I. vorchristlichen Jahrhundert, von den Pythagoräern bis zu Geminus fast mit gleichem Inhalte ausgestattet, und dieser gleichartige Inhalt wahrte sich weiter, so lange überhaupt in griechischer Sprache über diesen Theil der Mathematik geschrieben wurde. Einiges kam natürlich im Laufe der zeitlichen Entwicklung hinzu. In die griechische Arithmetik drang ein, was wir jetzt Algebra oder Lehre von den Gleichungen nennen, soviel davon bekannt war. Ihr gehörte die Lehre von den nach bestimmten Gesetzen gebildeten Reihen und deren Summirung, ihr die Proportionenlehre an, wie sie nach und nach in weiterem und weiterem Umfang sich bildeten, aber niemals begriff die Arithmetik das eigentliche Rechnen unter sich.

Wir werden uns wohl der Wahrheit nähern, wenn wir annehmen, die Logistik, die Rechenkunst, sei erst allmählig als Gegenstand schriftlicher Unterweisung in Büchern behandelt worden. Sie verdankte vorher ihre unentbehrliche Verbreitung vorwiegend dem mündlichen Unterricht. Sie war allgemeines Bedürfniss, nicht Wissenschaft, und es mag lange gedauert haben, bevor es einem Rechenmeister einfiel, über den Inhalt seines Unterrichts sich schriftlich auszusprechen. Zu dieser Annahme gelangen wir von der Erwägung aus, dass eine Logistik bestand und uns quellenmässig gesichert ist, lange bevor wir von Büchern über dieselbe hören. Ihr Name kommt schon in einem platonischen Dialoge vor, wo die Logistik der Arithmetik gegenübergestellt ist¹⁾, und in einem anderen Dialoge des gleichen Verfassers ist von den Logistikern²⁾ die Rede.

Wenn wir bei der Betrachtung der pythagoräischen Mathematik von den arithmetischen Dingen ausgehen, so folgen wir nur der Aussage, welche in dieses Gebiet die wesentlichsten Leistungen des Pythagoras verlegt, und welche, selbst wenn ihr kein Gewährsmann von der Bedeutung des Aristoxenus Gewicht verliehe, in dem allgemeinen Bewusstsein, dass die der Arithmetik nächststehende Zahlensymbolik so recht eigentlich altpythagoräisch war, ihre Rechtfertigung finden könnte. Wir haben ein Beispiel pythagoräischer Zahlenmystik an früherer Stelle (S. 95) verwerthet. Ein anderes mag hier Platz finden, welches gleichfalls Plutarch uns aufbewahrt hat: Es haben sich aber wohl die Aegypter die Natur des Weltalls zunächst unter dem Bilde des schönsten Dreiecks gedacht; auch Platon in der Schrift

¹⁾ Platon, Gorgias 451, B. ²⁾ Platon, Euthydemus 290, B.

vom Staate scheint das Bild gebraucht zu haben, da wo er ein Gemälde des Ehestandes entwirft. Das Dreieck enthält eine senkrechte Seite von 3, eine Basis von 4 und eine Hypotenuse von 5 Theilen, deren Quadrat denen der Katheten gleich ist. Man kann nun die Senkrechte mit dem Männlichen, die Basis mit dem Weiblichen, die Hypotenuse mit dem aus beiden Geborenen vergleichen und somit den Osiris als Ursprung, die Isis als Empfängniss und den Horus als Erzeugniss denken¹⁾. Mit dem Vorbehalte auf diese nicht unwichtige Stelle zurückzukommen, benutzen wir sie hier nur als freilich spätes Beispiel pythagoräischer Zahlenspielerei, dem eine übergrosse Menge ähnlicher Dinge, Vergleichen von Zahlen mit einzelnen Gottheiten oder Vergleichen von Zahlen mit gewissen sittlichen Eigenschaften u. s. w. aus älterer und ältester Zeit zur Seite gestellt werden könnte²⁾, wenn die Geschichte der Mathematik neben dem allgemeinen Vergleiche mit babylonischen Gedankenfolgen einen besonderen unmittelbaren Nutzen daraus zu ziehen im Stande wäre. Allenfalls könnte dieses für einen Satz zutreffen, welcher, wie sich zeigen wird, durch Jahrhunderte sich forterbte, den Satz: dass die Einheit Ursprung und Anfang aller Zahlen, aber nicht selbst Zahl sei³⁾.

Wir werden bald sehen, dass die Pythagoräer es liebten auf Gegensätze ihr Augenmerk zu richten, und ein solcher Gegensatz war der zwischen Primzahlen und zusammengesetzten Zahlen. Ein alter Pythagoräer, Thymaridas von Paros⁴⁾ war es vermuthlich, der den Primzahlen den Namen der geradlinigen Zahlen, ἀριθμοὶ εὐθύγραμμοί, beilegte⁵⁾, jedenfalls im Gegensatze zu Flächenzahlen, von welchen auch noch in diesem Kapitel die Rede sein wird. Derselbe Thymaridas aber hat sich ein ausserordentlich viel grösseres Verdienst dadurch erworben, dass er ein Verfahren zur Auflösung gewisser Aufgaben erfand, welches von hoher Tragweite ist, und welches wir nach Jamblichus auseinandersetzen⁶⁾. Das Verfahren muss sehr verbreitet gewesen sein. Dafür bürgt ausser Gründen, welche im 29. Kapitel auf indischem Boden sich ergeben werden, der doppelte Umstand, dass Jamblichus es gradezu als eine

