

Der Zeitraum, in dem die griechische Mathematik bevorzugtes Interesse der Historiker – der alten wie der neuen – auf sich gezogen hat, ist die Spanne von etwa 500 bis 300 vor Christi Geburt.

Um 500 lebte Pythagoras, um 300 stellte Euklid die dreizehn Bücher seiner Elemente zusammen; im fünften Jahrhundert wirkten Heraklit, Parmenides und Zeno, 399 starb Sokrates, der Lehrer Platos, 333 siegte der Schüler des Aristoteles bei Issus. Es ist die Zeit, in der die griechische Wissenschaft überhaupt ihre Hochblüte erlebte. Und wenn es schon an und für sich eine natürliche Frage ist, auf welche Weise eine so inhaltreiche und mannigfaltige und stellenweise so fein durchkonstruierte Wissenschaft, wie Euklid sie darbietet, entstanden sein mag, – so wird diese Frage doppelt brennend, weil die Mathematik eine ausschlaggebende Rolle für die griechische Philosophie gespielt hat. Wenn es nicht gelingt, diese alte Mathematik wieder zu beleben, wird auch die pythagoräische Philosophie und der Sinn jenes dem Pythagoras zugeschriebenen Ausspruchs „alles ist Zahl“ dunkel und unbestimmt bleiben. Wieviel Eigenhändiges wir auch von Plato selbst besitzen – die nur von Aristoteles stückweise überlieferte platonische Lehre von den Idealzahlen scheint für ein näheres Verständnis Platos unentbehrlich. Drehen sich doch die Diskussionen der Metaphysik, in denen sich Aristoteles mit Pythagoräern und Platonikern auseinandersetzt, hauptsächlich um das Wesen der Zahlen und Idealzahlen.

Sie bemerken sogleich die merkwürdige Spannung in der Überlieferung, die es zu verstehen gilt – deren Auflösung getrost das Kernproblem der Geschichte der griechischen Mathematik genannt werden darf: Wie ist es zu erklären, daß eine Entwicklung, welche so nachdrücklich die Zahlen in den Mittelpunkt der wissenschaftlichen Aufmerksamkeit rückte, ihren endgültigen mathematischen Niederschlag in einem Werk findet, das vorwiegend der Geometrie angehört und die Griechen viel eher als anschauungsfreudige Geometer denn als Arithmetiker erscheinen läßt?

1

Welche Quellen sind es, die uns einen Einblick in diese Entwicklung zu gewähren vermögen?

Die einzigen direkten Quellen von unbezweifelbarem dokumentarischem Wert sind der Euklid einerseits – die Schriften Platos, Aristoteles' und ihrer Schüler (wie Eudem und Aristoxenos) andererseits. Also zeitgenössische philosophische Schriften, welche in meist nur kurzen Worten auf mathematische Methoden, Probleme und Resultate hinweisen – und ein Sammelwerk am Ende des Zeitraums, das die grundlegenden rein mathematischen Ergebnisse der Wissenschaft – ohne Bezug auf Außermathematisches – zusammenträgt und methodisch ordnet.

Direkte Antworten auf unsere Fragen bieten uns diese Schriften nicht. Euklid hatte nicht die Liebeshwürdigkeit moderner Schriftsteller, mathematische Sätze nach ihren Entdeckern zu benennen. Eudem verfaßte eine Geschichte der griechischen Mathematik; aber gut verbürgte Fragmente dieses Buches sind uns nur wenige erhalten – ein Stück berichtet die Ausmessung der Mündchen durch Hippokrates¹, ein anderes einen pythagoräischen Beweis für den Satz über die Winkelsumme im Dreieck². Dazu kommen noch einige nicht wörtlich überlieferte Angaben, die direkt aus Eudem entnommen sein können, wie etwa die, daß der zweite Kongruenzsatz von Thales stamme³.

Platos Schriften sind nicht lehrhafte Abhandlungen, sondern gedichtete Dialoge, die nie ganz den schwebenden Charakter des Gedichteten verlieren. Das Resultat eines Dialogs im Sinne eines philosophischen Theorems feststellen wollen, heißt zum mindesten die Sprache Platos in eine lehrhaft feststellende Sprache umformen; denn Platos Ansichten treten nicht direkt zutage. Ebenso wenig sind die Dialoge historische Berichte. Der Sokrates des Staates ist gewiß nicht der historische; aus dem Parmenides wird man nicht folgern wollen, daß Sokrates mit Zeno und Parmenides gesprochen habe. Ebenso wenig erfahren wir Direktes über den Lehrbetrieb der Akademie. Der Theätet des Dialogs tritt uns z.B. als ein begabter Knabe, der bei Theodorus Mathematik lernt, nicht als ein bedeutender Forscher der platonischen Akademie entgegen, der er bei der Abfassung des Dialogs gewesen sein mag.

Die Gespräche sind von Humor durchsetzt, und vielleicht ist die Überschätzung der *διαίρεσις* als platonischer Lehre (die Begründung der klassifizierenden Logik, um es kurz zu sagen) nur eine Verwechslung von Scherz und Ernst. Im Staatsmann sind zwecks Definition des Königs Menschenherden und Schweineherden durch ein Merkmal zu unterscheiden; dies gelingt mit der Anzahl der Füße der versammelten Lebewesen, denen Plato einerseits das Quadrat aus der Diagonale, nämlich $2 = (\sqrt{2})^2$, andererseits das Quadrat aus der Diagonale der Diagonale, nämlich $4 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2$ zuordnet⁴. Plato treibt offenbar Scherz mit dem Ernst des Irrationalen und dem Satz des Pythagoras.

In den Gesetzen⁵ wird für die Anzahl der Bürger die Zahl 5040 vorgeschlagen, weil sie durch alle Zahlen von 1 bis 10 teilbar ist und insgesamt 59 Teiler hat. Das ist vermutlich ein Scherz, der sich übrigens leicht nachrechnen läßt, weil $5040 = 7!$ ist. Auch die Hochzeitszahl⁶ im Staat dürfte weniger bitterer Ernst, als vielmehr eine humoristische Übertrumpfung pedantischer Zahlenmystik sein.

Und doch muß es auch den lehrenden Plato gegeben haben. Aristoteles pflegte seine Schüler mit Platos Beispiel davor zu warnen, durch irreführende Titel von Vorträgen falsche Erwartungen bei den Zuhörern zu erwecken. „So erging es, wie Aristoteles immer erzählte, den meisten von denen, welche bei Plato die Vorlesung über das Gute hörten. Jeder sei nämlich mit der Voraussetzung gekommen, er werde irgendeines von diesen sogenannten menschlichen Gütern, Reichtum, Gesundheit, Kraft, überhaupt irgendeine außerordentliche Glückseligkeit erlangen; als nun aber die Erörterungen über Mathematik und Zahl in Geometrie und Astronomie, καὶ τὸ πέρας ὅτι ἀγαθὸν ἐστὶ ἐν, daß die Grenze ein Gut ist, zum Vorschein kamen, da trat ihnen, dünkt mich, etwas sehr Unerwartetes entgegen, und die einen vernachlässigten allmählich den Gegenstand, die anderen tadelten ihn.“⁷

Das klingt recht wirklichkeitsgetreu und glaubwürdig, aber eine direkte Überlieferung der Lehre gibt es nicht. Wir können nur feststellen, daß der Plato, gegen welchen Aristoteles in seiner Metaphysik polemisiert, nicht der uns bekannte ist, daß Plato eine Idealzahlenlehre entwickelt haben muß, in der *πέρας* und *ἐν* eine

Hauptrolle spielten, und so vermuten, daß diese Lehre in der Vorlesung über das Gute vorgetragen wurde. Der Gehalt dieser Lehre läßt sich nur undeutlich aus der ermüdenden Polemik des Aristoteles entnehmen.

Es bestehen also erhebliche sachliche Schwierigkeiten, diese wohlverbürgten Quellen zu befragen, und so mag man es verstehen, wenn sich die Historiker weniger an Euklid und die alten Philosophen als an eine andere, ihrem dokumentarischen Wert nach fragwürdige Überlieferung gehalten haben – nämlich an die historiographische griechische Tradition, wie sie uns im Kommentar des Proklos (500 n. Chr.) zum ersten Buch des Euklid, im Kommentar des Pappos zu Euklid X und in den Scholien zum Euklid übermittelt wird – Scholien, die zum Teil aus erhaltenen und wahrscheinlich zum Teil aus jetzt verlorenen Kommentaren exzerpiert und als Randbemerkungen in den Handschriften der Elemente erhalten sind, – und an die merkwürdigen neupythagoräischen Schriften des Theon von Smyrna und des Nikomachos von Gerasa, die 100 bis 200 n. Chr. verfaßt sind, als Bücher, die zum Verständnis der Philosophie von Plato und Pythagoras bzw. zu ihrer Interpretation im neuplatonischen und neupythagoräischen Sinn vorbereiten sollten.

Aber die unmittelbaren Auskünfte, die unsere historische Neugier hier erhält, sind leider widerspruchsvoll, und zwar in ganz grundlegenden Dingen.

Proklos überliefert ein Mathematikerverzeichnis⁷, das übrigens Cantor seiner Darstellung durchgehend zugrunde legt. Hier heißt es unter anderem, daß Pythagoras bekanntlich die Lehre vom Irrationalen und die Konstruktion der kosmischen Körper gefunden habe. In einer anderen Notiz heißt es mit Bezug auf Theätet⁸: *πρῶτος δὲ τὰ πάντα καλούμενα στερεὰ ἔγραψε*; das kann nicht anders wörtlich übersetzt werden, als daß Theätet als erster die sogenannten fünf Körper konstruierte. Drittens aber berichtet ein Scholion⁹ zu Euklid XIII, daß die Pythagoräer nur Würfel, Pyramide und Dodekaeder gekannt hätten, Theätet aber Oktaeder und Ikosaeder gefunden habe. Die sachlichen Widersprüche sind offenkundig und offenbar einschneidend. Besaß Pythagoras schon den Inhalt von Euklid XIII, so kann man kaum von einer Entwicklung der Geometrie im Zeitraum von 500 bis 300 sprechen, und Theätet ist nur ein unbedeutender Name in der

Überlieferung des pythagoräischen Wissens. Bildete aber Theätet den Begriff des regelmäßigen Körpers und konstruierte er sie sämtlich, so wird er (von weiteren möglichen Leistungen ganz zu schweigen) neben Eudoxos die bedeutendste Gestalt der vor-euklidischen Mathematik.

