

mögliche Wege, wie man zur Entdeckung der Inkommensurabilität gelangen konnte, ja geradezu auf sie gestoßen werden mußte, aufweisen lassen.

2118
Fritz, van K.
1971

4. Die Pythagoreer. Zahlenmystik und exakte Mathematik.

Die Philosophie des Pythagoras (ca. 570—ca. 480 v. Chr.) scheint in vieler Hinsicht einen ganz anderen Ursprung und einen ganz anderen Charakter zu haben als diejenige der bisher betrachteten Philosophen. Sie enthält starke religiöse und „mystische“ Elemente, was das Mißtrauen mancher Wissenschaftshistoriker erregt, ob daraus etwas Wissenschaftliches hervorgegangen sein könne, obwohl doch derartige Verbindungen in Zeiten des Übergangs auch sonst keineswegs selten gewesen sind.

Die Pythagoreische Lehre, die, wenn irgendeine, für die Entwicklung der Wissenschaft relevant geworden ist, ist die Lehre, die ihren lapidarsten Ausdruck gefunden hat in dem Satz „Alle Dinge sind Zahl“ oder in anderen Variationen: „alle Dinge sind aus Zahlen zusammengesetzt“ oder „die Zahlen sind das Wesen der Dinge“ etc.⁸⁸. Wie einige der früher erwähnten Theorien ist auch dies seinem Ursprung nach eine gewaltige Verallgemeinerung aufgrund zunächst sehr beschränkter Beobachtungen. Es hat aber auch, wie leicht zu sehen ist, eine gewisse Beziehung zu dem zuerst in Verbindung mit Hekataios von Milet auftretenden Problem, wieweit die für die menschliche Erkenntnis unentbehrlichen regelmäßigen Strukturen sich in den Dingen selbst auffinden lassen oder ihnen, um sie für die menschliche Erkenntnis faßbar zu machen, künstlich aufgelegt werden müssen.

In concreto sprechen jedoch sowohl die antike Überlieferung wie auch die älteste in der weiteren Ausbildung der Lehre gebrauchte Terminologie dafür, daß der erste Anstoß zu der Lehre von der Musik ausgegangen ist, von der Beobachtung nämlich, daß bestimmte, für das Ohr besonders angenehm und harmonisch klingende Tonkombinationen durch Saiten gleicher Art erzeugt werden, deren Längen in ganz einfachen Zahlenverhältnissen zueinander stehen, sowie daß dieselben Töne und Tonkombinationen sich auch mit Hilfe anderer Instrumente, bei denen dieselben

⁸⁸ Die wichtigsten Zeugnisse sind Aristoteles Metaphysik A 5, 985 b, 23 ff.; I 2, 1053 b, 12/13; und M 4, 1078 b, 21 ff. Für weitere Zeugnisse und ihre Interpretation vgl. meinen Artikel „Pythagoreer“ in der RE, XXIV, Sp. 250.

Zahlenkombinationen wiederkehren, erzeugen lassen. In der ältesten Überlieferung wird häufig das Verhältnis im mathematischen Sinne statt mit dem später vorwiegenden, für den Sinn der Lehre sehr aufschlußreichen Wort λόγος mit διάστημα bezeichnet, was eigentlich „Abstand“ bedeutet. Die Glieder der Proportion heißen bis in die spätesten Zeiten der griechischen Mathematik ὅροι, was eigentlich „Grenzen“ bedeutet. Das ist aus der reinen Mathematik gar nicht zu erklären, wohl aber aus der Anwendung der Proportionslehre auf die Musik, wo die Zahlenverhältnisse den Intervallen auf der Tonskala entsprechen und die Glieder der Proportionen den Tönen als den Grenzen der Intervalle. Was andererseits über die Beobachtungen erzählt wird, durch die Pythagoras auf seine Lehre gebracht worden sein soll, scheint öfter mit den akustischen Gesetzen nicht übereinzustimmen und daher ins Reich der Legende verwiesen werden zu müssen. In einigen Fällen läßt sich jedoch zeigen, daß die Nichtübereinstimmung mit den Gesetzen der Akustik daran liegt, daß die modernen entsprechenden tonerzeugenden Gegenstände anders gebaut sind als die entsprechenden antiken, so daß für die letzteren ein der Überlieferung approximativ entsprechendes Ereignis doch möglich ist⁹⁹. Jedenfalls ist kaum ein Zweifel daran möglich, daß akustische Beobachtungen bei der Entstehung der Pythagoreischen Zahlenlehre eine entscheidende Rolle gespielt haben und daher Proportionen am Anfang dieser Lehre stehen.

Zu diesen akustischen Beobachtungen kam aller Wahrscheinlichkeit nach im allerersten Stadium der Entwicklung der Lehre die sachlich mit dem sog. Pythagoreischen Lehrsatz zusammenhängende Kenntnis der

⁹⁹ Die dem Pythagoras und dann wieder dem um die Mitte des 5. Jhdts. v. Chr. lebenden Hippasos von Metapont zugeschriebenen Beobachtungen und Experimente mit Ton oder Musik erzeugenden Instrumenten sind in neuerer Zeit vielfach als Erfindungen der antiken Überlieferung erklärt worden, weil sie akustisch unmöglich sind oder jedenfalls nicht die berichteten Resultate ergeben. Für einiges mag dies zutreffen. Auf der anderen Seite ist aber auch manches offenbar mit der Zeit nicht mehr richtig verstanden oder falsch ausgelegt worden. Die Geschichte z. B., nach der Pythagoras, als er an einer Schmiede vorbeiging, zwischen den von den Hämmerern auf dem Amboß hervorgebrachten Tönen den Unterschied einer Oktave beobachtet haben und dann eine Beziehung zur Größe der Hämmer hergestellt haben soll (wieweit die weiteren genaueren Angaben über eben diese Größe richtig sind, ist eine andere Frage), hätte mit einer modernen Schmiede nicht passieren können. Nach von Professor Krämer in München auf Anregung von Baudirektor Hertwig angestellten Versuchen ist die Geschichte ihrer Grundvoraussetzung nach durchaus möglich, wenn man, wie in der Antike, einen in Holz eingelassenen, daher nicht tönenden Amboß und Hämmer mit Metallstielen statt der modernen Holzstiele, die die Hämmer am Schwingen verhindern, verwendet.

Tatsache, daß, wenn man drei Stöcke oder gerade Strecken, deren Längen im Verhältnis von 3, 4, 5 zueinander stehen, zu einem Dreieck zusammenfügt, ein rechtwinkliges Dreieck von einer gewissen Form entsteht, ohne daß dabei die absolute Größe des Dreiecks oder der es konstituierenden Seiten eine Rolle spielt. Das konnte leicht zu der weiteren Feststellung führen, daß, wenn man drei Stöcke, die in irgendeinem Längenverhältnis zueinander stehen (vorausgesetzt, daß die Summe der Längen von zweien von ihnen größer ist als die Länge des dritten), zusammenfügt, unabhängig von der absoluten Länge der Stöcke, „ähnliche“, d. h. gestaltgleiche Dreiecke oder, wie man in der ältesten Zeit zu sagen pflegte, bei gleichem Längenverhältnis der Stöcke „das selbe Dreieck“, wenn auch in verschiedener Größe, entsteht. Endlich scheint die Beobachtung, daß die Umläufe der Gestirne regelmäßig und ihr Verhältnis zueinander bis zu einem gewissen Grade zahlenmäßig faßbar ist, bei der Ausbildung der in einem so ungeheuer allgemeinen Satz formulierten Lehre eine Rolle gespielt zu haben.