¹⁾ Plutarch, *De Iside et Osiride* 56. ²⁾ Eine reiche Sammlung von Stellen bei Zeller I, 334—345, namentlich in den Anmerkungen. ³⁾ Vergl. Aristoteles, *Metaph.* XIII, 8, ferner Nicomachus, *Eisagoge arithmet.* II, 4, 3 (ed. Hoche pag. 84) und am deutlichsten bei Theon Smyrnaeus (ed. Hiller) pag. 24: οὕτε δὲ ἡ μονὰς ἀριθμὸς, ἀλλὰ ἀρχὴ ἀριθμοῦ. ⁴⁾ Paul Tannery, *Pour l'histoire de la science Hellène* (Paris, 1887) pag. 382—386 über die Persönlichkeit des Thymaridas. ⁵⁾ Jamblichus Chalcidensis in *Nicomachi Geraseni arithmeticae introductionem* (ed. Tennulius 1668) pag. 36. ⁶⁾ Ebenda pag. 89. Diese verderbte und darum ungemein schwierige Stelle hat zuerst Nesselmann, *Algebra der Griechen* S. 232 fgg. richtig erklärt.

Methode, *ἐφοδος*, bezeichnet und es mit einem bestimmten Namen nennt, welcher demselben schon früher eigenthümlich gewesen zu sein scheint. Das Epanthem, d. h. die Nebenblüthe des Thymaridas besteht in Folgendem¹⁾: „Wenn (gegebene (*ὀρίσμενα*) und unbekannte (*ἀόριστα*) sich in eine gegebene theilen und eine von ihnen mit jeder anderen zu einer Summe verbunden wird, so wird die Summe aller dieser Paare nach Subtraktion der ursprünglichen Summe bei 3 Zahlen der zu den übrigen addirten ganz zuerkannt, bei 4 deren Hälfte, bei 5 deren Drittel, bei 6 deren Viertel und so fort.“ Damit ist gemeint, dass, wenn n Unbekannte $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ heissen, und wenn ausser ihrer Gesamtsumme $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = s$ die Summe der ersten Unbekannten x_1 mit jeder der folgenden Unbekannten einzeln gegeben ist, also $x_1 + x_2 = a_1, x_1 + x_3 = a_2, \dots, x_1 + x_n = a_{n-1}$, dass alsdann $x_1 = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} - s}{n - 2}$ sein muss.

Das ist, wie man sieht, vollständig gesprochene Algebra, welcher nur Symbole fehlen, um mit einer modernen Gleichungsauflösung durchaus übereinzustimmen, und insbesondere ist mit Recht auf die beiden Kunstausdrücke der gegebenen und unbekannten Grösse aufmerksam gemacht worden.

Genug die Pythagoräer, seit Gründung der Schule, beachteten die Zahlen und wussten verschiedene Gattungen derselben, so namentlich die graden und ungraden Zahlen, erstere als *ἄρτιοι*, letztere als *περὶσσοί*, zu unterscheiden²⁾. Diese Unterscheidung war so landläufig, dass zu Platons Zeit das Spiel „Grad oder Ungrad“ schon in Uebung war³⁾. Wir erinnern uns, dass auch den Aegyptern dieser Unterschied nicht entgangen war, wie wir aus der Einrichtung ihrer Zerlegungstabelle für Brüche schliessen durften (S. 27). Ob sie freilich bestimmte Namen für das Grade und für das Ungrade hatten, was zum vollen Bewusstsein dieser Zahlengattungen gehört, das schwebt so lange im Dunkel, als nicht ein ägyptisches theoretisches Werk entdeckt ist, dessen Nothwendigkeit zur Ergänzung des Uebungsbuches wir eingesehen haben. Letzteres enthält jedenfalls solche Namen nicht.

Die Pythagoräer sahen überdies in den graden und ungraden Zahlen Glieder von Reihen, nannten solche Reihenglieder *ὄροι* und besaßen vermuthlich in dem Worte *ἐκθεσις* auch einen Namen für den Begriff von Reihe selbst⁴⁾. Auch diese Thatsache kann

¹⁾ Wir benutzen die Uebersetzung Nesselmann's. ²⁾ *ὁ γὰρ μὲν ἀριθμὸς ἔχει δύο μὲν ἰδέα εἶδη περισσὸν καὶ ἄρτιον* heisst es in einem Fragmente des Philolaus. Vergl. Zeller I, 299, Anmerk. 1 und Chaignet I, 228. ³⁾ Platon, *Lysis* pag. 206. ⁴⁾ Vergl. Bienaymé in einer Notiz über zwei Stellen des

uns nicht in Erstaunen setzen, nachdem die Kenntniss der arithmetischen wie der geometrischen Reihe bei Aegyptern und Babyloniern, die Kenntniss der Summenformel für arithmetische Reihen mit Gewissheit, für geometrische Reihen als Möglichkeit bei den Aegyptern festgestellt werden konnte.

Mit den Reihen der graden und ungraden Zahlen wurden bei den Griechen — wir behaupten bei den Pythagoräern — nach den Zeugnissen des Theon von Smyrna mannigfache Summirungen vorgenommen. Man addirte die sämtlichen auf einander folgenden Zahlen der natürlichen Zahlenfolge von der 1 bis zu einem beliebig gewählten Endgliede und fand $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

die Dreieckszahl¹⁾. Man addirte die ungraden Zahlen für sich und fand $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$ die Quadratzahl, zu deren Erklärung man eben diese Entstehungsweise benutzte²⁾. Man addirte die graden Zahlen für sich, und fand $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1)$ die heteromeke Zahl³⁾, d. h. das Produkt zweier Faktoren, deren einer um die Einheit grösser ist als der andere, und welches eben dieses Grössersein der einen Zahl in seinen Namen aufnahm.