Wie soll das entschieden werden? Wie sollen wir die Nachrichten bewerten? Erwägungen über die inhaltliche Wahrscheinlichkeit sind unvermeidlich. Heiberg wollte nicht glauben, daß die Pythagoräer das Oktaeder nicht gekannt hätten, und meint, es wäre Oktaeder und Dodekaeder zu vertauschen¹⁰. In der Tat wäre es ganz unglaublich, daß jemand von den ägyptischen Pyramiden Kenntnis hatte und nicht auf die Idee verfallen wäre, zwei solche Pyramiden zu einem regelmäßigen Oktaeder zusammenzusetzen. Aber es gibt ein Specksteindodekaeder, das in Italien gefunden ist und älter als 500 v. Chr. sein muß. Und der Pyrit, ein wichtiges Erz, das in Italien schon früh abgebaut wurde, kristallisiert in Dodekaedern und in einem dem regelmäßigen Ikosaeder ähnlichen Zwanzigflächner!¹¹ Die Nachricht des Scholions bleibt, wie man es auch wendet, recht unglaubwürdig.

Doch wird dadurch die Nachricht des Proklos und die des Suidas⁸ wahrscheinlicher? Was für ein Licht fällt auf die Tradition insgesamt, wenn sie so einschneidende Widersprüche enthält? Werden dadurch nicht auch Nachrichten unsicher, die vielleicht nur zufällig unwidersprochen überliefert sind?

Es ist unvermeidlich, zum Quellenwert der Tradition Punkt für Punkt Stellung zu nehmen. Und möchte man versucht sein, sich einer Analyse des Euklidischen Textes und einer vielleicht diffizilen Interpretation Platos zu entziehen, auch bei den Kommentatoren müssen wir zwischen den Zeilen lesen, um die Bruchstellen zwischen Erdichtetem und Berichtetem zu erkennen. Und aus der Frage nach der Mathematik zwischen 500 und 300 v. Chr. erwächst die Frage nach der Geschichte des Auf- und Niedergangs der griechischen und hellenischen Wissenschaft im Zeitraum von 300 v. Chr. bis 500 n. Chr.

Das Ausmaß der Entartung dieser Tradition ins Legendarische übertrifft alle Erwartung. Für die Neupythagoräer sind Plato und Aristoteles nur noch die Evangelisten der Offenbarung, die Pythagoras den Menschen geschenkt hat; Pythagoras wird ein

philosophierender Halbgott. Im ersten Jahrhundert n. Chr. tauchen Schriften in einem eigentümlichen dorischen, künstlich archaisierenden Dialekt auf. Und diese Schriften gelten dann als Quellen für die angeblichen Ansichten der Pythagoräer. Dieser Sachverhalt läßt sich überzeugend für den sogenannten Timäus Locrus nachweisen. Einige medizinische Äußerungen in dem ihm zugeschriebenen Werke zeigen, daß es nach 200 v. Chr. verfaßt sein muß, erstmalig erwähnt wird es von Nikomachos. Die Sprache ist nach dem Urteil der Philologen ein schwächliches, künstliches Schreibtischprodukt. Inhaltlich ist das Buch nichts anderes als ein dogmatischer, lehrhaft vorgetragener Auszug aus dem, was Timäus im Dialog Platons sagt. Für Proklos aber, der das Werk seinem Timäuskommentar voranstellt, ist es echt pythagoräische Lehre¹². Im ersten Jahrhundert müssen auch die in späteren Schriften zitierten Werke des Archytas verfaßt sein. Auch sie sind in einem fragwürdigen Dorisch geschrieben und inhaltlich meistens nichts als Paraphrasen bekannter platonischer und aristotelischer und anderer Ansichten.

Kein Wunder also, daß die Tradition Widersprüche enthält, und verwunderlicher vielmehr, daß sich dieses und jenes Wahre aus ihr entnehmen zu lassen scheint. Wie ist das denkbar? Nun, weil diese Kommentatoren oft nichts anderes und schlechteres tun als abschreiben. Wenn es gelingt, glaubhaft zu machen, daß eine direkte Abschrift, sagen wir aus Eudems Geschichte, vorliegt, so hätten wir etwas Echtes und Richtiges in der Hand.

So glaubte Cantor z. B., daß das Mathematikerverzeichnis des Proklos aus Eudem stamme, weil Proklos sich am Ende desselben auf diejenigen bezieht, welche über Geschichte geschrieben haben. Ebenso sucht man den Wert des oben zitierten Scholions zu Euklid XIII zu stützen, indem man die Vermutung begründet, daß es aus einem Kommentar des Pappus entnommen ist, und daß Pappus Eudems Geschichte der Geometrie gekannt haben müßte. Andererseits stellt man die Herkunft des Mathematikerverzeichnisses aus Eudem in Frage; dasselbe spricht von Pythagoras, es gibt aber kein zweifellos verbürgtes altes Gut, in dem Pythagoras als Wissenschaftler auftritt¹³; Aristoteles spricht nur von der Schule der Pythagoräer, Eudem schreibt den Satz von der Winkelsumme im Dreieck den Pythagoräern zu – und sicher hat Eudem ebensowenig wie Aristoteles Pythagoras Einzelergebnisse

der Mathematik zugeschrieben. Zudem klingen die auf Pythagoras bezüglichen Stellen ziemlich deutlich an einige Sätze des besonders phantasievollen Jamblichus an; kurz, es wird fragwürdig, ob ein Stück aus Eudem vorliegt. Tannery nimmt Geminus als Mittelsmann an, andere glauben an eine spätere Einschlebung in das Werk des Proklos, andere, daß Proklos Jamblichus und Eudem durcheinander zitiert habe¹⁴. So entsteht ein Chaos von Kombinationen um ein Verzeichnis, das fast nur Namen enthält – denn wenn es heißt, nach Thales wird Mamerkus als Geometer gerühmt, so kann man daran mit Cantor (wenn man schon an das Verzeichnis glauben will) nur die Bemerkung¹⁵ knüpfen: „Diese Persönlichkeit ist ein so untrügliches Zeugnis für die Vergänglichkeit irdischen Ruhmes, wie kaum eine zweite; denn wir kennen heute von diesem gerühmten Geometer nicht einmal mehr den Namen mit einiger Sicherheit.“

Man sieht: Was die Nachrichten über die regelmäßigen Körper angeht, so bekommen wir auch durch die philologische Kritik der Tradition keinen rechten Boden unter die Füße. – Auf die historische Zuverlässigkeit des Pappus und eine andere, dem Theätet zugeschriebene Leistung kommen wir sogleich noch zurück. Ein klares Bild von Theätet werden wir uns aber auch dann nicht machen können.

Durchsichtiger sind die Nachrichten, welche Euklid Buch V und XII betreffen. Wenn z. B. ein Scholion das Buch V des Euklid, die Lehre von den Proportionen allgemeiner Größen, dem Eudoxos zuschreibt¹⁶, so läßt sich dies durch mehrere Stellen aus Archimedes stützen, die sich teils auf das sog. Axiom des Archimedes oder besser des Eudoxos, teils auf die von diesem Axiom wesentlich abhängige Lehre vom Kreisinhalte, vom Zylinder- und Kegelinhalte, auf die sog. Exhaustionsmethode beziehen. Archimedes schreibt einige Sätze dieser Inhaltslehre dem Eudoxos zu¹⁷. Bemerken wir nun, daß das eudoxische Axiom im Euklid wesentlich nur in Buch XII, eben der Inhaltslehre, zur Anwendung kommt – die Rolle desselben in X ist unwichtig –, so ergibt sich durch Zusammenfassung dieser zwei Bücher V und XII ein in seinem Denkstil und Interesse einigermaßen einheitliches Teilgebiet, in sich gegliedert als allgemeine Theorie und wichtige Anwendung, das sich deutlich aus dem Gesamtwerk abhebt und tatsächlich als Schöpfung einer einzigen Mathematikerpersönlichkeit glaubhaft ist.

Zwei Stellen aus Aristoteles¹⁸ ergänzen das historische Bild: Die Proportionenlehre ist für ihn ein Beispiel einer καθόλου ἀπόδειξις. Früher behandelte man Zahlen, Strecken, Körper, Zeiten gekannt, νῦν δὲ καθόλου δέκνυνται. Durch geeignete Definitionen vereinfachen sich, heißt es an einer anderen Stelle, die Beweise; definiert man die Verhältnisgleichheit für Größen durch Gleichheit der ἀντανάσεις – durch gegenseitiges Aufheben, durch Wechselwegnahme –, so läßt sich leicht einsehen, daß Rechtecke mit gleicher Höhe sich wie die Grundlinien verhalten.

Beide Stellen deuten offenbar auf eine neuere Proportionenlehre hin, und mindestens bezieht sich die erstere auf die uns bekannte. Aristoteles hebt dann also mit Recht hervor, was auch uns als das Wichtige erscheint, daß eine Proportionenlehre allgemeiner Größen entwickelt ist, und er bezeichnet sie als ein neueres Ergebnis, was mit den Lebensdaten von Aristoteles und Eudoxos gut verträglich ist.

Unstritten ist der Sinn der zweiten Bemerkung. Heiberg faßt ἀντανάσεις als die Bezeichnung des Vergleichs der Vielfachen ma , nb der Größen a , b auf und bezieht sie, wie es plausibel ist, auf die Definition der Verhältnisgleichheit in Euklid V. Dagegen übersetzen Dyksterhuis und O. Becker ἀντανάσεις unter Bezugnahme auf den Prozeß der ἀνθυπαίσεις bei der euklidischen Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers mit „endliche oder unendliche Kettenbruchentwicklung“, und es entsteht ihnen aus diesem einen Worte eine umfassende vor-eudoxische Proportionenlehre, in welcher sich die Griechen unendlicher Prozesse als Definitionsmittel bedient hätten¹⁹. – Immerhin wird die Rolle des Eudoxos für Euklid V und XII auch dadurch nicht in Frage gestellt.

II

Wir sahen, daß ein Scholion uns einen Dienst leisten konnte, indem es uns auf innerlich zusammenhängende Stücke Euklids verwies. Man könnte sich der bedenklichen Beschäftigung mit der Geschichte der Kommentare so gut wie ganz entziehen, wenn man sie nur in dieser untergeordneten Rolle verwenden will und die Beweislast in die Analyse des euklidischen Textes verlegt. In diesem Sinne verfährt Hankel²⁰, und mein Wunsch ist nichts

anderes, als dieser vorsichtigen Methode wieder zu ihrem Rechte zu verhelfen.

Leider aber erlaubt das der heutige Zustand der Forschung nicht ohne weiteres. Von den verschiedensten Seiten werden Quellen auch zur inhaltlichen Bestimmung der frühen griechischen Mathematik benützt, die Hankel mit gutem Grund verschmähte, und die alte pythagoräische Arithmetik wird in einem grundsätzlichen Gegensatz zu Euklid aus den schon oben erwähnten neupythagoräischen Schriften rekonstruiert. Cantor und Heath, Tannery und Zeuthen, Stenzel und Becker stehen mehr oder minder alle unter dem Einfluß des Nikomachos und Theon, und ich kann mich daher der Aufgabe nicht entziehen, die angeblich archaischen Theorien der Mittelreihe und der figurierten Zahlen als neupythagoräische Pseudomathematik zu entlarven und auf ihren trivialen mathematischen Kern zurückzuführen.

Ich wende mich zuerst der Mittelreihe zu, deren Entstehung sich ziemlich deutlich verfolgen läßt.