Der älteste und primitivste Sinn der Lehre scheint also zu sein, daß in den Dingen gewissermaßen Zahlenbündel stecken, durch deren Kenntnis man die Dinge zu fassen bekommen kann. Dieses Zufassenbekommen aber hat offenbar — und dies ist von grundlegender Bedeutung — einen doppelten, d. h. einen theoretischen und einen praktischen Sinn. Das Zahlenbündel, woraus dann bei der fortschreitenden Mathematisierung der Lehre das Verhältnis der Zahlen zueinander im mathematischen Sinne wird, wird von sehr früh an „Logos“ genannt. Logos heißt Sprache oder Wort, und zwar in dem Sinne, daß durch das Wort im Sinne von Logos das Wesen des Dinges eigentlich bezeichnet wird als durch seinen Namen (ὄνομα), der ihm sozusagen von außen gegeben wird. Wenn also die in den Dingen steckenden Zahlenbündel als λόγοι bezeichnet werden, so wird dadurch zum Ausdruck gebracht, daß auf diese Weise mehr und Wesentlicheres über das durch diese Zahlenbündel bezeichnete Ding mitgeteilt wird als wenn es nur mit seinem Namen bezeichnet würde. Zugleich kann man aber ein Dreieck von bestimmter Gestalt, wenn man die in ihm steckenden Zahlen kennt, jederzeit in beliebiger Größe mit Leichtigkeit herstellen, ebenso wie man aufgrund einer analogen Kenntnis „die selben“ Töne und Tonkombinationen in verschiedenen (oktav-)Höhen, aber auch mit verschiedener Klangfarbe und mit verschiedenen Instrumenten wiedererzeugen kann. Endlich ist die Kenntnis der Zahlen, die in einem Ding stecken, im eminenten Sinne eine Erkenntnis, die sich ohne jeden Verlust von einem Menschen auf einen anderen übertragen und

also auch unbeschränkt konservieren läßt. Hier also, bei einer Spekulation, die von Anfang an auf mathematische, bzw. quantitative Analyse der Welt gerichtet war, liegen weit mehr noch als bei den früher behandelten Philosophien der frühgriechischen sog. „Physiker“ (φυσικοί), Thales, Anaximander und Anaximenes, die Anfänge einer akkumulierbaren und in gewisser Weise auf die praktische Bewältigung der Dinge gerichteten Wissenschaft im modernen Sinn.

Zunächst freilich wurden diese Ansätze in zwei auseinanderstrebenden Richtungen weiterentwickelt: in die Richtung einer zügellosen und oft ins Phantastische ausschweifenden Spekulation und in die Richtung der mathematischen Präzisierung. Pythagoras selbst, von dem diese Philosophie ausgegangen war, war ja nicht nur ein Philosoph, sondern auch ein Mystiker und ein religiöser und sittlicher Reformator. So ist es nicht zu verwundern, daß, ausgehend von der auf einem ziemlich beschränkten Gebiete gewonnenen Überzeugung, daß sich alles müsse in Zahlen fassen lassen, nun auch nach der Zahl der Tugend oder der Gerechtigkeit, oder der Ehe gesucht wurde⁹⁹. Tycho Brahe, einer der sorgfältigsten astronomischen Beobachter aller Zeiten, hat, soweit sich erkennen läßt, sehr ernsthaft an die Astrologie geglaubt und diese selbständig weiter zu fördern gesucht. Kepler hat offenbar nicht mehr daran geglaubt, aber im Dienste seiner Auftraggeber trotzdem eifrig Horoskope gestellt. Ähnliche Kombinationen zwischen Anfängen der Wissenschaft und unkontrollierter Spekulation finden sich bei Paracelsus. Die Tatsache, daß es noch zu Beginn des 4. Jhdts. einen pythagoreischen Philosophen, Eurytos, gegeben hat, der die dem Menschen oder dem Pferde zugrundeliegende Zahl dadurch zu ermitteln suchte, daß er zusah, wie viele Steinchen man brauchte, um den erkennbaren Umriss eines Menschen oder Pferdes zusammenzusetzen, oder daß noch Jahrhunderte lang Pythagoreer über die mannigfachen Bedeutungen der Siebenzahl oder der Dreizahl oder der Tetraktys spekulierten, beweist nicht, daß es nicht in derselben Schule Männer gegeben haben kann, die von denselben allgemeinen Überzeugungen ausgehend vielmehr zu mathematischer Präzision zu gelangen suchten.

Auch an einem Mittel- und Bindeglied zwischen der wilden Zahlenspekulation und der wissenschaftlichen Mathematik, einem Mittelglied,

⁹⁹ Aristoteles, Metaphysik M 4, 1078 b, 21. Der selbe Aristoteles sagt Metaphysik A 5, 985 b, 24 ff., die Pythagoreer seien von mathematischen Betrachtungen aus zu ihrer Lehre „Alles ist Zahl“ gekommen.

das besonders reich und detailliert für die frühen Pythagoreer bezeugt ist, fehlt es nicht. Dies ist die Lehre von den Polygonalzahlen und später auch von den körperlichen Zahlen (Pyramidalzahlen mit dreieckiger Basis, mit quadratischer Basis etc.; Kubikzahlen, ziegelförmige, altarförmige Zahlen etc.). Während in der ältesten Zeit z. B. der Tetraktys, der Summe der durch Punkte dargestellten und in der Form eines Dreiecks angeordneten Zahlen von eins bis vier, alle Arten von mystischen Bedeutungen zugeschrieben wurden und mit den Zahlen dieser Art noch auf Jahrhunderte hinaus von vielen Pythagoreern mathematisch unfruchtbare Spielereien getrieben wurden, sind aus der genaueren Analyse dieser Zahlen, die alle Reihen verschiedener Art darstellen, doch schon in früher Zeit, wahrscheinlich seit der zweiten Hälfte des 5. Jhdts., auch einige zahlentheoretische, noch heute interessante Ergebnisse abgeleitet worden, wenn auch erst Diophant viele Jahrhunderte später die Lehre von den Polygonalzahlen als Ganze auf eine neue, im heutigen Sinne wissenschaftliche Basis gestellt hat.