Wir haben hier arithmetische Erklärungen und Lehrsätze den Pythagoräern überwiesen, welche trotz ihres Vorkommens bei Theon von Smyrna, trotz der von uns vorausgeschickten allgemeinen Rechtfertigung der Benutzbarkeit seines Werkes für diese weit zurückliegende Zeit, einigermassen stutzig machen könnten. Da wir in unseren Folgerungen noch weiter zu gehen gedenken, so dürfte es nicht unzumässig sein, andere Beweisgründe für die Richtigkeit unserer Annahme hier einzuschalten, welche ein bedeutend älterer Schriftsteller von allseitig anerkannter Zuverlässigkeit, mit einem Worte, welche Aristoteles uns liefert. In dessen Metaphysik⁴⁾ finden wir die sogenannte pythagoräische Kategorientafel, in welcher zehn Paar Grundgegensätze aufgezählt werden, die der pythagoräischen Schule angehört haben. Diese heissen 1. Grenze und Unbegrenztes; 2. Ungrades und Grades; 3. Eines und Vieles; 4. Rechtes und Linkes; 5. Männliches und Weibliches; 6. Ruhendes und Bewegtes; 7. Gerades und Krummes; 8. Licht und Finsterniss; 9. Gutes und Böses; 10. Quadrat und Heteromekie. Wir dürfen vielleicht annehmen, dass unter dem dem 3. Paare die Primzahlen und zusammengesetzte Zahlen inbegriffen sind. Wir erkennen in den beiden mit 2. und mit 10. bezeichneten

Stobäus in den *Comptes rendus* der Pariser Akademie der Wissenschaften vom 3. October 1870.

¹⁾ Theon Smyrnaeus (ed. Hiller) 31. ²⁾ Ebenda 28. ³⁾ Ebenda 27 und 31. ⁴⁾ Aristoteles, Metaphys. I, 5, 6 vergl. Zeller I, 302, Anmerk. 3.

Paaren die Zusammengehörigkeit des Ungraden mit dem Quadrat, des Graden mit der Heteromekie, und sollte diese Zusammengehörigkeit nicht in der Entstehungsweise der Quadrate und der Heteromeken ihre vollgültige Begründung finden? Allerdings hat man, wie wir sehen werden, eine andere Erklärung gesucht, weshalb das 10. Paar, dessen Vorhandensein unter allen Umständen einer Rechtfertigung bedarf, weil seine Gegensätze nicht so scharf und natürlich sind, wie die der neun anderen Paare, Aufnahme gefunden habe. Wir sind nicht gewillt, jene andere Erklärung schon jetzt geradezu zu verwerfen, aber noch weniger auf die unsrige zu verzichten. Konnte es doch in der Tafel der Grundgegensätze, auf welche alle Erscheinungen zurückzuführen sind, nur erwünscht sein, durch ein Paar sofort zwei wesentlich verschiedene Beziehungen dargestellt zu wissen. Ist doch überdies mindestens die Entstehung des Quadrats als Summe der mit der Einheit beginnenden ungraden Zahlen wieder durch Aristoteles als echt pythagoräisch bezeugt¹⁾.

Aristoteles bedient sich dabei eines Wortes, welches für uns von grosser und vielfacher Wichtigkeit ist, des Wortes Gnomon. Was ist ein Gnomon? Wörtlich genommen ein Erkenner, und zwar bedeutete es zunächst einen Erkenner der Zeit, dann der senkrechten Stellung, welche der Stab, um als Schattenwerfer und Stundenzeiger Anwendung finden zu können, einnehmen musste. So wurde das Wort allmählig aus einem Kunstausdrucke der praktischen Astronomie zu einem solchen der Geometrie, und man sagte „die nach dem Gnomon gerichtete Linie“²⁾, wenn man von einer Senkrechten reden wollte. Der Sinn des Wortes veränderte sich aber nun noch weiter.

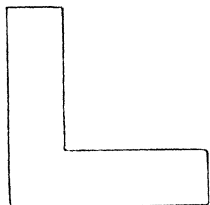


Fig. 20.

Ein mechanisch herzustellender rechter Winkel (Figur 20) wurde so genannt oder geometrisch ausgedrückt: Gnomon war das, was von einem Quadrat übrig blieb, wenn aus dessen einer Ecke ein kleineres Quadrat herausgeschnitten wurde. Diese Bedeutung des Wortes war bei den Pythagoräern gang und gebe. Den untrüglichen Beweis dafür liefert ein erhaltenes Bruchstück des Philolaus³⁾, eines Pythagoräers, dessen Lebenszeit so ziemlich gleich-

mässig von den Grenzen des Jahrhunderts zwischen 500 und 400 abstehen möchte. In noch späterer Zeit verschob sich die Bedeutung des Gnomon noch weiter. Euklid stellte um 300 die Definition

¹⁾ Aristoteles, Physic. III, 4. Vergl. Zeller I, 300 Anmerkung und Chaignet II, 61–62. ²⁾ Proklus ed. Friedlein 283, 9. ³⁾ Philolaus, des Pythagoreers Lehren nebst den Bruchstücken seines Werkes von Aug. Böckh. Berlin, 1819, Fragment 18, S. 141. — Chaignet I, 240.

auf, in einem Parallelogramme heisse ein jedes der um die Diagonale herumliegenden Parallelogramme mit den beiden Ergänzungen zusammen ein Gnomon¹⁾. Der Sinn dieser im Wortlaute nicht allzudeutlichen Erklärung ist folgender. Werden in einem Parallelogramme durch einen und denselben Punkt der Diagonale Parallellinien zu den beiden Seiten gezogen, so entstehen (Figur 21) zwei in unserer Figur wagerecht schraffierte Parallelogramme, und zwei in unserer Figur schräg schraffierte Ergänzungsdreieckchen. Diese vier kleinen Figuren zusammen bilden das euklidische Gnomon, eine Verallgemeinerung des älteren Begriffes insofern, als ein Stück aus einem Parallelogramme statt aus einem Quadrate herausgeschnitten wird, um es hervorzubringen. Noch etwas allgemeiner wird die Erklärung, welche nach weiteren zwei Jahrhunderten Heron von Alexandria gab: Alles was zu einer Zahl oder Figur hinzugefügt das Ganze dem ähnlich macht, zu welchem hinzugefügt worden war, heisst Gnomon²⁾. Doch auch diese letzte Verallgemeinerung knüpft wieder an alte Begriffe an, indem schon Aristoteles sagt, wenn man ein Gnomon um ein Quadrat herumlege, werde zwar die Grösse, aber nicht die Art der Figur verändert³⁾.