Einen interessanten Einblick gewährt uns der einigermaßen trockene und sachliche Kommentar zu Euklid Buch X, der in arabischer Übersetzung 1850 in Paris aufgefunden wurde²¹. Der Kommentar ist vermutlich von Pappus, also um 300 n. Chr. verfaßt. Der größte Teil besteht aus einer pädagogisch-pedantischen Wiedergabe der Definitionen und Resultate Euklids, zutreffend, aber ohne das Wichtigste herauszuheben und ohne Neues dabei zutage zu fördern. Diesem Kern geht eine historisch-metaphysische Einleitung voraus, und den Beschluß bildet der Beweis einiger übrigens leicht nach Euklid beweisbarer Sätze. Einleitung und Schluß sind nun das für uns Wichtige. In der Einleitung nämlich wird berichtet, daß Theätet die drei Typen des Irrationalen,

$$\sqrt[3]{m}, \sqrt{n + \sqrt{m}}, \sqrt{n - \sqrt{m}},$$

mit Hilfe der drei Mittel, dem geometrischen, dem arithmetischen und dem harmonischen, gefunden habe, und ein Paragraph (Buch I, § 9) verherrlicht in deutlichem Anklang an Platons Timäus ausführlich und pathetisch die große einigende Macht dieser Mittel, die auch das Irrationale binden und bestimmen. Im Schlußteil (Buch 2, § 17) aber wird festgestellt, daß Euklid nur das geometrische Mittel benutzt, und um die Nachricht über Theätet zu verstehen, müsse man sich die Frage vorlegen, inwiefern arith-

metisches und harmonisches Mittel für die Lehre des Irrationalen von Bedeutung seien. So beweist der Kommentator denn, daß

$$\frac{2\sqrt{n}\sqrt{m}}{\sqrt{n}+\sqrt{m}} = \frac{2\sqrt{n}\sqrt{m}}{n-m}(\sqrt{n}-\sqrt{m}),$$

und überlegt, daß in der euklidischen Klassifizierung die Größen

$$\frac{2\sqrt{n}\sqrt{m}}{n-m}(\sqrt{n}-\sqrt{m}) \text{ und } \sqrt{n}-\sqrt{m}$$

zum gleichen Typ gehören.

Der Kommentator kennt also ein Werk des Theätet, in welchem dieser die Irrationalitäten behandelt, nicht; ihr Ansehen beziehen die drei Mittel aus der Metaphysik, ihre Rolle in der Lehre von den Irrationalitäten muß der Kommentator erst neu beweisen, und dem Sachverhalt nach ist klar, daß allerdings das geometrische Mittel als Ersatz für Quadratwurzelziehen eine fundamentale Rolle bei der Bildung der Irrationalitäten $\sqrt{n}$ und $\sqrt{m}$ spielt, daß die Verwendung des arithmetischen und harmonischen Mittels zur Bildung von $\sqrt{n} \pm \sqrt{m}$ aber nur eine Spielerei ist. –

Das Fehlen einer direkt auf Theätet zurückgehenden Schrift zeigt sich noch auf eine andere Weise. Der Kommentator vergleicht nämlich eingehend die Klassen irrationaler Strecken, die Plato in seinem Dialog Theätet definiert, mit der Begriffsbildung Euklids. Dieser Dialog ist für ihn also offenbar das einzige direkt zugängliche Buch, das über seinen Gegenstand handelt und von Theätet berichtet. Und obgleich der Kommentator sich bei seinen Nachrichten über Theätet und die Mittel auf Eudem beruft, kann ich mich des Verdachts nicht erwehren, daß Theätet der Mathematiker nur eine Legende ist, die sich um den Theätet des platonischen Dialogs kristallisiert hat. Aber dies nur nebenbei!

Ein im grundsätzlichen ähnliches Bild zeigt der Bericht über die Mittellehre in der Sammlung des Pappus²². Die Alten bildeten drei Mittel, das arithmetische, geometrische und harmonische, später wurden drei weitere hinzugefügt und diese durch die Neueren – übrigens um die heilige Zehnzahl vollzumachen, wie uns Nikomachos verrät – durch vier weitere ergänzt. Nach eingehender Beschreibung der Mittelbildung fährt Pappus in deutlichem und ausführlichem Bezug auf den Timäus fort, daß das

geometrische Mittel, wie der göttliche Plato sagt, das Wesen aller Harmonie und Ordnung sei, und er stellt sich nun die mathematisch belanglose Aufgabe, diese bevorzugte Rolle der geometrischen Proportion dadurch nachzuweisen, daß er aus drei Zahlen a, b, c , für die $a:b = b:c$ ist, neue Zahlen bildet, die wieder in geometrischer, arithmetischer, harmonischer u. a. Proportion stehen. Beispielsweise ist $a + 2b + c$ das arithmetische Mittel von $2a + 3b + c$ und $b + c$ (dies gilt für beliebige a, b, c), $b + c$ das geometrische Mittel von $a + 2b + c$ und $c, 2b + c$ das harmonische Mittel von $2a + 3b + c$ und $b + c$ usw. Die beiden letzten Behauptungen gelten nur, wenn a, b, c in geometrischer Proportion stehen.

Der Kommentar zu Euklid X und Pappus weisen also mit hinreichender Deutlichkeit auf die außermathematische Entstehung der Mittellehre hin, und machen es wahrscheinlich, daß sie ein Produkt der Timäusinterpretation ist.

Außer Pappus berichten die Neupythagoräer über die Mittellehre; zum rein Mathematischen erfahren wir nichts weiteres von Belang, der außermathematische Zusammenhang ist aber hier, besonders deutlich bei Theon, ein anderer – die Mittellehre wird von ihm zur theoretischen Musik gerechnet, zu der außerdem die Klassifikation der Brüche sowie die Zuordnung von Zahlenverhältnissen zu den Tonintervallen und die damit verbundene Teilung des Kanons gehören. Pythagoras war es nach Theon, der zuerst die Intervalle durch Verhältnisse ganzer Zahlen gemessen habe. Er fand Oktave, Quint und Quart zu 2:1, 3:2, 4:3, daraus ergibt sich der simple Zusammenhang mit den Mitteln: Quinte und Quarte sind das arithmetische und harmonische Mittel von Tönen, die ein Oktavintervall bilden.

Dürfen wir in diesem Bericht den Rest einer altpythagoräischen mathematischen Lehre erblicken? Sicher ist, daß es eine alte Theorie der Tonintervalle gegeben hat, einen geistreichen Niederschlag derselben hat uns Euklid in seiner *sectio canonis* aufbewahrt, und Ptolemäus berichtet über eine pythagoräische Musiktheorie, die sich völlig mit dem Inhalt der *sectio canonis* deckt. Ebenso sicher ist, daß Theon nie imstande gewesen wäre, eine solche echt mathematische Theorie zu verstehen und ihren Sinn zu übermitteln. Und Theon kann also nicht als Gewährsmann gegen Ptolemäus ins Feld geführt werden.

Zum Beleg hierfür darf ich auf Theons Abschnitt über die Unteilbarkeit des „Tones“ verweisen. Der Ton ist das Intervall $9/8$ und die Unteilbarkeit des Tones ist der Satz, daß die Gleichung

$$x^2 = \frac{9}{8}$$

keine rationale Lösung besitzt. Ich brauche nicht zu begründen, warum dieser Satz in einer Zeit, für welche das Irrationale eine einigermaßen neue Entdeckung gewesen sein muß, ein besonderes Interesse beanspruchen konnte. Ein unverstandener Nachhall dieses alten Interesses mag es sein, daß Theon auf den Satz aufmerksam wurde. Denn wie beweist er die geheimnisvolle Tatsache? Auf vielfache Weise wie folgt²³:

a) weil 9 nicht durch 2 teilbar ist,

b) weil $9 - 8 = 1$ und 1 unteilbar ist,

c) das „Limma“ $\frac{256}{243}$ ist kein Halbton, weil der Halbton $1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}$ ist und $\frac{256}{243} < 1 + \frac{1}{16}$ ist,

d) $\frac{9}{8} = \frac{9 \cdot 27}{8 \cdot 27} = \frac{243}{216}$ ist auch unteilbar, weil $243 - 216 = 27 = 13 + 14$ ist, aber $\frac{27}{2}$ nicht existiert.

e) die Stimme ist a priori unteilbar, weil alle Stimmlagen unvergleichbar sind,

f) der Kanon ist nicht teilbar, weil jede empirische Teilung unexakt ist.

Daß Theon auch weniger Sinnloses uns überliefert hat, erklärt er uns durch seine Versicherung, daß er dem, was die Früheren geschrieben haben, nichts hinzufügen und sich eng an ihre Ergebnisse halten will. Er zitiert wiederholt seine Hauptquellen Adrast und Thrasyll, und wir können noch heute nachprüfen, daß er den Adrast wörtlich abgeschrieben haben muß. Denn Porphyrius zitiert in seinem Kommentar zu Ptolemäus ebenfalls den Adrast, und das Zitat findet sich wörtlich bei Theon. Und zugleich erfahren wir durch Porphyrius den Namen des Werkes von Adrast: es war ein Timäuskommentar!²⁴ So sehen wir auch die pythagoräische Scheintradition unmittelbar in die Timäusinterpretation einmünden.

Tatsächlich wird im Timäus die ἀναλογία ein κάλλιστος δεσμός genannt²⁵ und werden Quinte und Quarte der „Seelentonleiter“ mittels zweier Mittel erklärt, die zwar noch nicht mit bestimmtem Namen benannt werden²⁶. Schon die Epinomis, das XIII. Buch der Gesetze Platos, das von einem Schüler und Jünger Platos verfaßt ist, spricht in geheimnisvoll dunklen Wendungen von der Harmonie und den Mitteln²⁷. Die Namen arithmetisches und harmonisches Mittel kommen (wohl zuerst) in einem Fragment des Aristoteles vor, das einem frühen Dialog angehört haben mag, der noch ganz unter platonischem Einfluß geschrieben ist²⁸. Diese nachweisbaren Bezüge reichen, bei der außerordentlichen Wertschätzung, dessen sich der Timäus als ein Hauptwerk der griechischen Metaphysik erfreute, hin, um die Fülle der hervorwuchernden Spekulationen über die Mittel zu erklären. Von einer mathematischen Mittellehre aber zeigen sich keine Spuren, auch nicht in dem sog. Archytasfragment über die drei Mittel²⁹. Überdies spricht nichts für die Echtheit dieses Fragments, das sich in allzu glatter Weise den späteren systematisierenden Interessen einfügt.