Die bedeutendste Präzisierung hat jedoch die pythagoreische Zahlenlehre zunächst in der schon ganz früh einsetzenden Entwicklung der Proportionenlehre gefunden. Verschieden große Dreiecke, deren Seiten sich wie 3, 4 und 5 verhalten, haben die gleiche Gestalt und den gleichen Logos, d. h. dasselbe inhärente Zahlenbündel, durch das man die Gestalt bezeichnen und mit dessen Hilfe man diese gleiche Gestalt jederzeit exakt reproduzieren kann. So wird der Ausdruck $\delta \alphaὐτὸς \lambda \acute{o} \gamma \omicron \varsigma$ = „der selbe Logos“ zur Bezeichnung der Proportion. Es läßt sich aber auch leicht zeigen, daß gleiche Multiple der gleichen Zahlen sich verhalten wie die Zahlen selbst. Aufgrund dieser Tatsache wiederum läßt sich leicht zeigen, daß sich Verhältnisse von Brüchen durch Multiplikation mit den Nennern in Verhältnisse von ganzen Zahlen umwandeln lassen⁹¹. Daraus

⁹¹ Das Prinzip der alten Pythagoreer, Brüche durch ganzzahlige Verhältnisse zu ersetzen, wird sehr schön illustriert durch eine Stelle in Platons Staat, VI 525 D/E, wo es heißt: „du weißt ja, wie diejenigen, die sich auf solche Dinge verstehen, sich darüber lustig machen, wenn jemand in Gedanken die Einheit zerstückelt, und das nicht gelten lassen. Und wenn du die Einheit zerstückelst, dann werden sie vervielfachen, indem sie sich vorsehen, daß nicht die Einheit als etwas erscheint, das nicht eins ist, sondern viele Teile.“ Wenn Burkert a. O. dagegen einwendet, daß selbst bei Archytas in der Pythagoreischen Musiklehre noch von rationes superparticulares die Rede sei, also von einer Art von Brüchen, so bestätigt dies nur, daß die Pythagoreische Zahlenlehre ursprünglich von der Musik ausgegangen ist und sich in dieser noch etwas von der ursprünglichen Terminologie und von den anfänglichen Problemen erhalten hat. Zugleich ist der Übergang zu der reinen Proportionallehre gerade in dem Satz des Archytas über die rationes superparticulares

entwickelt sich die Proportionenlehre für ganze Zahlen, die zusammen mit zahlentheoretischen Untersuchungen, die von der Betrachtung der erwähnten Gestaltzahlen ausgingen⁹², den Hauptinhalt der arithmetischen Bücher in den Elementen Euklids bildet. In ihren allerersten Anfängen tat diese Entwicklung wahrscheinlich dem Glauben Vorschub, daß alle Dinge mit Hilfe von Zahlen, worunter zunächst naturgemäß natürliche, d. h. ganze Zahlen verstanden wurden, bzw. durch Verhältnisse von ganzen Zahlen, faßbar seien, mit anderen Worten: eben der für Pythagoras und die Pythagoreer bezeugten Lehre „Alles ist Zahl“ in ihrem natürlichen Sinn.

Der letzte Schritt zur Wissenschaft im modernen Sinn wird aber auch hier getan durch den Versuch der Verifikation. Daß man mit Hilfe von Zahlen und Proportionen, wenn man sie richtig anwendet, gleichartige Gebilde erzeugen kann, bewährt sich überall. Aber umso mehr erhebt sich die Frage, welche Zahlen in Gebilden und Gestalten stecken, welche auf andere Weise vorgegeben sind, wie etwa das Quadrat, das wegen seiner regelmäßigen Gestalt bei den Pythagoreern eine große Rolle spielte, oder das regelmäßige Fünfeck, bzw. das durch Verlängerung der Seiten des regelmäßigen Fünfecks bis zu ihrem Schnittpunkt entstehende sog. Pentagramm, das den Pythagoreern als Erkennungszeichen diente. Das hätte man nun durch Ausmessen herauszufinden versuchen können, wobei sich freilich mit zunehmender Genauigkeit der Ausmessung die Zahlen immer wieder verändern mußten. Das Bedeutsame ist jedoch, daß sich die Pythagoreer eben nicht wie ihre babylonischen Vorgänger mit Approximationen begnügten, sondern es exakt wissen wollten. Das führte — am wahrscheinlichsten am regelmäßigen Fünfeck⁹³, aber es gibt auch an-

sehr schön zu sehen. Vgl. auch den Nachtrag zu dem Wiederabdruck meines Aufsatzes über Platon, Theaetetus und die antike Mathematik, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, Reihe Libelli CCLVII (1969), S. 76 ff. mit Anm. 15.

⁹² Vgl. darüber O. Becker in: Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Bd. III, S. 533 ff. und B. L. Van der Waerden in: Mathematische Annalen CXX (1947—49), S. 127—53 und 676—700.

⁹³ Für einen Versuch, den mutmaßlichen Beweis des Hippasos am regelmäßigen Fünfeck zu rekonstruieren, sowie für den Nachweis, daß zur Zeit des Hippasos ein völlig strikter Beweis geführt werden konnte, für den nicht mehr an mathematischen Sätzen erforderlich war als was durch die antike Mathematikgeschichte schon dem Thales zugeschrieben wird, vgl. unten S. 545 ff. O. Becker hat später den Beweis geführt, daß man auch ausgehend von der pythagoreischen $\psi\eta\kappa\omega\iota$ -Mathematik zu einem verhältnismäßig einfachen Beweis der Inkommensurabilität gelangen kann. Überall zeigt sich daher, daß gerade die Pythagoreische Zahlenlehre Anlaß zu Betrachtungen geben mußte, die zu der Entdeckung der Inkommensurabilität

dere Möglichkeiten, und darauf, wie die Entdeckung zuerst erfolgt ist, kommt hier nichts an — zu der überraschenden Entdeckung, daß an scheinbar so einfachen Gebilden wie dem Quadrat und dem regelmäßigen Fünfeck das Verhältnis zwischen Seite und Diagonale und damit z. B. auch am gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreieck das Verhältnis der Länge der Katheten zur Länge der Hypotenuse sich überhaupt nicht durch das Verhältnis zwischen zwei noch so großen Zahlen ausdrücken ließ, d. h. zur Entdeckung der Inkommensurabilität, für die dann bald auch andere Beispiele gefunden wurden.

Wenn aber in dem gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreieck z. B. das Verhältnis der Seiten zueinander nicht in ganzen Zahlen ausgedrückt werden kann, solche Zahlen aber nach der pythagoreischen Grundlehre „Alles ist Zahl“ der „Logos“ sind, durch den Dreiecke und andere Dinge sich in ihrem Wesen erfassen und mit dessen Hilfe sie sich reproduzieren lassen, dann schien das gleichschenkelig-rechtwinklige Dreieck keinen Logos zu haben. Das fand in der mathematischen Terminologie denn auch seinen Ausdruck darin, daß das Verhältnis dieser Seiten zueinander als $\alpha\lambda\omicron\gamma\omicron\varsigma$ bezeichnet wurde, was wir als terminus technicus auffassen und mit „irrational“ übersetzen, was aber ursprünglich und wörtlich „ohne Logos“, „ohne Verhältnis“, bedeutet. Damit mußte mit einem Male die pythagoreische Grundlehre, daß „Alles Zahl ist“, daß alle Dinge zahlenmäßig gefaßt werden können, als widerlegt erscheinen. So ist es kein Wunder, daß diese Entdeckung zuerst als eine Art Schock empfunden wurde, was dann in der Legende seinen Ausdruck fand, der Urheber der Entdeckung, Hippasos von Metapont, sei dafür, daß er dies schreckliche Geheimnis aufgedeckt, oder dafür, daß er es ausgeplaudert habe, von den Göttern bestraft worden, die ihn bei einer Seereise auf dem Meere Schiffbruch erleiden und im Meere umkommen ließen⁹⁴.

führen konnten, ja bei einem intensiven Streben nach Verifikation dazu führen mußten. Dies Streben nach Verifikation zeigt sich aber auch in den mathematisch sinnlosen Versuchen, die Zahl der Eide oder des Pferdes zu bestimmen. Es zeigt mangelndes Vermögen, sich in die Bedingungen einer Zeit hineinzuversetzen, in denen die Mathematik noch in ihren allerersten Anfängen stand, wenn man bestreitet, daß die einen und die anderen Tendenzen innerhalb der selben philosophischen Schule bestanden haben könnten, weil in unserer Zeit derartiges kaum möglich wäre. Das Entscheidende ist, daß hier die Anlässe zum Übergang überall aufs deutlichste gegeben sind, und viel unmittelbarer als selbst von den Infinitesimalbetrachtungen des Zenon, die nicht auf konkrete geometrische Einzelprobleme führen.