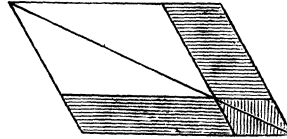


Fig. 21.

Nachdem wir erörtert haben, was ein Gnomon in der Geometrie bedeute, ist der Zusatz wohl leicht verständlich, dass in alten Zeiten die ungrade Zahl auch wohl Gnomonzahl genannt wurde. Denken wir uns nämlich ein Quadrat, dessen Seite n Längeneinheiten misst, und beabsichtigen wir dieses Quadrat zum nächstgrösseren mit der Seite von $n + 1$ Längeneinheiten durch Hinzufügung eines Gnomon zu ergänzen, so ist klar, dass dieses Gnomon bestehen wird aus einem Quadrätchen von der Seite 1 und aus zwei Rechtecken von den Seiten 1 und n , dass es also $1 + 2 \times n$ Flächeneinheiten besitzen wird, welche in der That die vorhandenen n^2 Flächeneinheiten des früheren Quadrates zu den $(n + 1)^2$ Flächeneinheiten des neuen Quadrates ergänzen. Das heisst in Zahlen: die Quadratzahl n^2 wird zur nächsten Quadratzahl $(n + 1)^2$, wenn man ihr die Gnomonzahl $2n + 1$ beifügt. So sind wir zum Verständniss der vorher angedeuteten Stelle der aristotelischen Physik gelangt⁴⁾, einem Verständniss, in welchem wir uns mit allen alten und neuen Erklärern zusammenfinden. Die Pythagoräer, sagt dort Aristoteles, hätten die Quadratzahlen gebildet,

¹⁾ Euklid, Elemente II, Definition 2. ²⁾ Heron Alexandrinus (ed. Hultsch) Definit. 59, pag. 21. ³⁾ Aristoteles, Categor. XIV, 5 und XI, 4. Vergl. Chaignet II, 62, Note 2. ⁴⁾ Aristoteles Physic. III, 4.

indem sie die Gnomonen allmählig zur Einheit hinzufügten. Das will eben nichts anderes heissen als (Figur 22) die Pythagoräer haben die Summirung $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$ vollzogen, haben dieses Verfahren mit klarer Einsicht in den darin zu Tage tretenden Gedanken ausgeübt.

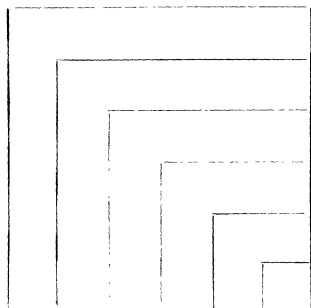


Fig. 22.

Sehen wir einen Augenblick von der arithmetischen Wichtigkeit des Satzes, der uns beschäftigt hat, ab, so ist er uns auch für die älteste Geometrie ein später noch zu verwerthendes Zeugniß. Er lässt uns erkennen, dass die Pythagoräer den Zusammenhang, welcher zwischen den Seiten eines Quadrates, eines Rechteckes und

deren Flächeninhalt stattfindet, mehr als nur ahnten, was freilich bei Schülern einer aus Aegypten eingewanderten Geometrie nicht verwundern kann. Er lässt uns ferner die Kenntniss der eigenthümlichen Figur des Gnomon beachten. Einen mechanisch herzustellenden rechten Winkel nannten wir oben diese Figur, und in der That ist das Alter dieses Werkzeuges gradezu sagenhaft. In Aegypten sind wir ihm (S. 63) auf der bildlichen Darstellung einer Schreinerwerkstätte begegnet und bei Plinius hat sich die Ueberlieferung erhalten, die Werkzeuge der Architekten, wie Axt, Säge, Bohrer, Setzwage rührten von Dädalus und dessen Neffen Talus her, welche vor dem trojanischen Kriege lebten, der rechte Winkel von Theodorus von Samos, einem der Erbauer des Tempels von Ephesus um das Jahr 600 etwa¹⁾.

Und noch Etwas lernen wir aus der pythagoräischen Begründung des Satzes von der Entstehung der Quadratzahlen: die Neigung zur geometrischen Versinnlichung von Zahlengrößen und deren Verknüpfungen, welche wir für griechische Eigenthümlichkeit halten, entsprechend dem viel und mit Recht gerühmten plastischen Sinne der Hellenen. Der erste Anstoss könnte ja, wenn man für Alles eine äussere Veranlassung suchen wollte, in der ägyptischen uns aus dem Uebungsbuche des Ahmes bekannten Gewohnheit den Figuren die Maasszahlen ihrer Längen, ihrer Flächen beizuschreiben gefunden werden, aber immerhin lässt das griechische Verfahren sich als einen Gegensatz zu diesem ägyptischen bezeichnen. Bei dem einen handelt es sich um die Möglichkeit geometrische Gebilde in Rechnung zu bringen, bei dem anderen um die Möglichkeit das Er-

¹⁾ Plinius, *Histor. natural.* VII, 56.

gebniss rechnender Ueberlegung den Sinnen erfassbar zu machen. Die Gnomonzahlen waren unter den bis hierher besprochenen nicht die einzigen, deren Versinnlichung die Pythagoräer sich angelegen sein liessen. Die Quadratzahlen selbst bilden ein anderes Beispiel, ein anderes die Heteromeken. Auf die Versinnlichung führen auch die Namen Flächen- und Körperzahlen zurück, zu deren pythagoräischem Vorkommen wir uns nunmehr wenden.