Die Gleichbewertung der drei Mittel und das Schwanken in der Bezeichnung ἀναλογία und μεσότης scheint nachplatonisch zu sein³⁰. Plato spricht nur von der ἀναλογία schlechthin und meint die geometrische Proportion und in zweiter Linie erst von zwei Mitteln. Euklid kennt das arithmetische und harmonische Mittel nicht, sondern nur die geometrische Proportion (ohne sie mit diesem Namen zu benennen) und die allgemeine Proportion aus vier Gliedern. So bezeugen Plato und Euklid dasselbe: daß es eine mathematische Theorie nur für die geometrische Proportion gegeben hat, eine Tatsache, die ja auch in den Berichten über die Mittel selbst immer wieder anklingt. –

Übrigens wäre es, glaube ich, verkehrt, den Geist, in welchem die frühe Timäusinterpretation die Proportionen verwendete, wesentlich mit der Haltung von Theon oder Nikomachos zu identifizieren. Theon erlaubt uns festzustellen, daß sich Adrast bei seinen erkenntnistheoretischen Erwägungen mit Eratosthenes auseinandersetzt³¹, und nach den wenigen Fragmenten, die aus der Schrift des Theon zu entnehmen sind, hat sich Eratosthenes³² mit dem Begriff und Wesen der allgemeinen Proportion befaßt, Gedanken etwa zur erkenntnistheoretischen Begründung der Lehre von den

allgemeinen Größen und ihren Proportionen, wie sie in Euklid V dargestellt sind. In diese Richtung weist auch eine Vokabel³³ *πηλίκον*, die in der Terminologie von Plato und Aristoteles nicht vorkommt und bei Eratosthenes etwa das *συνεχές* des Aristoteles ersetzt; es heißt soviel wie „im stetigen Sinne Größe haben“. Nun enthält Euklid V ein Axiom (V 3) ohne eigentlich mathematischen Gehalt, in welchem das Verhältnis, der *λόγος* zweier homogener Größen *ἡ κατὰ πηλικότητα ποιά σχέσις* genannt wird. Ganz ähnlich sagt Eratosthenes³⁴ bei Theon: *λόγος μὲν ἐστὶ δύο μεγεθῶν ἡ πρὸς ἄλληλα ποιά σχέσις* – was zusammengenommen es einigermaßen wahrscheinlich macht, daß Eratosthenes der Verfasser dieser Axiome ist³⁵ oder doch, daß die Theorie des Eratosthenes sich um diese allgemeinen Axiome drehte. Weiter wissen wir, daß Eratosthenes ein Instrument zur mechanischen Konstruktion von dritten Wurzeln erfunden hat. Pappus hat diese Konstruktion (in Buch 3) aufbewahrt, und ein Vers, in welchem Eratosthenes seine Leistung verherrlichte, gehört aus sprachlichen Gründen in die Lebenszeit des Eratosthenes (200 v. Chr.); er dürfte also tatsächlich auf Eratosthenes selbst zurückgehen³⁶. Auch diese Erfindung ist als ein ernsthafter Beitrag zu einer Lehre von den Mitteln zu werten – das Mesolabion des Eratosthenes ist nämlich ein Instrument zur Einschaltung von zwei geometrischen Mitteln *x, y* zwischen zwei Strecken *a, b*, für die also

$$a:x = x:y = y:b$$

gilt.

Die arithmetischen Tatsachen, die uns Theon und Nikomachos übermitteln, lassen sich, von der schon erwähnten Klassifikation der Brüche abgesehen, zwanglos in zwei Gruppen einteilen:

1. in Arithmetik im engeren Sinn, Lehre von den Einheiten, von Geraden und Ungeraden und Einteilung von Zahlen nach Teilbarkeitseigenschaften (Quadratzahlen, Zahlen der Form $n(n+1)$ usw.);

2. in das Rechnen mit Zahlen, wie Summierung einfacher arithmetischer Reihen, insbesondere mit Hilfe der Figurierung von Zahlen, der *σχηματογραφία* (s. Fig.).

	
$1+2+3=2^2$	$1+3+5=3^2$

Die Wiedergabe dieser Tatsachen erfolgt rein beschreibend. Sätze werden nicht bewiesen, sondern nur durch Beispiele belegt. Durch diese Mitteilungsformen erscheint diese Welt in einem eigentümlichen Licht, das vielleicht auf den ersten Blick als besonders altertümlich anmutet. Aber die unter 1. berichteten Tatsachen entsprechen dem aus Plato, Aristoteles und Euklid ohnehin Bekannten, und der Inhalt von 2. berührt sich sehr eng mit dem, was nach Geminus zur praktischen Rechenlehre gehörte, und dürfte eine Wiedergabe der elementaren damals üblichen Rechenmethode sein – wie ja Theon versichert, daß er nur Allereinfachstes und allgemein Verständliches bringen wolle. So ist es vielleicht zu erklären, daß Theon in seinen arithmetischen Büchern keine Gewährsmänner nennt, weil niemand geistigen Anspruch auf dieses einfache Gut erhob. Jedenfalls haben wir infolgedessen nicht die Möglichkeit, die Entstehung der arithmetischen Bücher rückwärts zu verfolgen.

Glücklicherweise aber fehlt es nicht an Zeugnissen aus der klassischen Zeit, die die damalige Bewertung gerade der *σχηματογραφία* in das rechte Licht rücken, dieser Methode, welcher die neuere Forschung eine so hervorragende Rolle in der alten pythagoräischen Mathematik zugewiesen hat. Durch Aristoteles sind Dreieckszahlen und Viereckszahlen überliefert, er kennt die Summierung der geraden Zahlen und der ungeraden Zahlen mittels der Figurierung³⁷, er spricht vom Rechteck als einem *μίμημα* einer zusammengesetzten Zahl³⁸. Die Zuordnung von Ideenzahlen zu Gegenständen, z. B. zum Gegenstand Pferd, soll Eurytos vorgenommen haben, indem er – nach Art derjenigen, die Dreiecks- und Viereckszahlen bilden – ein Pferd aus Steinchen legte³⁹. Nach den Gesetzen Platos sollen die Kinder mit Kränzen und Äpfeln spielen, Trinkschalen von Gold, Silber und Erz mischen oder verteilen und hierbei sowie bei Zusammenpaarung im Faust- und Ringkampf rechnen lernen, während die Greise sich lieber statt mit dem Brettspiel mit dem Irrationalen beschäftigen sollten, was sich so sehr ja garnicht von dem Brettspiel unterscheiden würde⁴⁰. An diese Stelle aus den Gesetzen erinnert Geminus, wenn er zur Logistik die Behandlung der Äpfel- und Schalenzahlen rechnet⁴¹.

Die Zitate zeigen, daß die Figurierung der Zahlen eine geläufige elementare Methode, nicht aber eine tiefe wissenschaftliche Er-

kenntnis war. In der Tat, die Figurierung konstituiert keinen Problemkreis, noch ist sie eine Methode von übersichtlicher Tragweite. Sie ist eine Hilfsmethode. Und „figurierte Zahlen“ sind nicht eine Klasse für sich über oder neben den reinen Zahlen existierender Begriffe und Ideen. Vielmehr ist die Figurierung eine je nach den Zwecken wechselnde Veranschaulichung von Rechenprozessen.

Aber könnte es nicht trotzdem eine Lehre von den figurierten Zahlen gegeben haben, von Zahlen, die wie Sternbilder am Himmel dastehen? Sprechen nicht die Pythagoräer von den Zahlen am Himmel? Und wie sollte man je die Brücke zu dem Dogma des Pythagoras schlagen, „alles ist Zahl“, wenn nicht von figurierten Zahlen aus? Gewiß. Aber das ist eine reine Konjektur – und diese Konjektur betrifft den Kernpunkt der pythagoräischen Mathematik und Philosophie. Sie führt alsbald zu der Behauptung, daß die Ausgangshypothese der Pythagoräer die Kommensurabilität alles Meßbaren gewesen sei.

So entsteht die Ansicht von dem véritable scandale logique, den die Entdeckung des Irrationalen bedeutet hätte. Dieser Skandal soll erst durch Eudoxos seinen Abschluß gefunden haben – meint Tannery⁴². Ähnlich stellt Zeuthen die Entwicklung dar, indem er als Zwischenlösung die geometrische Algebra in Euklid II einschleibt⁴³. Die Schwierigkeit sollte nach Hasse und Scholz durch Einführung infinitesimaler Größen behoben werden, deren Antinomien Zeno entdeckt habe⁴⁴. Die endgültige Lösung tritt nach allen vier Autoren erst bei Eudoxos ein.

Der Bericht über Hippasos, der das Irrationale entdeckt und bekannt gemacht habe und dann vom Meer verschlungen sei, steht als willkommener Mythos im Hintergrund.

Aber der Kommentator von Euklid X vermutete schon (Buch I, § 2), daß diese Erzählung eine Legende ist, die zu einer sorgfältigen Behandlung des Irrationalen ermuntern soll. Nirgends ist in den mannigfachen Dokumenten über das Irrationale bei Plato und Aristoteles von einem Skandal, der damals doch noch fühlbar gewesen sein mußte, etwas spürbar. Der naive Hellene ist es, der unwissend wie ein Schwein – sagt der Athener in den „Gesetzen“ des Plato – alles Meßbare für kommensurabel hält⁴⁵. Ein Geometer – sagt Aristoteles – würde sich mehr wundern, wenn die Diagonale zur Quadratseite kommensurabel wäre, sobald er den Beweis für

die Inkommensurabilität verstanden hat⁴⁶. Und die Leistung des Eudoxos ist ja nicht die Beweisführung für Irrationales, sondern die $\kappa\alpha\theta\acute{o}\lambda\omicron\upsilon\alpha\ \acute{\alpha}\pi\acute{o}\delta\epsilon\iota\chi\iota\varsigma$. Das Axiom einer allgemeinen Kommensurabilität ist in der griechischen Wissenschaft ausgesprochen nur in der Harmonielehre. Die Geometrie hingegen ist für Plato⁴⁷ wenigstens – und Aristoteles äußert sich ähnlich⁴⁸ – immer die Lehre vom Irrationalen, genauer die Lehre vom Messen der Figuren, deren grundlegende Schritte zwar in Anwendung der Zahlen auf Figuren bestehen, die dann aber wesentlich zum Irrationalen hinführt.

Was die geometrische Algebra Euklid II angeht, so ist sie unabhängig vom Problem des Irrationalen sinnvoll. Zenos Antinomien aber gelten schon im Rationalen – sie wenden sich bereits gegen die Annahme einer unbegrenzten Teilbarkeit des Ausgedehnten. Eine Einwirkung Zenonischer Gedankengänge auf die Mathematik zeigt sich vielleicht in der Schrift $\pi\epsilon\pi\acute{\iota}\ \acute{\alpha}\tau\omicron\mu\omicron\nu\ \gamma\rho\alpha\mu\mu\acute{\omega}\nu$ aus dem aristotelischen Kreis; sie widerlegt die Annahme unteilbarer Strecken von endlicher Größe und bereitet so das eudoxische Axiom in der Form von Euklid X, 1 vor, welches besagt, daß $a/2^n$ mit wachsendem n gegen Null konvergiert.

Kurz: war es zunächst eine vage Konjektur, an den Beginn der griechischen Arithmetik die Lehre von den figurierten Zahlen zu setzen, von deren Struktur man sich kaum ein Bild zu machen versuchte, so stehen die Folgerungen aus dieser Konjektur auf Schritt und Tritt mit den historischen Tatsachen in Widerspruch.