⁹⁴ Auch der heute verbreitete Hohn über die Annahme, daß die Entdeckung der Inkommensurabilität einen Schock bedeutet haben könnte, die damit verbundene Anzweiflung der Überlieferung und der Hinweis auf die viel verbreitetere Ober-

Vom rein mathematischen Standpunkt aus ist dann freilich die durch die Entdeckung der Inkommensurabilität entstandene Schwierigkeit erstaunlich schnell überwunden worden: durch eine Erfindung, deren Urheber unbekannt ist, die aber in gewisser Weise viel genialer ist als die Entdeckung der Inkommensurabilität selbst, die, wenn einmal das Bestreben nach Verifizieren und Exaktheit, das freilich zuerst bei den Griechen aufgekommen ist, sich durchgesetzt hatte, nicht allzu schwer zu machen war.

Wenn, wie sehr wahrscheinlich ist, die Entdeckung der Inkommensurabilität am regelmäßigen Fünfeck gemacht worden ist, so ist dies, wie unten im einzelnen gezeigt wird⁸⁵, im wesentlichen auf folgende Weise geschehen. Will man das Verhältnis zweier Strecken zueinander bestimmen, so zieht man die kleinere von der größeren so oft ab wie dies möglich ist. Bleibt dann ein Rest, so zieht man diesen von der kleineren ab so weit dies möglich ist, dann wieder den Rest von dem zuvor gebliebenen Rest. Geht endlich der gegenseitige Prozeß der Abziehung einmal auf, so daß kein Rest mehr bleibt, so hat man das größte gemeinsame Maß der beiden ursprünglichen Strecken. Trägt man dies auf den beiden Strecken

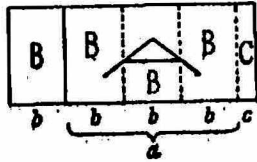
lieferung, daß die Entdeckung vielmehr als große Errungenschaft betrachtet wurde, zeigt dasselbe mangelnde Verständnis für die historische Situation. Selbst wenn es nicht überliefert wäre und wenn es keine entsprechenden Legenden gäbe, müßte man erschließen, daß es für die orthodoxen Pythagoreer (αὐτοὶ ἔφα) ein Schock gewesen sein muß, wenn eine Entdeckung gemacht wurde, die zu beweisen schien, daß die Lehre des Meisters „Alles ist Zahl“ jedenfalls in ihrem ursprünglichen Sinne nicht überall galt und sogar gerade bei einigen Figuren, die innerhalb der alten Lehre eine bedeutende Rolle spielten, nicht galt. Es ist sehr natürlich, daß der Entdecker der Lehre, der, wenn es Hippasos war, nach der Überlieferung zu dem inneren Zirkel des Ordens der höher Eingeweihten gehörte, sich mit seinen Entdeckungen selbst als wahren Fortsetzer des Meisters betrachtete, andere dagegen ihn als Ketzer betrachteten, was auch darin zum Ausdruck kommt, daß später das ursprüngliche Verhältnis von μαθηματικοί, womit der innere Zirkel der Eingeweihten bezeichnet wurde, und ἀκουσματικοί, womit die bloßen „Hörer“ bezeichnet wurden, von manchen umgekehrt und behauptet werden konnte, die Akusmatiker seien die wahren Pythagoreer gewesen. Vgl. K. v. Fritz, „Mathematiker und Akusmatiker bei den alten Pythagoreern“, Sitz.-Ber. Bayer. Akad. Wiss., phil.-hist. Kl. 1960, Heft 11. Es ist übrigens höchst instruktiv, das ausgezeichnete Kapitel von C. F. von Weizsäcker über Galilei in seinem Buch „Die Tragweite der Wissenschaft“ I, Kapitel VI, S. 96 ff., zu lesen, wo gezeigt wird, wie in sehr weitgehender Analogie zu Hippasos Galileis Lehre von mandien Vertretern der Kirche als sehr gefährlich betrachtet wurde, Galilei selbst dagegen seine neue Astronomie als wahre Verherrlichung der Schöpfung Gottes betrachtete, andere hinwiederum eine Mittelstellung einnahmen, bald darauf aber natürlich Galileis Lehre allgemein als großartige Entdeckung gefeiert wurde.

⁸⁵ Vgl. unten S. 565 ff.

ab, so sind die Anzahlen der möglichen Abtragungen die Verhältniszahlen der beiden Strecken, also ihr „Logos“ nach der ursprünglichen Bedeutung des Wortes. Beim regelmäßigen Fünfeck ergibt sich bei dem gegenseitigen Subtraktionsprozeß, daß die Differenz zwischen Diagonale und Seite des Fünfecks gleich der Diagonale des Fünfecks ist, das von sämtlichen Diagonalen des Fünfecks im Innern des Fünfecks gebildet wird, und die Differenz zwischen der Seite des ursprünglichen Fünfecks und der Diagonale des inneren Fünfecks gleich der Seite des inneren Fünfecks. Da nun die Diagonalen jedes Fünfecks wieder ein regelmäßiges Fünfeck bilden, so ist offensichtlich, daß, da unendlich viele regelmäßige Fünfecke ineinandergeschachtelt sind, auch der Prozeß des gegenseitigen Abziehens unendlich weitergehen muß und man also niemals zu einem gemeinsamen Maß von Diagonale und Seite des regelmäßigen Fünfecks gelangen kann, es also unmöglich ist, sie mit einem solchen Maß zu messen und ihren „Logos“ zu finden.

Die Überwindung der Schwierigkeit ist aller Wahrscheinlichkeit nach schon in der zweiten Hälfte des 5. Jhdts. v. Chr. dadurch erfolgt, daß die Proportion, der αὐτὸς λόγος, neu definiert wurde, indem man den Prozeß des gegenseitigen Abziehens, durch den bei rationalen Verhältnissen das größte gemeinsame Maß gefunden wird, aus dem dann die Verhältniszahlen sich ableiten lassen, selbst zum Kriterium erhob. Wenn zwei Paare von Längen zueinander im selben Verhältnis stehen, wie etwa 4:15, so wird auch der Prozeß des gegenseitigen Abziehens jeweils gleich oft in derselben Richtung gehen, bis er zum Stillstand kommt. Nun wird also festgesetzt, daß zwei Größenpaare auch dann als im selben Verhältnis zueinander stehend betrachtet werden sollen, wenn der Prozeß des gegenseitigen Abziehens niemals zum Abschluß kommt, aber gezeigt werden kann, daß er bis in alle Ewigkeit immer bei beiden in dieselbe Richtung geht. Dies ist ja beim regelmäßigen Fünfeck auf den ersten Blick zu sehen, da hier die Subtraktion jeweils genau einen Schritt: Seite zu Diagonale, Diagonale zu Seite, etc. in jeder Richtung geht. Die Tatsache, daß eine solche Überwindung der Schwierigkeit so schnell gefunden worden ist, kann vielleicht der Annahme, daß die Entdeckung selbst am regelmäßigen Fünfeck gemacht worden ist, bis zu einem gewissen Grade zur Stütze dienen. Aber auch in einigen anderen elementaren, aber für die Geometrie grundlegend wichtigen Fällen läßt sich aufgrund der neuen Definition leicht nachweisen, daß zwei Größenpaare einander proportional sind, wenn sie auch nicht in einem ganzzahligen Verhältnis zueinander stehen: so z. B. der Satz, daß Rechtecke von gleicher Höhe sich verhalten