Im platonischen Timäus findet sich eine Stelle, welche etwa folgendermassen heisst: Um mit zwei Flächen eine geometrische Proportion zu bilden, deren äussere Glieder sie sein sollen, genüge es eine dritte Fläche als geometrisches Mittel anzusetzen; sollen aber zwei Körper die äusseren Glieder einer geometrischen Proportion sein, so müsse man zwei von einander verschiedene innere Glieder annehmen, weil ein geometrisches Mittel nicht vorhanden sei¹⁾.

Flächen und Körper können hier nur als Zahlen und zwar als Produkte von zwei beziehungsweise von drei Faktoren angesehen werden. Das heisst man wusste damals, dass im Allgemeinen das Maass einer Fläche, eines Körpers gefunden werde, indem man zwei, drei Abmessungen mit einander vervielfältigte. Die Erklärung von Flächen- und Körperzahlen als solcher Produkte ist ausgesprochen bei Euklid²⁾, sie ist ausgesprochen bei Theon von Smyrna³⁾. Beide bedienen sich der Namen *ἀριθμοὶ ἐπιτεδοὶ* für die Flächen-, *ἀριθμοὶ στερεοί* für die Körperzahlen, und der pythagoräische Ursprung derselben beweist sich aus der eben hervorgehobenen Thatsache, dass nur mit ihrer Hilfe die Timäusstelle zur Klarheit gelangt. Denken wir uns $p_1 p_2 p_3$, $q_1 q_2 q_3$ als sechs Primzahlen und jedenfalls keine von den Primzahlen p einer Primzahl q gleich. Nun ist $p_1 p_2$ eine Flächenzahl, $q_1 q_2$ eine zweite. Deren geometrisches Mittel lässt sich bilden, d. h. $\sqrt{p_1 p_2 q_1 q_2}$ ist rational ausziehbar, sofern $p_1 = p_2$ und zugleich $q_1 = q_2$. Die gefundene Proportion heisst unter Weglassung der in diesem Falle unnötig gewordenen Indices $p^2 : pq = pq : q^2$ und es genügte wirklich eine dritte Fläche als geometrisches Mittel anzusetzen, um mit den angegebenen beiden Flächen eine geometrische Proportion zu bilden, deren äussere Glieder sie sein sollten. Körperzahlen werden ferner sowohl $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$ als $q_1 \cdot q_2 \cdot q_3$. Deren geometrisches Mittel $\sqrt{p_1 p_2 p_3 q_1 q_2 q_3}$ ist aber nie rational, wenn die Vorschrift kein p einem q gleich werden zu lassen eingehalten wird, mögen die p und

¹⁾ *Études sur le Timée de Platon* par Th. H. Martin I, 91 und 337—345 und Hultsch in *Fleckeisen und Masius, Neue Jahrbücher für Philologie und Pädagogik*. Jahrgang 1873. Bd. 107, 493—501. ²⁾ Euklid VII, Definitionen 16 und 17. ³⁾ Theon Smyrnaeus (ed. Hiller), pag. 36—37 und häufiger.

die q je unter sich gleich oder verschieden sein. Durch zwei Mittelglieder dagegen lässt sich die Proportion in mannigfaltiger Weise ergänzen z. B. $p_1 p_2 p_3 : p_1 p_2 q_1 = q_2 q_3 p_3 : q_1 q_2 q_3$ oder $p_1 p_2 p_3 : p_1 p_3 q_2 = q_1 q_3 p_2 : q_1 q_2 q_3$ u. s. w. Im Timäus heisst das so: Sollten zwei Körper die äusseren Glieder einer geometrischen Proportion sein, so musste man zwei von einander verschiedene innere Glieder annehmen, weil ein geometrisches Mittel nicht vorhanden ist. Werden hier die p und die q wieder alle als unter sich gleich betrachtet und lässt man deshalb die Indices wieder weg, so entsteht $p^3 : p^2 q = p q^2 : q^3$ oder $p^3 : p q^2 = p^2 q : q^3$. Eine andere Auswahl von Mittelgliedern gibt es in diesem besonderen Falle nicht. Grade er hat sich auch anderweitig erhalten. Euklid beweist, dass zwischen zwei Quadratzahlen eine, zwischen zwei Kubikzahlen zwei mittlere Proportionale fallen¹⁾ und Nikomachus nennt diese beiden Sätze ausdrücklich platonisch²⁾, ohne Zweifel in Berücksichtigung der damals allgemein bekannten Timäusstelle.

Eben diese Stelle hat bei der ausführlicheren Besprechung noch erhöhte Bedeutsamkeit für uns gewonnen. Zwei wichtige Thatsachen gelangten dadurch zu unserem Bewusstsein, die eine dass der Begriff des Irrationalen der Schule des Pythagoras angehörte, die andere dass dieselbe Schule sich viel mit Verhältnissen beschäftigte. Auf den ersteren Gegenstand kommen wir im nächsten Kapitel bei Gelegenheit des pythagoräischen Lehrsatzes zu reden. Von den Verhältnissen handeln wir sogleich.