III

Schieben wir die beiden genannten Pseudotheorien beiseite, so bleiben nur deutlicher empfunden zwei Lücken: wie war die pythagoräische Arithmetik, wie war die pythagoräische Harmonielehre beschaffen? Und woher sie entnehmen?

Nun: Gerade aus denjenigen Teilen des Euklid, welche die historiographische Tradition nicht berücksichtigt und welche auch von den neueren Historikern zu wenig beachtet sind, aus den arithmetischen Büchern VII–IX, aus dem arithmetisch-geometrischen Buch X und der musiktheoretischen Abhandlung Euklids, der *sectio canonis*.

Den Beschluß der arithmetischen Bücher bildet die kleine ein-

fache, aber schön und klar aufgebaute Lehre vom Geraden und Ungeraden. Schon die Stellung dieser besonders elementaren Sätze ist merkwürdig. Auf frühere Definitionen wird nicht immer Bezug genommen; so wird „gerade“ nicht als „durch 2 teilbar“ erklärt, was nahe gelegen hätte. Gerade ist vielmehr eine Zahl, die sich in zwei gleiche Teile zerlegen läßt, eine ungerade enthält eine überschießende 1. Es wird zunächst gezeigt: eine Summe geradvieler ungerader Zahlen ist gerade, eine Summe ungeradvieler ist ungerade. Die Multiplikation wird durch iterierte Addition erklärt. Daraus folgt dann leicht, daß Produkte ungerader Zahlen ungerade sind, Produkte mit einem geraden Faktor gerade. Durch indirekten Schluß folgt daraus: Geht die ungerade Zahl u in der geraden Zahl $2v$ auf, so geht u auch in v auf. Daraus ergibt sich eine Klassifikation der geraden Zahlen in die Typen:

1. 2^n , dieselben besitzen nur gerade Faktoren.
2. $2u$ mit u ungerade ungleich 1, dieselben besitzen nur Zerlegungen gerade mal ungerade.
3. 2^nu mit $n > 1$, dieselben besitzen sowohl Zerlegungen gerade mal gerade wie gerade mal ungerade.

Diese Ergebnisse würden eine ebenso elegante Begründung für den Satz über vollkommene Zahlen ermöglichen, der mit seinem recht umständlichen Beweis Buch IX abschließt.

Eine Zahl heißt vollkommen, wenn sie gleich der Summe ihrer Teiler ist. Ist $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n = p$ eine Primzahl, so ist $2^{n+1}p$ vollkommen.

Zum Beweise sind im wesentlichen nur die Teiler von $v = 2^n p$ festzustellen. Ich gebe den Beweis im Sinne der Dyadik an.

1. Bestimmung der Teiler von v :

- a) $1, 2, 2^2, \dots, 2^n, p, 2p, 2^2p, \dots, 2^{n-1}p$ sind Teiler von v .
- b) Ist u ein ungerader Teiler von v , so ist u auch Teiler von $2^{n-1}p, 2^{n-2}p, \dots$ also auch von $2p$; also ist u gleich 1 oder p .
- c) Ist g ein gerader Teiler von v , so ist g entweder gleich 2^m und nach Erklärung des Teilers $2^m t = v$; alsdann läßt sich aber v mindestens m mal sukzessive halbieren und daher ist $m \leq n$.

d) Ist g ein gerader Teiler von v und von der Form $2u, 2^m n$ ($u \neq 1$), so ist u auch ein Teiler von v und daher gleich p . Da ein Teiler kleiner ist als die Zahl, die er teilt, ist $m < n$. Also sind die unter a) angegebenen Zahlen alle Teiler von v .

2. Die Summe der Teiler ist

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n + p + 2p + 2^2p + \dots + 2^{n-1}p &= \\ p + p + 2p + 2^2p + \dots + 2^{n-1}p &= \\ 2p + 2p + 2^2p + \dots + 2^{n-1}p &= \\ \dots &= \\ 2^{n-1}p + 2^{n-1}p &= 2^n p. \end{aligned}$$

Ich will den Beweis, den Euklid tatsächlich bringt, hier nicht näher analysieren. Er scheint aus dem sachlich nicht gerechtfertigten Bemühen hervorzugehen, den Satz in den allgemeinen Zusammenhang des Buches hineinzustellen, die Lehre von den geometrischen Reihen. So werden die Teiler nicht mit dem dyadischen Teilersatz bestimmt, sondern mit Sätzen über Teilbarkeitseigenschaften in geometrischen Reihen ganzer Zahlen. Auch das wird an und für sich ziemlich umständlich gemacht. Um die einfache Summierung der Teiler durchzuführen, wird nach der Dyadik die allgemeine Summenformel für geometrische Reihen abgeleitet. Das alles sieht nach Flickarbeit aus.

Die dyadische Schlußweise tritt noch einmal in X 115a (117) beim Nachweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$ auf; bekanntlich führt die Annahme, daß die Quadratseite und Diagonale des Quadrats rational wären, zu der Folgerung, daß eine Zahl gleichzeitig gerade und ungerade sein müßte. Auch dieser Satz fällt völlig aus dem Zusammenhang des Buches X heraus⁴⁹.

Nun zu den voreuklidischen Zeugnissen für diese Lehre! Die Rechenkunst, die Arithmetik und Logistik, wird bei Plato im Gorgias⁵⁰ und Protagoras⁵¹ mit Erkenntnis und Messen des Geraden und Ungeraden gleichgesetzt. Im Politikos⁵² wird die Einteilung der Menschen in Hellenen und Barbaren mit der unsachgemäßen Einteilung der Zahlen in Myriaden und Nichtmyriaden verglichen, eine sinnvolle Einteilung der Zahlen hingegen sei die in gerade und ungerade. Im Hippias⁵³ heißt es, ein Paar kann andere Eigenschaften haben als die beiden einzelnen Gegenstände des Paares, wie ja die Summe von zwei ungeraden gerade ist. Im Eutyphron⁵⁴ heißt es, überall wo Ungerades ist, muß auch

Zahl sein, nicht aber umgekehrt. Im Parmenides⁵⁶ werden gerade, ungerade, gerade mal gerade, gerade mal ungerade, ungerade mal gerade, ungerade mal ungerade gebildet, um so alle Zahlengattungen zu konstruieren. In den Gesetzen⁵⁶ wird das ἄρτιον als Beispiel für Definition und Benennung herangezogen. Der Menon⁵⁷ zeigt, daß Plato die Irrationalität von $\sqrt{2}$ bzw. $\sqrt{8}$ bekannt ist⁵⁸.

Aristoteles kennt die dyadische Klassifizierung der Zahlen⁵⁹ und führt den Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$ mehrfach an, insbesondere als indirekten Beweis — die Annahme des Gegenteils hätte zur Folge, daß Gerades ungerade wäre⁶⁰.

Aus diesen Zeugnissen folgt, daß die Lehre vom Geraden und Ungeraden vorplatonisch ist. Ich glaube, wir können diese Feststellung noch präzisieren: Die Theorie ist pythagoräisch, und sie ist das erste μάθημα oder Lehrstück, in welchem sich die logisch-arithmetische Wissenschaft der Pythagoräer niedergeschlagen hat, und sie ist zugleich das Fundament der pythagoräischen Metaphysik.

Aristoteles⁶¹ berichtet uns nämlich, daß die sog. Pythagoräer die ersten waren, die sich mit μαθήματα befaßten und sie vorantrieben. Befaßt mit diesen Fragen glaubten sie, daß die ἀρχαί, die Prinzipien dieser mathematischen Dinge, die Prinzipien aller Dinge seien. Unter dem Mathematischen aber sind die Zahlen ihrer Natur nach die ersten; so glaubten sie eher in den Zahlen als in Erde oder Feuer oder Wasser die Wesenszüge der Welt zu finden.

Sind aber die Zahlen das erste aller Natur, so sind, wie sie annehmen, die Elemente der Zahlen zugleich die Elemente alles Seienden. Die Elemente der Zahlen aber sind das Gerade und das Ungerade, dieses das Begrenzte, jenes das Unbegrenzte, aus beiden entsteht das ἕν, die Zahl aber aus dem ἕν, und die Zahlen bilden den ganzen Himmel.

Eigentümlich⁶² ist ihrer Lehre, daß sie das Begrenzte und Unbegrenzte nicht für Eigenschaften von irgendwelchen anderen Natursubstanzen hielten, wie Feuer und Erde und ähnlichen, sondern sie meinten, das Unbegrenzte selbst und das ἕν selbst seien Wesen und daher eben die Zahlen das Wesen von allem.

Der Ansatz der Pythagoräer ist also erkenntnistheoretisch begründet, und „alles ist Zahl“ nur insofern, als das ἄρτιον und

πέρτιον die Elemente alles Seienden sind. Die Gleichsetzung von ἄρτιον und ἄπειρον wird verständlicher, wenn wir an die ursprüngliche Bedeutung des Wortes ἄρτιον, „das in gleiche Stücke Teilbare“, denken. Das ἄρτιον ist das Teilbare, und das wesentlich Teilbare ist unbegrenzt teilbar. Diese Erklärung wird uns durch die Exegeten bestätigt, auf die sich der Kommentar des Simplicius zur Physik des Aristoteles beruft⁶³.

Die pythagoräische Lehre wird von Aristoteles im Gegensatz zur materialistischen Naturphilosophie ihrer Vorgänger dargestellt. Wir dürfen noch an den Gegensatz zu den Eleaten denken, welche das Mannigfaltige für grundsätzlich widerspruchsvoll hielten und nur das ἕν als erkennbar anerkannten. Insofern sich die Antinomien des Zeno gegen die unbegrenzte Teilbarkeit richten, darf man vermuten, daß sie in philosophischem Meinungskampf auch das Ziel hatten, die Lehre vom ἄρτιον zu widerlegen.

Das Wesen der pythagoräischen Lehre⁶⁴ zeigt sich vielleicht am deutlichsten in der Kritik, die Aristoteles an ihr übt. Für ihn sind die Einzeldinge wirklich und das Mathematische ist an den Dingen. Die räumlichen Dinge sind συνεχές — stetig —, die Stetigkeit ist Träger ihrer Teilbarkeit. Ins Unendliche teilbar sind sie aber nur der Möglichkeit nach, und das Unendliche existiert nur ἐν δυνάμει. Plato hat die Metaphysik der Pythagoräer mit Modifikationen übernommen. Die Epinomis fordert als erstes μάθημα des Unterrichts die Lehre vom Geraden und Ungeraden in ihrer ganzen Bedeutung für die Natur⁶⁵.

Nach Aristoteles ersetzte Plato Gerades und Ungerades durch das ἕν und die διὰς ἀοριστός. Das ἕν ist Idee der Form, die διὰς ἀοριστός die Zweifelt des Groß und Klein oder die Relation „größer als“ ist Idee der Materie.