wie ihre Basen, auch wenn das Verhältnis kein rationales ist, da auf den ersten Blick zu sehen ist, daß, wenn die Basis b von der Basis a dreimal abgezogen werden kann, sich das Rechteck B von dem Rechteck A auch



dreimal muß abziehen lassen, und wenn der Rest c sich von b fünfmal abziehen läßt, auch das Rechteck C sich von dem Rechteck B fünfmal abziehen lassen, und so fort. Freilich ergibt sich dabei aus dem Standpunkt der ursprünglichen Proportionslehre ein paradoxes Resultat, daß zwei Größen, die *ἄλογα* sind, also im ursprünglichen Sinne kein Verhältnis zueinander haben, zueinander im selben Verhältnis stehen wie zwei andere Größen, die auch kein Verhältnis zueinander haben.

Das mag auf den ersten Blick als eine rein terminologische, durch den historischen Zufall der Umstände der Entdeckung des Irrationalen verursachte Schwierigkeit erscheinen. Aber es liegen dem doch ernsthafte Probleme zugrunde. Zunächst tritt das Problem des Finitismus, der finiten Erfassung des Unendlichen, in einer neuen Gestalt auf. Im Falle des regelmäßigen Fünfecks bekommt man den infiniten Prozeß des gegenseitigen Abziehens, d. h. sowohl die Tatsache, daß er infinit ist, als auch die Tatsache, daß er sich immer je genau einen Schritt in jeder Richtung bewegen muß, mit Hilfe des einmaligen und völlig finiten Beweises, daß die Schnittpunkte der Diagonalen ein regelmäßiges Fünfeck bilden und die Differenz von Diagonale und Seite jeweils gleich der nächsten Diagonale ist etc., völlig in die Hand. Im Falle der Rechtecke und ihrer Basen bekommt man den im übrigen völlig irregulären infiniten Verlauf der gegenseitigen Subtraktion dennoch dadurch völlig in die Hand, daß sich an den ersten Schritten zeigen läßt, daß beim gegenseitigen Abziehen der Basen die Rechtecke notwendig immer folgen müssen. Nirgends bekommt man es bei diesen Beweisen mit so etwas wie Grenzwerten zu tun. Aber bei den grundlegenden Beweisen des 11. und 12. Buches der Elemente des Euklid über das Verhältnis von Kreisen oder Kegeln zueinander kommt man weder mit der angeführten Definition des *αὐτὸς λόγος* noch ohne das, was Hasse und Scholz die Epsilonik genannt haben, aus.

Wahrscheinlich weniger als ein halbes Jahrhundert später hat dann Eudoxos von Knidos (400—437 v. Chr.) die Definition „Den selben Logos haben (d. h. nach unserer Terminologie: zueinander im selben Verhältnis stehen) Größenpaare, welche die selbe gegenseitige Abziehung haben“⁵⁶ durch eine kompliziertere, aber letztendlich auf demselben Prinzip beruhende Definition ersetzt⁵⁷, die es nicht nur erlaubte, in einzelnen Fällen nachzuweisen, daß zwei oder mehr Paare von inkommensurablen Größen zueinander im selben Verhältnis stehen, sondern eine ganz allgemeine, auch für nichtkommensurable Größen gültige, Proportionslehre aufzubauen. Mit Hilfe dieser Proportionslehre und des sog. Lemmas des Archimedes, das aber in nur ganz leicht abweichender Form schon als Satz X, 1 in Euklids Elementen erscheint und zweifellos letztendlich auf Eudoxos zurückgeht⁵⁸, hat dieser dann sein sog. Exhaustionsverfahren zu großer Exaktheit ausgebildet und damit vor allem die Stereometrie auf eine ganz neue Basis gestellt. Dies Exhaustionsverfahren beruht darauf, daß krummlinig begrenzten Flächenstücken oder Körpern, deren Verhältnis zueinander bestimmt werden soll, geradlinig begrenzte regelmäßige Flächenstücke oder Körper einbeschrieben werden, die sich durch Unterteilung und Vermehrung ihrer Seiten der Peripherie der krummlinig begrenzten Fläche (oder Körper), der sie einbeschrieben sind, immer mehr annähern⁵⁹. Es wird dann bewiesen, daß das Verhältnis zwischen

⁵⁶ Vgl. Aristoteles, *Topik* Θ 3, 158 b, 33—35: τὴν γὰρ αὐτὴν ἀντανάλειψιν ἔχει τὰ χωρία . . . ἔστι δὲ ὁρισμὸς τοῦ αὐτοῦ λόγου οὗτος.

⁵⁷ Euklid, *Elemente* V def. 5: ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι πρῶτον πρὸς δεύτερον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ τοῦ πρῶτου καὶ τρίτου ἰσάμην πολλὰ τῶν τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου ἰσάμην πολλαπλασίων κατ' ἀποιοῦν πολλαπλασιασµὸν ἑκάτερον ἑκατέρου ἢ ἅμα ὑπερέχη ἢ ἅμα ἴσα ἢ ἢ ἅμα ἡλείπη λαμβάνοντα κατέλληλα.

⁵⁸ Vgl. darüber unten S. 381 ff.

⁵⁹ Das Annäherungsverfahren durch Einbeschreibung geradliniger Figuren in krummlinige ist an sich viel älter und geht schon auf den Sophisten Antiphon zurück, der schon in der zweiten Hälfte des 5. Jhdts. das Problem der Quadratur des Kreises durch Einbeschreibung und Umschreibung von regelmäßigen Polygonen zu lösen versuchte. Doch wird diese „Lösung“ von Aristoteles mit Recht zurückgewiesen, da damit nur Annäherungswerte erreicht werden. Es ist früher vielfach und auch von mir angenommen worden, daß der Beweis des Hippokrates von Chios, daß Kreise sich zueinander verhalten wie die Quadrate ihrer Durchmesser, worauf seine berühmten Mönchenbeweise beruhen, sich schon aufgrund der Antiphonischen „Kreisquadratur“ eines ähnlichen Beweisschemas bedient haben müsse wie Eudoxos für seine Beweise, nur weniger exakt axiomatisch fundiert. O. Becker, „Der mutmaßliche Beweis des Hippokrates für die Proportionalität von Kreisfläche und Durchmesserquadrat“, in: *Archiv f. Begriffsgeschichte* IV, S. 218, hat jedoch gezeigt, daß Hippokrates sich auch eines noch wesentlich primitiveren Verfahrens

den geradlinig begrenzten einbeschriebenen Flächenstücken oder Körpern bei dem Prozeß der Annäherung an das umgebende Flächenstück (oder Körper) immer dasselbe bleibt und daß die Differenz zwischen dem umgebenden krummlinigen Gebilde und dem ihm einbeschriebenen geradlinigen kleiner gemacht werden kann als jede beliebig kleine vorgegebene Größe. Daraus wird dann der Schluß gezogen, daß auch die krummlinigen Gebilde zueinander im selben Verhältnis stehen wie die ihnen einbeschriebenen geradlinigen.