Wir sind nicht auf die Timäusstelle allein angewiesen, um die Analogien und Mesotäten, das sind die griechischen Namen für Verhältnisse und dabei auftretende Mittel, für die Pythagoräer in Anspruch zu nehmen. Ein bei Nikomachus aufbewahrtes Bruchstück des Philolaus³⁾ lässt den Würfel die geometrische Harmonie genannt werden, weil seine sämtlichen Abmessungen völlig gleich unter einander und somit in vollständigem Einklange seien. Dem entsprechend habe man den Namen harmonisches Verhältniss wegen der Aehnlichkeit mit der geometrischen Harmonie eingeführt. In der That spiegle sich dieses Verhältniss in jedem Würfel mit seinen 12 Kanten, 8 Ecken und 6 Flächen ab. Wir haben kaum nothwendig diese Stelle noch zu erläutern und zu bemerken, dass 6, 8, 12 in stetigem harmonischen Verhältnisse stehen, weil $\frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8} - \frac{1}{12}$.

¹⁾ Euklid VIII, 11 und 12. ²⁾ Nicomachus, Eisagoge arithm. II, 24, 6 (ed. Hoche), pag. 129. ³⁾ Nicomachus, Eisagoge arithm. II, 26, 2 (ed. Hoche), pag. 135. Vergl. Boekh, Philolaus fragm. 9, S. 87. Chaignet I, 233.

Ein bei Porphyrius erhaltenes Bruchstück des Pythagoräers Archytas¹⁾ spricht nicht nur von dem arithmetischen, dem geometrischen und dem harmonischen Mittel, er definirt sie gradezu, und zwar die beiden ersten in der heute noch gebräuchlichen Weise. Bei dem harmonischen Verhältnisse, fährt er fort, übertrifft das erste Glied das zweite um den gleichen Theil seiner selbst, wie dieses mittlere Glied das dritte um den Theil des dritten. In Buchstaben geschrieben heisst das: b ist harmonisches Mittel zwischen a und c , wenn $a = b + \frac{a}{n}$ und zugleich $b = c + \frac{c}{n}$. Wirklich folgt aus diesen beiden Gleichungen $\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{c}$ und daraus $\frac{1}{c} - \frac{1}{b} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a}$.

Jamblichus²⁾ führt die Kenntniss der drei stetigen Proportionen, der arithmetischen, geometrischen und harmonischen, auf Pythagoras und seine Schule zurück und lässt die musikalische Proportion, welche aus zwei Zahlen, deren arithmetischem und harmonischem Mittel sich bilde ($a : \frac{a+b}{2} = \frac{2ab}{a+b} : b$, z. B. $6 : 9 = 8 : 12$), durch Pythagoras aus Babylon, wo sie erfunden worden sei, zu den Hellenen bringen.

Es fällt nicht schwer das Auftreten der harmonischen Proportion auch von ägyptischen Anfängen aus zu erklären. War doch in der Bezeichnung der Stammbrüche durch ein Pünktchen über der den Nenner bildenden Zahl die Zumuthung, möchten wir sagen, mit enthalten, neben solchen Zahlen a, b, c , welche eine arithmetische Reihe darstellen, auch eben dieselben punktirt zu betrachten, und dann hatte man die harmonische Reihe, deren musikalische Bedeutung bei der Entstehung der Töne auf dem Monochorde wohl erst in zweiter Linie bemerkt worden sein mag. Allerdings ist andererseits nicht zu vergessen, dass im alten Aegypten eine Proportionenlehre noch nicht nachgewiesen hat werden können, dass arithmetische und geometrische Reihen wie in Aegypten so auch in Babylon bekannt waren, dass nur nach dem letzteren Orte Quadratzahlen und Kubikzahlen hinweisen. Wir erinnern ferner daran, dass Jamblichus sich genauer mit Chaldäischem beschäftigte (S. 103) und sind darum trotz der späten Zeit, in welche seine schriftstellerische Thätigkeit fällt, sehr geneigt diesen seinen Worten so weit Glauben zu schenken, als sie

¹⁾ Porphyrius ad Ptolemaei Harmonic. Vergl. Gruppe, Ueber die Fragmente des Archytas und der älteren Pythagoreer. Berlin, 1840, S. 94. Chaignet I, 282–283. ²⁾ Jamblichus, Introductio in Nicomachi arithmetica (ed. Tennulius), Arnheim, 1668, pag. 141–142 und 168.

alte gräkobabylonische Beziehungen betreffen. Auch mehr oder weniger auf Zahlenspielerei herauskommende Zahlenverknüpfungen, Vergleichung von Zahlen mit einzelnen Götterfiguren, das sind lauter Dinge, die den Babyloniern, die den Pythagoräern eigen sind. Dafür aber, dass wir alles in der pythagoräischen Schule von solchen Dingen Vorgetragene auch in ihr erfunden lassen sein sollten — der einzige Ausweg, wenn jede Verbindung mit Babylon verworfen wird — dafür erscheinen uns dieselben zu entwickelt. Solche arithmetische Kenntniss setzen eine ganze lange Vorgeschichte voraus. Die Ueberzeugung davon würde nun ungemein befestigt, wenn es wahr sein sollte, dass auch die befreundeten und vollkommenen Zahlen bereits der pythagoräischen Schule angehörten.

Befreundete Zahlen sind solche, wie 220 und 284, von welchen jede gleich der Summe der aliquoten Theile der anderen ist: $220 = 1 + 2 + 4 + 71 + 142$ und $284 = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110$. Jamblichus führt deren Kenntniss auf Pythagoras selbst zurück¹⁾. Man habe ihn befragt, was ein Freund sei, und er habe geantwortet: „Einer der ein anderes Ich ist, wie 220 und 284.“ Wir möchten freilich auf diese Behauptung wenig Gewicht legen und kein grösseres darauf, dass im IX. S. ein arabischer Gelehrter *Tābit ibn Kurra* für die Kenntniss der befreundeten Zahlen auf die Pythagoräer verwies²⁾. Letzterer kann sehr wohl seine Wissenschaft dieses Umstandes aus Jamblichus geschöpft haben, Ersterem kann vorgeschwebt haben, dass die Innigkeit der Freundschaften unter den Pythagoräern von jeher als kennzeichnend für diese Schule galt³⁾.