Das Problem Platos war offenbar zu verstehen, inwiefern Zahlen an sich existieren, Ideen sein können. Welche Macht hält die Einheiten der Zwei, allgemein einer Zahl zusammen?

Wichtig für uns ist, daß diese Überlegungen zu einem neuen Satz der dyadischen Arithmetik hinführen, der uns noch einmal die zentrale Rolle dieser Lehre bestätigt⁶⁶. Plato unterscheidet nämlich zwei Prozesse, durch welche aus einer Zahl z eine neue Zahl z' bzw. z^* entsteht, nämlich

$$z' = 2z, \quad z^* = 2z + 1,$$

und erkannte, daß sich eine Zahl auf eine und nur eine Weise durch eine Folge dieser Prozesse aus der 1 erzeugen läßt⁶⁷.

IV

Auch nach Abtrennung der Dyadik weicht der Inhalt der Arithmetik Euklids erheblich stärker von dem ab, was uns heute als elementare Arithmetik vorschwebt, als etwa seine Kongruenz- und Ähnlichkeitslehre von unserer elementaren Geometrie.

Die Anordnung der Sätze ist aus rein sachlichen Gesichtspunkten wohl kaum zu verstehen. Z. B. sind die Sätze über Primzahlen weit getrennt über die drei Bücher verteilt, ohne daß etwa die dazwischen stehenden Sätze zu ihrem Beweis benötigt würden. Die eindeutige Zerlegbarkeit der ganzen Zahlen in Primfaktoren wird nicht formuliert.

In der Anwendung des Begriffs relativ prim spielen die Brüche (das Kürzen der Brüche) eine bevorzugte Rolle. Überhaupt herrschen Sätze über Proportionen ganzer Zahlen vor, und zwar eigenartigerweise ganz spezielle solche Sätze. Buch VIII und IX ist nämlich im wesentlichen eine Lehre von den Teilbarkeitseigenschaften von geometrischen Reihen ganzer Zahlen nebst einer Anwendung derselben auf Quadrat-, Kubus-, Flächen- und Körperzahlen. Die Terminologie Flächenzahl tritt wieder einigermaßen unvermittelt in einigen Sätzen in Buch X auf.

Die Arithmetik der geometrischen Reihen beginnt mit dem Satz VIII 1: Ist $a, b, c, \dots, d$ eine geometrische Reihe ganzer Zahlen, ist also

$$a:b = b:c = \dots:d$$

und a zu d relativ prim, so sind $a, b, c, \dots, d$ die kleinsten Zahlen in den angegebenen Verhältnissen. Dies folgt ohne weiteres aus dem allgemeinen Ergebnis VII 21 und 33, daß die kleinsten Zahlen in gegebenen Verhältnissen die relativ primen sind. Statt hierauf Bezug zu nehmen, wird aber ein direkter nicht ganz glücklicher Beweis geführt.

Euklid verwendet die geometrischen Reihen weiterhin, wie schon gesagt, zur Kennzeichnung von Quadratzahlen, Kubuszahlen, Flächenzahlen und Körperzahlen, von Zahlen also, deren Bildung durch die Geometrie nahegelegt ist. Flächenzahlen sind Zahlen

aus zwei Faktoren, den Seiten der Flächenzahl. Zwei Flächenzahlen $f = ab$ und $f' = a'b'$ sind ähnlich, wenn ihre Seiten dasselbe Verhältnis haben, also

$$a:b = a':b'$$

ist. Analog sind Körperzahlen und ähnliche Körperzahlen erklärt.

Diese Begriffsbildung ist nicht ganz ungefährlich. Ist z. B. 12 eine Flächenzahl? Welches sind dann die Seiten von 12; 3,4 oder 2,6? Offenbar kann Flächenzahl nur „Zahl in einer bestimmten Produktzerlegung“ bedeuten.

Euklid selbst aber erliegt bei einem Trugschluß über Quadratzahlen dieser Unklarheit. Er schließt nämlich im Beweis von VIII, 22 (direkt aus seiner Definition): ist c zu einer Quadratzahl ähnlich, so ist c selbst eine Quadratzahl – das ist zwar beweisbar, aus der Definition folgt es aber nicht; denn die Ähnlichkeit ist nur für ein c mit Seiten a, b erklärt. Der hiermit falsch bewiesene Satz wird wiederholt angewendet. Ein anderer Satz, nämlich, daß das Produkt ähnlicher Flächenzahlen ein Quadrat ist, wird andererseits, gemessen an den zur Verfügung stehenden Hilfsmitteln, recht umständlich bewiesen.

Das Hauptergebnis ist die Kennzeichnung ähnlicher Flächen- und Körperzahlen durch die Existenz mittlerer Proportionale: Zwischen zwei ähnlichen Flächen- (Körper-) Zahlen existiert eine (zwei) mittlere Proportionale, und existiert umgekehrt zwischen a und c eine (zwei) mittlere Proportionale, so lassen sich a und c als ähnliche Flächen- (Körper-) Zahlen auffassen. Der Sinn eines solchen Satzes ist offenbar, die Ähnlichkeit von Flächenzahlen, die geometrisch ja klar ist, durch eine von der Anschauung unabhängige Eigenschaft dieser Zahlen zu ersetzen.

Viele Einzelheiten über Quadrate und Kubuszahlen lasse ich hier beiseite. Mathematisch interessant ist der als X 28a eingeführte Satz über Konstruktion von pythagoräischen Zahlen a, b, c mit $a^2 + b^2 = c^2$. Für beliebige Zahlen ist

$$a\beta + \left(\frac{a-\beta}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+\beta}{2}\right)^2.$$

Für ähnliche Flächenzahlen a, β , die beide gerade oder beide ungerade sind, ergeben sich hieraus Zahlen der gesuchten Beschaffenheit. Satz X 28b besagt:

Ist $a^2 + b^2 = c^2$, so ist $a^2 + (b - 1)^2$ keine Quadratzahl. Denn es ist

$$(c - 1)^2 < a^2 + (b - 1)^2 < c^2,$$

und zwischen $(c - 1)^2$ und c^2 gibt es keine Quadratzahl.

Das Interesse an diesem Nachweis „nichtpythagoräischer Zahlen“ weist auf den wichtigsten Gedankenkreis hin, an welchem sich die Arithmetik der geometrischen Proportionen bewährt – auf die Arithmetik der Quadratwurzeln. Sie beginnt mit der Feststellung, daß die Quadratwurzeln aus ganzen Zahlen $n \neq m^2$ neuartige Größen sind, weil sie nicht in der zugrunde gelegten Einheit meßbar sind – daß diese aber doch der Messung zugänglich sind, weil sie Quadrate bestimmen, welche zum Einheitsquadrat kommensurabel sind und weil sie umgekehrt durch die Maßzahlen dieser Quadrate eindeutig bestimmt sind.

Euklid gibt diesen Tatbestand am Beginn des X. Buches wieder. Er definiert kommensurabel und inkommensurabel, zeigt, daß sich kommensurable Strecken wie Zahlen verhalten (X 5), Quadrate mit kommensurablen Seiten wie Quadratzahlen (X 9); also haben Quadrate, die sich nicht wie Quadratzahlen verhalten, inkommensurable Seiten, und solche Quadrate existieren (X 10).

Die Beweise dieser Sätze zeigen wieder jene mannigfachen Unebenheiten und Mängel, die auf eine nicht ganz geglückte Zusammenstückung aus älterem Gut schließen lassen. Euklid hat im VII. Buch Proportionen für Zahlen abweichend von den Proportionen allgemeiner Größen in Buch V behandelt, verwendet nun aber diese Ergebnisse für Proportionen, deren erste Glieder Strecken und deren letzte Glieder Zahlen sind. Zum Beweis von Satz 9 werden einige Rechenregeln für Proportionen benutzt, die sonst nicht erwähnt sind. Der Beweis für Satz 10 benutzt den nachfolgenden Satz 11; er enthält eine Wendung *ἐμάθομεν γάρ*, die sonst nur in der *sectio canonis* vorkommt.

Vielleicht noch deutlicher zeigt sich das Alter der Quadratwurzelarithmetik in der Terminologie von Euklid X. Es wird nämlich zuerst kommensurabel und inkommensurabel in bekannter Weise, alsdann aber „im Quadrat kommensurabel“ und „nur im Quadrat kommensurabel“ für Strecken erklärt. „Nur im Quadrat kommensurable“ Strecken sind also inkommensurabel. Die bezüglich einer Einheitsstrecke im Quadrat kommensurablen Strecken heißen

ῥητοί, was mit rational oder besser mit „aussprechbar“ übersetzt werden kann. Die übrigen Strecken heißen *ἄλογοι*, obgleich sie doch nach Euklid V ein *λόγος* zur Einheitsstrecke besitzen.

Alles in allem wird, was sich bei der Dyadik so entschieden aufdrängte, auch hier wahrscheinlich: daß wir in Buch VIII und IX und im Anfang von Buch X die gelegentlich durchbrochenen und ergänzten Stücke einer älteren Theorie, der Arithmetik der geometrischen Reihen, vor uns haben.

Die wesentlichen Gedanken dieser Theorie lassen sich ebenfalls für die platonische Zeit nachweisen, und was wichtiger ist, mit allgemeinen naturphilosophischen Fragen in Verbindung setzen, die die eigenartige Weiterentwicklung, welche die griechische Arithmetik genommen hat, verständlich machen.

Es ist eine (z. B. aus Aristoteles belegbare) Tatsache, daß man schon früh den Tonintervallen Verhältnisse ganzer Zahlen zuordnete. Von hier aus ist die Bevorzugung der Proportionen, das Interesse am Kürzen der Brüche und die Entdeckung des Begriffs relativ prim zu verstehen. Einen näheren Einblick in die theoretische Musik gewährt uns die *sectio canonis*⁶⁸. Diese ist eine Art theoretischer Physik der Harmonie – eine im Ansatz saubere Theorie, die Hypothesen und deren mathematische Konsequenzen einerseits und empirische Tatsachen und ihre Relationen andererseits ganz klar trennt.

Was den Quellenwert der *sectio canonis* angeht, so gilt sie aus sprachlichen Gründen als Euklidisch oder als frühes Exzerpt aus Euklid. Radikale Zweifel gegen die Echtheit sind nicht geäußert⁶⁹.

Ptolemäus, der beste Musikschriftsteller der späteren Zeit, berichtet über die pythagoräische Harmonielehre und gibt dabei – ohne Euklid zu nennen – genau den Inhalt der *sectio canonis* wieder. Neben der einfachen Zuordnung von Brüchen zu den Intervallen ist dies die einzige von ihm als pythagoräisch vorgetragene Lehre; daneben berichtet er über Aristoxenos. Da er die Pythagoräer (übrigens mit einem gewissen Recht) kritisiert, verdient er in seinen historischen Angaben wohl Glauben⁷⁰.

Nun zum Inhalt!

Die Theorie beruht auf zwei physikalischen Hypothesen und auf drei empirisch musikalischen Tatsachen.