Obwohl diese sog. Exhaustionsmethode von Eudoxos mit vorbildlicher Genauigkeit unterbaut und gehandhabt worden ist, mit sehr viel größerer Exaktheit, als dies bei der modernen Fluxions- und Differentialrechnung noch viele Jahrzehnte nach ihrer Erfindung und noch zu einer Zeit, als sie auf vielen Gebieten mit großem Erfolg angewendet worden ist, der Fall gewesen ist, hat es im Altertum doch Philosophen gegeben, die gegen sie aufgrund des schließlichen Überganges von der beliebig klein zu machenden Differenz zu dem Schluß, daß dasselbe Verhältnis auch für die krummlinig begrenzten Gebilde, denen sich die geradlinig begrenzten immer mehr annähern, gelten müsse, wegen mangelnder Schlüssigkeit oder Exaktheit Einspruch erhoben haben, so daß Archimedes gezwungen war, in einem Brief an Dositheos zu sagen¹⁰⁰, er wolle sich auf diese Kontroverse nicht weiter einlassen: es genüge ihm, wenn seine Beweise so exakt und schlüssig seien wie die berühmtesten Beweise des Eudoxos. Hier zeigt sich also das Problem der finiten Bewältigung des Infinitesimalen wiederum von einer neuen Seite. Dieses Problem wird auch im folgenden immer wieder in neuen Formen auftreten.

Wichtiger als dieses spezielle Problem ist jedoch, daß an dieser Stelle auch die Frage, wie weit die Elemente, die in eine „wissenschaftliche“

bedient haben kann. Das Entscheidende an dem Verfahren des Eudoxos ist jedenfalls das, was Hasse und Scholz seine Epsilonantik genannt haben, der Beweis, daß der Fehler, bzw. die Abweichung kleiner gemacht werden kann als jede noch so kleine vorgegebene Größe ($= \epsilon$). Die heute gebräuchliche, zuerst von dem Mathematiker Gregorius a S. Vincentio in der ersten Hälfte des 17. Jhdts. eingeführte Bezeichnung der Eudoxischen Methode als „Exhaustionsverfahren“ ist übrigens eigentlich irreführend, da bei dem eudoxischen Beweisverfahren die krummlinig begrenzten geometrischen Gebilde gerade nicht als von den ihnen einbeschriebenen geradlinigen Figuren „ausgeschöpft“ betrachtet werden. Vgl. dazu die sehr zutreffenden Ausführungen von H. Hasse und H. Scholz a. a. O. (oben Anm. 82), S. 46 ff.

¹⁰⁰ Archimedis Opera, ed. J. L. Heiberg (zweite Auflage Leipzig 1910—15), II, 262—64; vgl. dazu auch unten S. 384 ff.

Analyse der Welt eingehen, aus den „Dingen“ selbst stammen oder ihnen vom menschlichen Geist erst auferlegt sind, wieder in einer neuen Form auftritt. In der Wissenschaft, die von den Pythagoreern ausgegangen ist, erhebt sich das Problem nun in einer doppelten Form. Bei den Zahlen und Zahlverhältnissen, mit denen die älteren Pythagoreer die Welt zu erfassen suchten, sieht es ja auf den ersten Blick so aus, als ob diese in den Dingen selbst gefunden würden: in den für das menschliche Gehör durch ihren Wohlklang ausgezeichneten und von ihm als solche unmittelbar aufgenommenen Tönen und Tonharmonien oder in den aus Stöcken zusammengesetzten, ebenfalls in gewisser Weise eine ausgezeichnete Gestalt besitzenden Dreiecken, die gewissermaßen vorgefunden werden. Aber die Entdeckung der Inkommensurabilität kann nicht mehr durch Ausmessen an durch irgendwelche materiellen Gegenstände, seien es Stöcke oder Seile oder Tintenstriche auf Papyrus, repräsentierten regelmäßigen Fünfecken gemacht werden. Denn der Prozeß des Ausmessens käme bald zu Ende und die im Innern der Fünfecke durch Ziehen ihrer Diagonalen immer neu entstehenden Fünfecke würden bald unerkennbar, so fein man auch die Striche ziehen mag. Die Entdeckung konnte nur an einem idealen regelmäßigen Fünfeck gemacht werden, desgleichen es in der empirischen Welt nicht gibt. Daraus ergibt sich sogleich die Frage, die auch von den griechischen Philosophen der Folgezeit nach allen Seiten hin erörtert worden ist, was für einem Reich denn diese Gebilde angehören, die es in der Welt der „Wirklichkeit“ nicht gibt und die doch ihre von der Willkür des Menschen, der sie in gewisser Weise zur erkenntnismäßigen Bewältigung der „wirklichen“ Welt benutzt, völlig unabhängige Eigengesetzlichkeit haben, wie sich auch daraus ergibt, daß die Entdeckung der Inkommensurabilität eine durchaus überraschende gewesen ist. Damit verbunden ist die nicht minder fundamentale Frage, in welchem Verhältnis denn nun das Reich dieser Gebilde zu der „wirklichen“ Welt steht, die wir mit ihrer Hilfe zu erfassen suchen. Diese allgemeine Frage kann auch die speziellere Form annehmen, ob der Raum, in dem sich die „wirklichen“ Dinge bewegen, wenn es so etwas gibt, dem mathematischen Raum der von den ältesten Pythagoreern bis auf Euklid ausgebildeten Geometrie entspricht, womit dann wiederum die weitere, schon im Altertum viel diskutierte Frage zusammenhängt, ob der Raum, oder auch, ob der „physikalische“ Raum ein Continuum oder ein Discontinuum ist. Doch mag die weitere Erörterung dieser Frage zunächst zurückgestellt werden, bis sie in anderem Zusammenhang wieder auftauchen und von einer anderen Seite her eine neue Beleuchtung erfahren wird.

Immerhin wird auch bis hierher schon sehr deutlich geworden sein, daß die frühgriechische Wissenschaft schon sehr bald, nachdem sie aufgrund des neuen Bedürfnisses nach Exaktheit und Verifizierung entstanden war, auf das Problem gestoßen ist, was denn nun eigentlich in einer solchen exakten und verifizierten Erkenntnis erkannt wird und in welchem Verhältnis das so Erkannte zu der lebendigen Menschenwelt, in der sich unser tägliches Leben, unser eigentliches Leben, abspielt, steht: ein Problem, das, soviel ich sehen kann, in keiner anderen Kultur, solange sie von den Griechen und ihren geistigen Nachfolgern unbeeinflusst geblieben ist, in dieser Form, jedenfalls nicht in dieser Schärfe, aufgetreten ist.