Vollkommene Zahlen sind solche, welche wie 6, 28, 496 der Summe ihrer aliquoten Theile gleich sind: $6 = 1 + 2 + 3$; $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$; $496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248$. Daneben unterscheidet man überschüssende und mangelhafte Zahlen, wenn die aliquoten Theile eine zu grosse beziehungsweise zu kleine Summe liefern, wie z. B. $12 < 1 + 2 + 3 + 4 + 6$; $8 > 1 + 2 + 4$. Euklid hat sich ausführlich mit den vollkommenen Zahlen beschäftigt⁴⁾. Theon von Smyrna hat den drei verschiedenen Gattungen seine Aufmerksamkeit zugewandt und dieselben als *ἀριθμοὶ τέλειοι*, *ὑπερτέλειοι*, *ἐλλειπείς* benannt⁵⁾. Man könnte demzufolge geneigt sein diese Begriffe als vorplatonische anzuerkennen, wenn nicht ein kaum zu beseitigender Gegengrund vor-

¹⁾ Jamblichus in Nicomach. arithm. ed. Tennulius pag. 47—48.

²⁾ Vergl. Woepcke im *Journal Asiatique*, IV. Série, T. 20 (Jahrgang 1852), pag. 420. ³⁾ Vergl. Zeller I, 271, Anmerkung 3. ⁴⁾ Euklid IX, 36. ⁵⁾ Theon Smyrnaeus (ed. Hiller) 45.

handen wäre. Plato versteht nämlich in einer berühmten Stelle seines Staates den Ausdruck vollkommene Zahl ganz anders¹⁾ und Aristoteles bezeichnet muthmasslich aus pythagoräischer Quelle die Zehn als vollkommene Zahl²⁾ wiederum nothwendig von einer ganz anderen Erklärung ausgehend. Diese beiden Gegenstände arithmetischer Grübeleien werden wir daher am Sichersten zwar Pythagoräern aber nicht solchen der alten Schule zuschreiben, sondern solchen, die in viel späterer Zeit den Namen und zum Theil auch die Forschungsweise derselben erneuerten.

Die Dreieckszahlen, sagten wir (S. 149) gestützt auf Theon von Smyrna, wurden von den Pythagoräern gebildet, indem sie versuchsweise die aufeinanderfolgenden Zahlen der mit 1 beginnenden natürlichen Zahlenreihe addirten. In diesem Namen Dreieckszahl zeigt sich auf's Neue der Hang zur figürlichen Versinnlichung der nach unserer heutigen Auffassung abstracten Zahlenbegriffe. Die aufeinanderfolgenden Zahlen nämlich durch gleich weit von einander entfernte Punkte reihenweise untereinander zur Darstellung gebracht bildeten Dreiecke, und dass man diese Versinnlichung wirklich vornahm, mag man zu ihr gelangt sein wie man wolle, dafür bürgt eben der Name Dreieckszahl, ἀριθμὸς τρίγωνος. Es ist vielleicht wünschenswerth noch von anderer Seite her zu bestätigen, dass wir hier wirklich Alterthümliches vor uns haben, und dazu sind wir in der Lage. Wenig Gewicht freilich legen wir für diese Rückdatirung auf den an sich interessanten von Plutarch uns erhaltenen Lehrsatz, dass die mit 8 vervielfachten und um 1 vermehrten Dreieckszahlen Quadratzahlen gaben³⁾ d. h. dass $8 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + 1 = (2n+1)^2$. Erheblicher ist schon das, was Lucian uns erzählt⁴⁾. Pythagoras habe Einen zählen lassen. Dieser sagte: „1, 2, 3, 4“, worauf Pythagoras dazwischen fuhr: Siehst du? Was du für 4 hältst, das ist 10 und ein vollständiges Dreieck und unser Eidschwur! Hierin ist die Kenntniss der Dreieckszahl 10 mit echt pythagoräischen Dingen in Verbindung gesetzt. Weit älter und dadurch noch überzeugender ist das Vorkommen des Begriffes wenn nicht des Wortes bei Aristoteles: Die Einen führen die Zahlen auf Figuren wie das Dreieck und Viereck zurück⁵⁾. Kommt nun endlich noch hinzu, dass einem Schüler des Sokrates und des Platon, dem Philippus Opuntius, bereits eine

¹⁾ Plato Republ. VIII, pag. 546. Vergl. einen Aufsatz von Th. H. Martin in der *Revue Archéologique* T. XIII. ²⁾ Aristoteles Metaphys I, 5.

³⁾ Plutarch, *Platonicae Quaestiones*, V, 2, 4. ⁴⁾ Lucian *Βίων πρώσις*, 4. Vergl. Allman, *Greek Geometry from Thales to Euclid* pag. 28 r. ⁵⁾ Aristoteles, *Metaphys.* XIV, 4.

Schrift über vieleckige Zahlen zugeschrieben wird, welche er nebst einer anderen über Arithmetik bei Philipp von Macedonien verfasst haben soll¹⁾, so scheint uns damit der Beweis geliefert, dass wie die Quadratzahl und ihre Entstehung aus den ungraden, wie die heteromeke Zahl und ihre Entstehung aus den graden, so auch die Dreieckszahl und ihre Entstehung aus den unmittelbar auf einander folgenden Zahlen bereits pythagoräisch gewesen sein müsse.