H 1. Tonintervalle werden durch Proportionen zweier Zahlen gemessen.

H 2. Harmonische Intervalle werden durch Verhältnisse $n/1$ oder $(n+1)/n$ mit $n > 1$ gemessen. Und umgekehrt ist jedes Intervall $n/1$ harmonisch.

Die empirischen Eigenschaften von Oktave, Quinte, Quarte und ihrer Zusammensetzung sind:

E 1. Die Oktave einer Oktave ist harmonisch.

E 2. Quinte einer Quinte und Quarte einer Quarte sind nicht harmonisch.

E 3. Durch Zusammensetzung von Quinte und Quarte entsteht die Oktave.

Es werden nun die drei folgenden arithmetischen Hilfssätze formuliert:

(1) Sind a, b, c ganze Zahlen, die eine geometrische Reihe bilden, ist also $a:b = b:c$ und b/a eine ganze Zahl, so ist auch c/a eine ganze Zahl.

(2) Sind a, b, c ganze Zahlen, die eine geometrische Reihe bilden, und ist c/a ganzzahlig, so ist auch b/a ganzzahlig. Dies folgt aus der Umkehrung des oben angegebenen Satzes VIII 1, die Euklid in VIII 3 beweist. Die gekürzte Reihe a, b, c muß mit 1 beginnen.

(3) Sind a, c ganze Zahlen und $c/a = (n+1)/n$, so gibt es keine ganze Zahl b , so daß a, b, c eine geometrische Reihe bilden. Denn ist $\alpha:\gamma = a:c$ und gäbe es ein b der gewünschten Eigenschaft, so müßte es nach Euklid VIII, 8 auch ein β mit $\alpha:\beta = \beta:\gamma$ geben. Nehmen wir $\alpha = n, \gamma = n+1$, so müßte $\beta^2 = n(n+1)$ sein. Aber da $n^2 < n(n+1) < (n+1)^2$ ist, gibt es ein solches β nicht.

Nun kann man die harmonischen Intervalle bestimmen.

1. Ist b/a das Intervall der Oktave und $a:b = b:c$, also c/a das Intervall der Doppeloktave, so ist c/a nach (3) nicht gleich $(n+1)/n$, also nach E1 und H2 gleich $n/1$, also ist nach (2) auch das Oktavenintervall gleich $1/1$.

2. Quinte und Quartintervall sind nach E2 und H2 nicht von der Form $n/1$, also gleich $(n+1)/n, (m+1)/m$ mit geeignetem n, m .

3. Die beiden größten Zahlen der Form $(q+1)/q$ sind $3/2, 4/3$. Ihr Produkt ist gleich 2, und $(n+1)/n \cdot (m+1)/m < 2$, falls $n < m$ und $n \neq 2$ oder $m \neq 3$, also ist $n = 2, m = 3$ und $l = 2$.

Der zweite Teil des Beweises von (3) ist vielleicht die Ursache von Theons Bemerkung, daß der Ton $9/8$ unteilbar ist, weil eins unteilbar ist.

Die Datierung der in der sectio canonis vorgetragenen Theorie ist nicht sicher, aber die Zusammensetzung von Intervallen muß eben solange bekannt sein, wie die Zuordnung von Tonintervallen und Brüchen. Dann liegt aber die Frage nach „halbierbaren“ Intervallen, d. h. also nach geometrischen Reihen ganzer Zahlen nahe, und wir sehen daher gewiß mit Recht die Herkunft dieser Arithmetik in der Harmonielehre.

Daß die Kenntnisse über Flächen- und Körperzahlen vorplatonische sind, folgt aus dem Timäus. Nach Schilderung der ἀναλογία als des καλλίστου δεσµός heißt es: ein Mittel b genügt aber nur, flächenhafte a, c zusammenzubinden zu $a:b = b:c$, im Räumlichen bedarf es zwei mittlerer. Weil die Welt aber körperlich ist, und weil es jedenfalls Licht und Erde geben müßte als Elemente, denn die Welt sollte sichtbar und tastbar sein, so sind also, um diese körperlich zusammenzuhalten, zwei mittlere Elemente Luft und Wasser nötig⁷¹.

Die beiden für die Definition der Quadratwurzeln maßgeblichen Gesichtspunkte werden mit aller Deutlichkeit von Theätet im gleichbenannten platonischen Dialog ausgesprochen⁷²; er nennt die Wurzeln δυνάμεις, was mit „Erzeugende“ übersetzt werden könnte; sie haben keine Länge, wie die kommensurablen Strecken, werden aber durch das Quadrat gemessen, das sie erzeugen. Daß es Quadrate mit dem Inhaltsmaß n gibt, wird vorausgesetzt. Einen Beweis für die Irrationalität von $\sqrt{n}$ führt Theätet nicht; er ergibt sich aber unmittelbar aus Euklid VIII, 14 und 11. Teilt die Quadratzahl a^2 die Quadratzahl b^2 , so ist b/a nach VIII, 14 eine ganze Zahl c und nach VIII, 11 ist $b^2/a^2 = c^2$ selbst eine Quadratzahl. Wäre nun $\sqrt{n}$ mit der Einheitsstrecke 1 kommu-

surabel und diese beiden in dem neuen Maß s meßbar, $\sqrt{n} = ps$, $1 = qs$, so wäre $p^2s^2 = nq^2s^2$, also $p^2 = nq^2$.

Die Krönung der Arithmetik der Quadratwurzeln ist Euklid X. Das Ziel des Buches ist, so kann man sagen, gewisse Klassen der $\acute{\alpha}\lambda\omicron\gamma\omicron\iota$ -Strecken doch aussprechbar zu machen.

Als Beleg für diese Interpretation nenne ich die sog. Binomiale, die Strecke $\sqrt{n} + \sqrt{m}$ ἐκ δύο ὁνομάτων, die also durch die zwei aussprechbaren Größen n, m (bzw. $\sqrt{n}, \sqrt{m}$) ihren „Doppelnamen“ erhält. Ihre tiefere Berechtigung findet diese Benennung erst durch den Nachweis, daß einer Binomialen $\sqrt{n} + \sqrt{m}$ die Namen n, m eindeutig zugeordnet sind. Dies wird in der Tat bewiesen. Aus

$$\sqrt{n} + \sqrt{m} = \sqrt{n'} + \sqrt{m'}, n < m, n' < m', nm < n'm', nm \neq l^2$$

folgt $n = n', m = m'$.

Denn zunächst folgt durch Quadrieren

$$\frac{n + m - n' - m'}{2} = \sqrt{n'm'} - \sqrt{nm};$$

$\sqrt{n'm'} - \sqrt{nm} = r$ wäre also rational (X 42). Dann ist aber

$$n'm' = 2r\sqrt{nm} + nm + r^2,$$

und $\sqrt{nm}$ wäre ebenfalls rational, entgegen der Voraussetzung (X 26). Die Binomiale ist damit arithmetisch gekennzeichnet.

Insgesamt werden 23 Typen algebraischer Irrationalitäten aufgestellt und auf gewisse rationale „Namen“ zurückgeführt. Es wird gezeigt, daß dies für jeden Typ nur auf eine Weise möglich ist und daß die 23 Typen von Irrationalitäten disjunkte Klassen sind. Das ist also in unserer Ausdrucksweise die exakte Kennzeichnung dieser Größen als algebraische Zahlen. Fernere Erwägungen betreffen das Verhalten der Typen, wenn die Maßeinheit durch eine andere zu ihr kommensurable oder „aussprechbare“ Strecke ersetzt wird. Als Beispiel nenne ich neben der Binomialen die Apotome $\sqrt{n} - \sqrt{m}$, die Mediale $\sqrt[3]{n}$, die erste Bimediale $\sqrt[3]{n^2} + \sqrt[3]{n}$ und die Bimedialapotome $\sqrt[3]{n^2} - \sqrt[3]{n}$. Die Klassifizierung beruht auf dem Nachweis, daß die Größen entweder Gleichungen

$$x^2 = \sqrt{n} \pm \sqrt{m} \text{ oder } x^2 = \sqrt{n}$$

genügen oder selbst gleich $\sqrt{n} \pm \sqrt{m}$ sind, und auf einer Klassifizierung der Größen $\sqrt{n} \pm \sqrt{m}$.

Die vielen algebraischen Umformungen bereiten nur das Ergebnis vor. Zu leicht entsteht der Anschein, der Inhalt von Euklid X wäre algebraisch formal und bestünde in einer geometrischen Auflösung gewisser quadratischer und biquadratischer Gleichungen. Ein Blick auf X 17 zeigt aber, daß dort nicht nur die Gleichung $ax - x^2 = b$ aufgelöst wird, sondern daß zugleich die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür angegeben werden, daß die Wurzeln der Gleichung zu a kommensurabel sind, und Analoges gilt für alle anderen Fälle.

Die Auswahl der Typen findet zwar eine Erklärung in der Tatsache, daß sie eine Klassifizierung für die Seiten der regelmäßigen Körper liefert, wenn der Radius der umbeschriebenen Kugel als Einheit genommen wird. Für die Konstruktion der Körper würde aber eine algebraisch-geometrische Lösungsvorschrift der behandelten Gleichungen genügt haben. Die arithmetische Einstellung ist also eine Grundtatsache, die sich nicht aus der Geometrie der regelmäßigen Körper ableiten läßt. Diese Einstellung ergibt sich aber aufs natürlichste aus der Arithmetik der geometrischen Reihen und diese gewinnt als Vorstufe der algebraischen Arithmetik erst ihr tieferes Interesse.

So können wir an Stelle der Konjektur vom scandale logique, allein durch Besinnung auf das quellenmäßig Gesicherte, das Bild einer Entwicklung setzen, die mit Dyadik und Harmonielehre beginnend über die Arithmetik der Flächen- und Körperzahlen zur Zahlentheorie quadratischer und biquadratischer Irrationalitäten führt, die, mit Pythagoras oder den Pythagoräern beginnend, von Plato philosophisch widerspiegelt und gefördert, ihren Abschluß in Euklid X findet, einer Leistung, die sich wohl an Tiefe und Wert mit der des Eudoxos messen kann.

In dieser Entwicklung sehe ich die Antwort auf die zu Beginn aufgeworfene Frage: in welchem mathematischen Ergebnis sich das Dogma des Pythagoras widerspiegelt: „alles ist Zahl“.