Was soweit über die von den Pythagoreern ausgegangene Entwicklung gesagt worden ist, bedarf jedoch noch nach zwei Seiten hin der Ergänzung. Der Anspruch der pythagoreischen „mathesis universalis“, die zuerst in der Form einer arithmetica universalis aufgetreten ist, ist eine Zeitlang, wie sich gezeigt hat, wirklich ein ganz universaler gewesen, so sehr, daß die Gerechtigkeit, die Ehe, die verschiedenen Spezies der Lebewesen und vieles andere dem Anspruch zahlenmäßiger Erfassung ihres Wesens unterworfen worden sind. Nun hatte die Entdeckung der Inkommensurabilität gezeigt, daß nicht einmal das Verhältnis von Ausgedehntheiten im Raum sich durchweg zahlenmäßig erfassen läßt. Diese Schwierigkeit wurde durch die Erfindung einer neuen, auch auf inkommensurable Größen anwendbaren Proportionenlehre und ihre Vervollkommnung und Ausbildung zu einem universalen Instrument weitgehend überwunden. Aber es ist schwerlich ein bloßer Zufall, daß gerade in der Zeit des Überganges die Probleme der Würfelverdopplung, der Quadratur des Kreises und die Beschränkung der mathematischen Konstruktionsmittel auf Lineal und Zirkel eine so große Rolle gespielt haben.

Hier darf man sich nun nicht daran stoßen oder gar gut bezeugte Tatsachen für nichtexistent erklären, wenn manches an der Entwicklung vom modernen Standpunkt aus als abwegig oder gar als irrtümlich erscheint. So hat A. Steele¹⁰¹ in einem an sich sehr interessanten und sorgfäl-

¹⁰¹ A. D. Steele, „Über die Rolle von Zirkel und Lineal in der griechischen Mathematik“, in: Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik B (Studien) III, 287 ff. Die Arbeit ist im übrigen mit vorbildlicher Sorgfalt durchgeführt und zeigt unter anderem, wie allmählich die Erkenntnis der eigentlichen mathematischen Bedeutung der Beschränkung der Konstruktionsmittel auf Zirkel und Lineal aufdämmerte. Aber für die hier behandelte Zeit ist das Problem nicht ganz in der richtigen Perspektive gesehen.

tigen Aufsatz den Beweis zu erbringen versucht, daß die Überlieferung von der Forderung der Beschränkung der Konstruktionsmittel auf Zirkel und Lineal auf einem Irrtum beruhen müsse, da gerade aus dieser frühen Zeit vor und gleichzeitig mit Platon eine ganze Reihe von Konstruktionen bezeugt sind, die sich anderer Konstruktionsmittel bedienen, und da sogar Platon selbst eine Konstruktion dieser Art zugeschrieben wird. Aber damit ist die Natur des Problems verkannt. Natürlich ist kein griechischer Mathematiker und ebensowenig Platon so töricht gewesen, andere Konstruktionen als diejenigen mit Zirkel und Lineal schlechthin zu verbieten und sich damit der theoretischen Erkenntnis oder des praktischen Nutzens für gewisse Messungen zu berauben, die mit Hilfe solcher Konstruktionen zu gewinnen waren. Damit ist jedoch die Überlieferung, daß Platon darauf drang, alle geometrischen Gebilde mit Lineal und Zirkel zu konstruieren, nicht aus der Welt geschafft, eine Überlieferung, die außerdem noch in gewisser Weise dadurch bestätigt wird, daß die drei Konstruktionspostulate im ersten Buch Euklids sich eben auf Strecke, Gerade und Kreis beziehen, diese also als Grundlage für alle planimetrischen Konstruktionen der ersten vier Bücher der Elemente festlegen¹⁰². Eben diese Verbindung mit den Postulaten zeigt aber auch, worum es sich eigentlich handelt: gewiß nicht um eine mehr oder minder willkürliche Beschränkung auf zwei mechanische Konstruktionsmittel. Auch die Tatsache, daß Konstruktionen, die sich mit Zirkel und Lineal durchführen lassen, auf quadratische Gleichungen zurückgeführt werden können, während Konstruktionen, für die andere Konstruktionsmittel nötig sind, auf Gleichungen höheren Grades führen, kann keine Rolle gespielt haben, da sie noch unbekannt war. Vielmehr handelt es sich offenbar um den Versuch, nachdem es nicht gelungen war, alles auf ganzzahlige Verhältnisse zurückzuführen, herauszufinden, ob es nicht möglich sei, alles wenigstens auf die beiden einfachsten Kurven, die damals auch vielfach als die „schönsten“ betrachtet wurden¹⁰³, zurückzuführen. Die gleichzeitige leidenschaftliche Bemühung um die Kreisquadratur bedeutet dann nichts anderes als den Versuch, auch noch den Kreis, die „schönste“ krummlinige Figur, auf das Quadrat, die „schönste“ geradlinige, zurückzuführen, bzw. die beiden zueinander in eine eindeutige Beziehung zu setzen. Die Tatsache, daß dieser Versuch scheitern mußte, ist ebensowenig ein Ein-

¹⁰² Vgl. dazu auch A. Szabó, „Anfänge des euklidischen Axiomensystems“, in: Archive for the History of Exact Science I (1960), 82 ff.

¹⁰³ Vgl. darüber auch unten S. 83 ff.

wand gegen die Geschichtlichkeit der Tatsache, daß er unternommen wurde, wie die Entdeckung der Inkommensurabilität ein Einwand dagegen ist, daß die Pythagoreer zunächst glaubten, alles auf ganzzahlige Verhältnisse zurückführen zu können, wo ebenfalls erst der Versuch, dies konsequent durchzuführen, zu der Entdeckung, bzw. zu dem Beweis, daß dies unmöglich ist, geführt hat. Das für die Geschichte der Wissenschaft Bedeutsame daran ist, daß sogleich nach dem Scheitern des ersten Versuches einer universalen, alle Dinge erfassenden Methode versucht worden ist, sie durch eine andere möglichst universale Methode zu ersetzen und zwar in der Weise, daß nach Möglichkeit alles auf zwei ganz einfache Prinzipien zurückgeführt wurde. Auch das hängt offenbar wieder mit dem Finitismus und dem Streben nach Präzision sowie nach vollständiger Übertragbarkeit der Erkenntnis von einem Menschen auf jeden anderen zusammen, da sich die Dinge umso exakter fassen und umso leichter ohne Verlust übertragen lassen, auf je weniger und auf je einfachere Prinzipien alles zurückgeführt werden kann.

Von einer ganz anderen Seite wird das Wesentliche an dieser von Pythagoras und den ältesten Pythagoreern ausgehenden Entwicklung durch einen Vergleich mit dem mit den älteren Pythagoreern gleichzeitigen Heraklit illustriert. Bei Heraklit wie bei den Pythagoreern spielt die Harmonie eine ganz wesentliche Rolle. In einem Fragment gebraucht Heraklit das Wort $\alpha\upsilon\tau\omicron\varsigma \lambda\omicron\gamma\omicron\varsigma$ ganz im Sinne von Proportion, d. h. im Sinne von gleichen Maßverhältnissen¹⁰⁴. Endlich gibt es eine Anzahl von Fragmenten Heraklits, in denen zwar nicht von Maßen die Rede ist, die sich aber der Form nach auf eine Art von stetigen Proportionen zurückführen lassen, wie etwa: der Affe verhält sich zum Menschen wie der Mensch zu Gott¹⁰⁵. Daraus ist dann von T. B. L. Webster der Schluß gezogen worden¹⁰⁶, durch die Verwendung dieser Form habe Heraklit unter dem Einfluß der Pythagoreer seinen Vergleichen das Zwingende eines mathematischen Beweises geben wollen.