Bei diesen drei Summirungen von nach einfachen Gesetzen fortschreitenden Zahlen blieb man aber, wie uns berichtet wird, nicht stehen. Man schrieb die Reihe der Quadratzahlen, von der 1 an, man schrieb darunter aber erst von der 3 anfangend die ungraden Zahlen, und wenn man nun jede solche ungrade Zahl der zugehörigen Quadratzahl als Gnomon zufügte, so entstanden wieder Quadratzahlen²⁾. Für uns heute fällt freilich diese Entstehungsweise:

$$\begin{array}{r} 1 \quad 4 \quad 9 \dots n^2 \\ 3 \quad 5 \quad 7 \dots 2n + 1 \\ \hline 4 \quad 9 \quad 16 \dots (n + 1)^2 \end{array}$$

mit der ersterläuterten Bildung der Quadratzahlen zusammen, aber den Alten war sie besonderer Hervorhebung werth. Nikomachus, ungefähr Zeitgenosse des Theon von Smyrna, und ihm geistesverwandt, hat ein Beispiel ähnlichen Verfahrens bei Dreieckszahlen uns bewahrt³⁾. Jede Dreieckszahl, sagt er, mit der nächstfolgenden Dreieckszahl vereinigt gibt eine Quadratzahl, und wirklich ist $\frac{(n-1)n}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = n^2$. Hier wagen wir nun, gestützt auf alle diese einander ähnlichen Verfahren, eine unmittelbar nicht auf Ueberlieferung sich stützende Vermuthung⁴⁾. Wir nehmen an, es sei auch die Addition von je zwei auf einander folgenden Quadratzahlen vorgenommen worden, um wie in den vorher erwähnten Beispielen einmal zuzusehen, ob dabei etwas Bemerkenswerthes sich enthülle. In der That fand sich ein höchst auffallendes Ergebniss: Die Quadratzahlen 9 und 16 lieferten als Summe die nächste Quadratzahl 25, und nur bei ihnen zeigte sich diese Erscheinung. Dem heutigen Mathematiker ist Solches freilich nicht auffallend. Wir erkennen sofort, dass die Gleichung $(x-1)^2 + x^2 = (x+1)^2$ nur die Wurzeln $x = 4$ und $x = 0$ besitzt, dass also nur $3^2 + 4^2 = 5^2$ auftreten kann, wenn man $(-1)^2 + 0^2 = 1^2$ oder anders geschrieben

¹⁾ *Βιογραφοί, vitarum scriptores Graeci minores* edit. Westermann. Braunschweig, 1845, pag. 446. ²⁾ Theon Smyrnaeus (ed. Hiller) 32. ³⁾ Nicomachus, *Eisagog. arithm.* II, 12 (ed. Hoche), pag. 96. ⁴⁾ Math. Beitr. Kulturl. 105–107.

$0 + 1 = 1$ nicht beachten will. Aber der Grieche jener alten Zeit konnte diese Ueberlegung nicht anstellen, konnte, wenn sie ihm möglich gewesen wäre, die zweite Gleichung nicht denken. Wir kommen auf den Zahlenbegriff der Griechen noch zurück. Gegenwärtig wissen wir nur, dass die Null, für welche sie kein Zeichen hatten, ihnen auch keine Zahl war. Wir sind darüber auf's Deutlichste durch einen der schon genannten Arithmetiker unterrichtet. Nikomachus sagt uns, jede Zahl sei die halbe Summe der zu beiden Seiten gleich weit von ihr abstehenden Zahlen; nur die Einheit bilde eine Ausnahme, weil sie keine zwei Nachbarzahlen besitze; sie sei darum die Hälfte der einen unmittelbar benachbarten Zahl¹⁾.

So mussten die Zahlen 9, 16, 25 und mit ihnen die Zahlen 3, 4, 5, deren Quadrate sie waren, welche ihre Ordnungszahlen in der Reihe der Quadratzahlen bildeten, der Aufmerksamkeit empfohlen sein, um so dringender empfohlen sein, wenn dieselben Zahlen schon anderweitig als mit merkwürdigen Eigenschaften versehen bekannt waren. Dass dem so war, darüber müssen wir uns jetzt zu vergewissern suchen.

7. Kapitel.

Pythagoras und die Pythagoräer. Geometrie.

Wir sind an dem Punkte angelangt, wo wir die nur im Bilde geometrische Arithmetik der Pythagoräer mit ihrer eigentlichen Geometrie in Verbindung treten sehen. Wir haben demgemäss auch auf diesem Gebiete abzusuchen, was unmittelbare oder mittelbare Ueberlieferung dem Pythagoras und seiner Schule zuweist.

Zunächst können wir eine ganze Gruppe von geometrischen Kenntnissen zusammenfassen unter dem gemeinsamen Namen der Anlegung der Flächen. „Alterthümlich, so sagen die Schüler des Eudemus, und Erfindungen der pythagoräischen Muse sind diese Sätze, die Anlegung der Flächen, ihr Ueberschiessen, ihr Zurückbleiben,“ *ἡ τε περὶ ἀβολὴ τῶν χωρίων καὶ ἡ ὑπερβολὴ καὶ ἡ ἔλλειψις*²⁾. So lautet der erläuternde Bericht des Proklus zu der euklidischen Aufgabe an einer gegebenen Graden unter gegebenem Winkel ein Parallelogramm zu entwerfen, welches einem gegebenen Dreieck gleich sei. Desselben Wortes *ἐλλείπειν* bei Anlegung von Flächen bedient sich Platon in seinem Menon³⁾, und Plutarch lässt an einer Stelle

¹⁾ Nicomachus, *Eisagog. arithm.* I, 8 (ed. Hoche), pag. 14. ²⁾ Proklus (ed. Friedlein) 419. ³⁾ Platon, *Menon* pag. 87.