IN: DAS EXAKTE DENKEN
DER GRIECHEN 15-45

ANMERKUNGEN

- ¹⁾ F. Rudio, Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und des Hippokrates. Leipzig 1907.
- ²⁾ L. Spengel, Eudemi fragmenta. Berlin 1866. S. 113–137.
- ³⁾ Staatsmann 266 B.
- ⁴⁾ Gesetze 737 E bis 738 A.
- ⁵⁾ Republik 546 BD.
- ⁶⁾ P. Marquard, Aristoxenos, Die harmonischen Fragmente. Berlin 1868. S. 45.
- ⁷⁾ Proclus in Euclidem 65, 19. Vgl. Eudemi fragmenta a. a. O. S. 114.
- ⁸⁾ Suidas Lexicon 1120. Suidas ist ein byzantinischer Lexikograph, der um 1000 n. Chr. lebte.
- ⁹⁾ Euclid ed. Heiberg. Leipzig. Bd. 5, S. 654.
- ¹⁰⁾ Gereke-Norden, Einleitung II 2: Geschichte der Mathematik. S. 419.
- ¹¹⁾ F. Lindemann, Sitzber. d. Münch. Akad. Bd. 26 (1896), S. 527 n. S. 656.
- ¹²⁾ Vgl. in Pauly-Wissowa RE den Artikel von Harder, Timäus Locrus.
- ¹³⁾ Vgl. hierzu E. Frank, Plato und die sog. Pythagoräer. Halle 1923.
- ¹⁴⁾ Vgl. E. Sachs, Die fünf platonischen Körper. Berlin 1917. S. 23–41.
- ¹⁵⁾ M. Cantor, Geschichte der Mathematik. Leipzig 1880. S. 124.
- ¹⁶⁾ Euclid ed. Heiberg. Bd. 5, S. 280.
- ¹⁷⁾ Archimedes, übersetzt von Heath und Klemm. Berlin 1914. S. 39.
- ¹⁸⁾ J. L. Heiberg, Mathematisches zu Aristoteles. Abh. Gesch. d. Math. Wiss. Bd. 18. Leipzig 1904. S. 11, 12.
- ¹⁹⁾ Vgl. in Quellen u. Studien, Bd. 2, S. 329: O. Becker, Eudoxos-Studien.
- ²⁰⁾ H. Hankel, Zur Geschichte der Mathematik in Altertum und Mittelalter. Leipzig 1874. S. 93.
- ²¹⁾ W. Thomson u. G. Junge, The Commentary of Pappus. Cambridge 1930.
- ²²⁾ Pappus Buch 3, insbesondere Kap. 47.
- ²³⁾ Theo Smyrnaeus ed. Hiller. Halle 1878. S. 66–72.
- ²⁴⁾ Vgl. Theo ed. Hiller S. 50.
- ²⁵⁾ Timäus 31 C 2.
- ²⁶⁾ Timäus 36 A 3.
- ²⁷⁾ Epinomis 990 E.

- ²⁸⁾ Vgl. H. Weil u. Th. Reinach, Plutarque, De la musique. Paris 1900. S. 92. Den Hinweis auf diese und die in 30. genannte Stelle verdanke ich E. Frank.
- ²⁹⁾ H. Diehls, Vorsokratiker. Berlin 1912. S. 334.
- ³⁰⁾ Aristoteles bemerkt in der Nikomachischen Ethik Buch 5, Kap. 7, 1131 B 12: „eine solche Analogie nennen die Mathematiker die geometrische“, 1132 A2 wird die arithmetische Analogie erwähnt. In H. Diehls, Vorsokratiker, S. 304, 18 spielt offenbar Speusipp auf die arithmetische Analogie an.
- ³¹⁾ Theo ed. Hiller, S. 107; vgl. auch S. 73.
- ³²⁾ a. a. O. S. 82.
- ³³⁾ a. a. O. S. 83.
- ³⁴⁾ a. a. O. S. 81.
- ³⁵⁾ Dies ist die Vermutung von E. Frank.
- ³⁶⁾ H. Diehls, Vorsokratiker. S. 327.
- ³⁷⁾ Aristoteles, Physik 203 A 10.
- ³⁸⁾ Metaphysik 1020 B 3.
- ³⁹⁾ a. a. O. 1092 B 8.
- ⁴⁰⁾ Gesetze 819.
- ⁴¹⁾ Hero ed. Heiberg, Bd. 4, Definitiones. Leipzig 1912. S. 99.
- ⁴²⁾ P. Tannery, La géométrie grecque, Paris 1887. S. 90.
- ⁴³⁾ In Kultur der Gegenwart T 3, Abt. 1. Leipzig 1913: H. G. Zeuthen, Die Mathematik im Altertum und Mittelalter.
- ⁴⁴⁾ In Panbücherei, Charlottenburg 1928: H. Hasse und H. Scholz, Grundlagen der griechischen Mathematik. Vgl. demgegenüber Hankel, a. a. O. S. 101, der eindrucksvoll die Kühnheit, die im Gedanken des Irrationalen liegt, schildert.
- ⁴⁵⁾ Gesetze 819 D.
- ⁴⁶⁾ Metaphysik 983 A 15.
- ⁴⁷⁾ Vgl. insbesondere Gesetze 819 D–820.
- ⁴⁸⁾ Aristoteles 76 B 9.
- ⁴⁹⁾ Hierauf verwies schon Hankel a. a. O. S. 102. Vgl. ferner O. Becker, Quellen und Studien Bd. 3, S. 533.
- ⁵⁰⁾ Gorgias 451 B/C.
- ⁵¹⁾ Protagoras 397 A/B.
- ⁵²⁾ Politikos 262.

Anmerkungen

- ⁵³⁾ Hipplias I 303.
- ⁵⁴⁾ Eutyphron 12 D.
- ⁵⁵⁾ Parmenides 143/144.
- ⁵⁶⁾ Gesetze 895 E.
- ⁵⁷⁾ Menon 82 C bis 85 B.
- ⁵⁸⁾ Weitere Stellen in: F. Ast, Lexicon Platonicum. Leipzig 1835. unter ἀγχιον.
- ⁵⁹⁾ Metaphysik 1084 A.
- ⁶⁰⁾ Heiberg, Math. zu Aristot. a. a. O. S. 24.
- ⁶¹⁾ Metaphysik Buch 4, Kap. 5.
- ⁶²⁾ Metaphysik 987 A 15.
- ⁶³⁾ Physik 203 A 10.
- ⁶⁴⁾ Manche Einzelheiten, die Aristoteles berichtet, klingen allerdings auch nach Zahlenspielererei, die Wertschätzung der 10, die Tafel der 10 Gegensatzpaare in Metaphysik Buch 4, Kap. 5 und die Erläuterung der drei Gegensatzpaare begrenzt – unbegrenzt, ungerade – gerade, quadratisch – rechteckig in ihrem Zusammenhang untereinander in Physik 203 A 10; er beruhe darauf, daß die Summe der ungeraden Zahlen eine Quadratzahl, die Summe der geraden Zahlen eine rechteckige Zahl sei.
- ⁶⁵⁾ Epinomis 990 C 5.
- ⁶⁶⁾ Aristoteles Metaphysik 988 A und Kommentar des Alexander hierzu und Metaphysik 1084 A.
- ⁶⁷⁾ Vgl. auch J. Stenzel, Zahl und Gestalt bei Plato und Aristoteles. Leipzig 1924. Die Veranschaulichung der Abstammung der Zahlen durch einen Graphen ist einwandfrei, aber mit figurierten Zahlen hat das natürlich nichts zu tun.
- ⁶⁸⁾ Euclid ed. Heiberg und Monge Bd. 8. Leipzig 1914. S. 158.
- ⁶⁹⁾ a. a. O. S. XXXVII und Heiberg, Studien über Euclid. Leipzig 1882, S. 52.
- ⁷⁰⁾ Klaudios Ptolemaios, Harmonielehre Buch 1, Kap. 5, 6. Übersetzt von J. Düring, Göteborgs Högskolas Årsskrift Bd. 40 (1934), S. 29.
- ⁷¹⁾ Timäus 31 B 4 und 32 A 7.
- ⁷²⁾ Theätet 147 D.
- ⁷³⁾ Zur Platonphilologie und Lebensgeschichte Platos vgl. U. v. Wilamowitz, Plato, Berlin, 2. Aufl., 1920.
- ⁷⁴⁾ Menon 82 C bis 85 B.
- ⁷⁵⁾ Im Phädon.
- ⁷⁶⁾ Zur Dialektik vgl. außer den in Anmerkungen ⁵⁴⁾, ⁵⁵⁾ und ⁵⁶⁾ genannten Werken H. Gadamer, Platos dialektische Ethik, Leipzig 1931.
- ⁷⁷⁾ U. v. Wilamowitz a. a. O., Bd. 1, S. 270 ff. und S. 489 ff.
- ⁷⁸⁾ Vgl. z. B. J. Stenzel, Zahl und Gestalt bei Platon und Aristoteles, 2. Aufl., Leipzig, Berlin 1933, S. 66 f.
- ⁷⁹⁾ Vgl. P. Natorp, Platos Ideenlehre, Leipzig, 2. Aufl., 1922, S. 433 ff.
- ⁸⁰⁾ L. Robin, La théorie platonicienne des idées et des nombres d'après Aristote, Thèse, Paris 1908.
- ⁸¹⁾ Vgl. E. Zeller, Platonische Studien, Tübingen 1839, S. 199–300.
- ⁸²⁾ Natorp a. a. O. und Stenzel a. a. O., S. 68 ff.
- ⁸³⁾ Staat 518 C.
- ⁸⁴⁾ Brief VII 341 C.
- ⁸⁵⁾ Natorp a. a. O. Vgl. jedoch den Anhang, in welchem sich der Verfasser von seinem eigenen Entwurf distanziert.
- ⁸⁶⁾ J. Stenzel, Studien zur Entwicklung der Platonischen Dialektik von Sokrates zu Aristoteles, Breslau 1917, insbesondere S. 45–61.
- ⁸⁷⁾ J. Stenzel, Zahl und Gestalt, insbesondere S. 30 ff.
- ⁸⁸⁾ M. Wundt, Platons Parmenides, Stuttgart und Berlin 1935.
- ⁸⁹⁾ A. Speiser, Ein Parmenideskommentar, Leipzig 1937.
- ⁹⁰⁾ Staat 508 A bis 509 B (Ende von Buch VI).
- ⁹¹⁾ Staat 514 A bis 518 C (Beginn von Buch VII).
- ⁹²⁾ Staat 476 E bis 477 B (und weiter bis zum Ende von Buch V).
- ⁹³⁾ Staat 479 A.
- ⁹⁴⁾ Die Arithmetik der Griechen, Abschnitt III.
- ⁹⁵⁾ E. Herzfeld, Ausgrabungen von Samarra, Bd. 5, Berlin 1930.
- ⁹⁶⁾ O. Neugebauer, Vorlesungen über die Geschichte der antiken mathematischen Wissenschaften, Berlin 1934, S. 168.
- ⁹⁷⁾ O. Neugebauer, Quellen und Studien, Bd. 3 (1936), S. 245.
- ⁹⁸⁾ Vgl. auch F. Thureau-Dangin, Textes mathématiques Babyloniens, Leiden 1938.
- ⁹⁹⁾ Dies beweisen die mit einem Quadratnetz bedeckten halbfertigen Reliefs der Nekropole von Kasiya.
- ¹⁰⁰⁾ F. Lindemann, Sitzungsberichte der Münchener Akademie, Bd. 26 (1896), S. 527 und 656.
- ¹⁰¹⁾ Metaphysik Buch 4, Kapitel 5.