Diese Annahme ist sehr charakteristisch für eine weitverbreitete moderne Art, die Dinge anzusehen. Man kann sich ein Fortschreiten auch philosophischen Denkens gar nicht anders denn als Annäherung an Wissenschaft im modernen Sinn oder wenigstens als den Versuch dazu denken.

¹⁰⁴ Vgl. Diels/Kranz, Vorsokratiker 22 B 31.

¹⁰⁵ Ibid. 22 B 83. Vgl. dazu H. Fränkel, 'A Thought Pattern in Heraclitus', in: American Journal of Philology LIX (1938), 309 ff.

¹⁰⁶ Vgl. unten p. 512 f.

In Wirklichkeit ist jedoch Heraklits Denken davon so weit wie nur irgend möglich entfernt. Der erste Satz des Werkes Heraklits fängt ebenfalls mit dem Logos an, und dieser Logos bedeutet — darin allerdings wieder ganz ähnlich wie ursprünglich bei den Pythagoreern — sowohl das Wort wie die sinnvolle Rede wie auch die Wahrheit, die in dieser Rede zum Ausdruck kommt. Von diesem Logos heißt es jedoch bei Heraklit¹⁰⁷: „Der Logos (die Rede, die Wahrheit), der dieser ist (nämlich der Inhalt der darauf folgenden Ausführungen des Heraklit), werden die Menschen niemals verstehen, weder bevor sie ihn gehört haben noch nachdem sie ihn gehört haben.“ Eine solche Äußerung zu tun über eine Wahrheit, die, oder über eine Rede, deren Inhalt nach mathematischer Beweismethode bewiesen werden soll, wäre ganz sinnlos, da es ja gerade der Sinn eines mathematischen Beweises ist, die Wahrheit des Satzes, den er beweisen soll, für jedermann völlig einsichtig und zwingend und daher ohne Verlust von Mensch zu Mensch übertragbar zu machen. Wenn daher auf diese zwingende Weise gefährliche, die Überzeugung von der durchgängigen genauen Erfassbarkeit der Welt als einer festen Ordnung erschütternde Erkenntnisse sich beweisen lassen, dann ist es sinnvoll, die Divulgation solcher Erkenntnisse zu verbieten. Ebenso wäre es sinnvoll, unmittelbar praktisch nützliche Erkenntnisse dieser Art der Gemeinde der Eingeweihten vorzubehalten, um ihnen das Monopol ihrer praktischen Verwendung zu sichern, wie es von den Pythagoreern berichtet wird. Dagegen wäre es völlig sinnlos, die Verbreitung der Erkenntnisse des Heraklit verbieten zu wollen. Sie sind von selbst geschützt: dadurch daß niemand, der nicht imstande wäre, sie auch unmittelbar aus der Betrachtung der ihn umgebenden Welt zu schöpfen, imstande sein wird, sie zu verstehen. Was Heraklit von dem „Herrn in Delphi“ sagt, daß er $\omicron\upsilon\tau\epsilon \lambda\acute{\epsilon}\gamma\epsilon\iota$ $\omicron\upsilon\tau\epsilon \kappa\rho\upsilon\pi\tau\epsilon\iota$, $\acute{\alpha}\lambda\lambda\acute{\alpha}$ $\sigma\eta\mu\alpha\iota\upsilon\upsilon\epsilon\iota$, galt offenbar nach Heraklits Meinung auch von seiner eigenen Rede.

Wenn daher Heraklit in einem Fragment sagt¹⁰⁸, die Vielwisserei habe Pythagoras keine Einsicht ($\nu\omicron\upsilon\varsigma$) gelehrt, so ist es ganz falsch, daraus zu schließen, wie es öfter geschehen ist: also könne es bei Pythagoras noch keinen Ansatz zu wirklicher Wissenschaft gegeben haben, sonst hätte Heraklit eine solche Äußerung nicht tun können. Wenn auch $\delta\iota\alpha\nu\omicron\upsilon\alpha$ und $\delta\iota\alpha\nu\omicron\epsilon\iota\sigma\theta\alpha\iota$ später zu Bezeichnungen diskursiven Denkens werden, so bedeutet $\nu\omicron\upsilon\varsigma$ doch von alters her die plötzliche intuitive Erkenntnis des

¹⁰⁷ Diels/Kranz, 22 B 1; vgl. auch 22 B 34.

¹⁰⁸ Ibidem 22 B 40.

Wesens einer Situation¹⁰⁹ oder — in Ausdehnung auf die Situation, in welcher der Mensch sich als Mensch überhaupt befindet — des Wesens der Welt. Daß Pythagoras eine (πολυ-)μαθῆ habe, bezweifelt Heraklit in seinem Fragment keineswegs. Aber es ist für ihn ein Wissen *über* die Dinge. Daraus ist für ihn keine Einsicht in ihr Wesen zu gewinnen. Was immer man von Heraklit halten mag¹¹⁰, daran kann kein Zweifel sein, daß er den Ansprüchen einer „wissenschaftlichen“ Erkenntnis den Anspruch einer ganz anders gearteten Erkenntnis entgegengesetzt hat. Trotzdem gibt es, wie sich zeigen wird, unter seinen dunklen Sprüchen einen, der für das Verständnis eines sehr wesentlichen Elementes in der Entwicklung der Wissenschaft nicht ganz ohne Bedeutung ist¹¹¹. Doch ist es notwendig, zunächst die Umwandlung der Kosmologie unter dem Einfluß der eleatischen Seinslehre und die damit verbundene Entstehung von Vorstellungen, die für die weitere Entwicklung der Naturwissenschaften bedeutsam geworden sind, weiter zu verfolgen.

5. Die Kosmologie unter dem Einfluß der eleatischen Seinslehre: *Empedokles und Anaxagoras*

Parmenides hatte daraus, daß nur das Seiende ist, weiter geschlossen, daß das Seiende, da es außer ihm nichts gibt, auch „Eines“ sein müsse und daß es keine Bewegung geben könne, da eine Bewegung von einem Seienden in ein Nichtseiendes nicht stattfinden könne, da es das Nichtseiende nicht gibt, aber auch nicht in ein Seiendes, da ja das Seiende schon da ist, und daß daher, selbst wenn als möglich gedacht würde, daß ein Seiendes sich in ein anderes Seiendes hineinbewegen könnte, ohne daß dieses ihm den Weg versperrt, sich doch dadurch nichts ändern würde, da an der betreffenden Stelle das Seiende schon vorher war, also auch eine Bewegung im eigentlichen Sinne, da Bewegung auch Veränderung bedeutet, nicht stattgefunden hätte. Die Philosophen der unmittelbar folgenden Zeit, soweit sie nicht wie Melissos streng an der Lehre des Parmenides oder wenigstens an ihren Grundlagen festhielten, haben sich alle dadurch

¹⁰⁹ Für die Bedeutungsentwicklung des Wortes νόος vgl. K. von Fritz, „Die Rolle des ΝΟΥΣ“; in: *Wege der Forschung*, Bd. IX: *Um die Begriffswelt der Vorsokratiker*, S. 246—363.

¹¹⁰ Vgl. dazu S. Böhner, *op. coll.* (oben Anm. 2), S. 332 ff., und Werner Heisenberg, *Physik und Philosophie* (Stuttgart 1959), S. 46.

¹¹¹ Vgl. darüber unten S. 95.