

2878 paf
HANKEL, H.
1874

Zur Geschichte der Mathematik
in Griechenland und Mittelalter

Mathematik der Griechen.

I. Periode.

Von Thales bis auf die Gründung der alexandrinischen
Schule.

600 — 300.

Die ionischen Mathematiker.*)

Von dem Momente an, wo griechische Philosophen anfangen unsere Aufmerksamkeit durch ihre mathematischen Leistungen auf sich zu ziehen, verändert sich das Bild, welches die Mathematik zeigt, von Grund aus. Haben wir bei jenen alten Culturvölkern nur Handwerk und Routine gesehen, nur herkömmliche Regeln gefunden, welche vereinzelt, unbegriffen, aus handgreiflicher Empirie entstanden einer rohen Praxis dienten, so erkannte der griechische Geist im ersten Augenblicke, wo er diesen Stoff kennen lernte, dass in ihm ein weit über jene Zwecke hinausgehender, des

*) Von den spärlichen Quellen, welche uns für die Geschichte der Mathematik bis auf Platon fliessen, habe ich geglaubt, die Nachrichten später Compileren durchaus als höchst unsicher ansehen zu müssen, so dass uns als zuverlässige Quelle, ausser vereinzelten Notizen in Platon's und Aristoteles' Schriften, nur die Geschichten der Arithmetik und Geometrie von dem Aristoteliker Eudemos von Rhodos (300 v. Chr.) übrig bleiben, der in der Zeit jener Periode nahe genug steht und einen nüchternen, kritischen Sinn zeigt. Leider sind uns jene werthvollen Schriften nur in einzelnen Bruchstücken erhalten, welche uns verschiedene Commentatoren überliefert haben, namentlich Proklus in seinem Commentar zum 1. Buche von Euklid's Elementen (griech. mit den Elem. 1533. Basel, lat. von Barocci, 1560. Venedig); ein grösseres dieser Bruchstücke (p. 19 ed. Basiliensis) s. bei Bretschneider, d. Geom. vor Euklid. (Leipzig 1870.) p. 27.

Mathematik der Griechen.

I. Periode.

Von Thales bis auf die Gründung der alexandrinischen Schule.

600 — 300.

Die ionischen Mathematiker.*)

Von dem Momente an, wo griechische Philosophen anfangen unsere Aufmerksamkeit durch ihre mathematischen Leistungen auf sich zu ziehen, verändert sich das Bild, welches die Mathematik zeigt, von Grund aus. Haben wir bei jenen alten Culturvölkern nur Handwerk und Routine gesehen, nur herkömmliche Regeln gefunden, welche vereinzelt, unbegriffen, aus handgreiflicher Empirie entstanden einer rohen Praxis dienten, so erkannte der griechische Geist im ersten Augenblicke, wo er diesen Stoff kennen lernte, dass in ihm ein weit über jene Zwecke hinausgehender, des

*) Von den spärlichen Quellen, welche uns für die Geschichte der Mathematik bis auf Platon fliessen, habe ich geglaubt, die Nachrichten später Compileren durchaus als höchst unsicher ansehen zu müssen, so dass uns als zuverlässige Quelle, ausser vereinzelten Notizen in Platon's und Aristoteles' Schriften, nur die Geschichten der Arithmetik und Geometrie von dem Aristoteliker Eudemus von Rhodos (300 v. Chr.) übrig bleiben, der in der Zeit jener Periode nahe genug steht und einen nüchternen, kritischen Sinn zeigt. Leider sind uns jene werthvollen Schriften nur in einzelnen Bruchstücken erhalten, welche uns verschiedene Commentatoren überliefert haben, namentlich Proklus in seinem Commentar zum 1. Buche von Euklid's Elementen (griech. mit den Elem. 1533. Basel, lat. von Barocci. 1560. Venedig); ein grösseres dieser Bruchstücke (p. 19 ed. Basiliensis) s. bei Bretschneider, d. Geom. vor Euklid. (Leipzig 1870.) p. 27.

besonderen Nachdenkens werther, in allgemeiner Form auszusprechender, kurz — ein wissenschaftlicher Inhalt verborgen sei.

Das ist das hohe Verdienst der ersten griechischen Mathematiker und man braucht nicht zu fürchten, dass dasselbe verkleinert wird, wenn man zugibt, dass sie ihren Rohstoff der uralten ägyptischen Cultur entlehnten. *) Dass eine ganze Reihe der älteren griechischen Geometer (namentlich Thales, Oenopides, Pythagoras, Demokrit und noch im 4. Jahrhundert Platon und Eudoxus) Aegypten besucht und sich mit den mathematischen und astronomischen Kenntnissen der Priester vertraut gemacht hat, ist wohl verbürgt und über allen Zweifel gewiss. Schon die astronomischen Kenntnisse jener alten Griechen, welche wie die berühmte Vorherverkündigung der Sonnenfinsterniss im Jahre 585 v. Chr. durch Thales eine längere Dauer vorhergegangener Beobachtungen voraussetzten, beweisen, dass sie nicht einer eben erst entstehenden Cultur entsprossen sein können. Dazu kommt, dass die Kenntnisse der ältesten Mathematiker wohl ihrer Form, nicht aber ihrem Inhalte nach über das Maass dessen hinausgehen, was wir oben bei den Aegyptern vorgefunden haben; und die meisten Sätze, deren Erfindung die Tradition jenen alten Griechen zuschreibt, waren ohne Zweifel den Aegyptern bereits bekannt.

Thales aus Milet (um 600 v. Chr.) gilt als der erste Mathematiker Griechenlands, zugleich als erster der sieben Weisen Griechenlands, als der erste Philosoph: „Er ist wenigstens der Erste, von dem uns bekannt ist, dass er in allgemeiner Richtung nach den natürlichen Ursachen der Dinge gefragt hat, während sich die Früheren theils mit mythischer Kosmogenie, theils mit vereinzelter, ethischer Reflexion begnügt hatten.“

*) Die uns anerzogene Neigung, die Cultur des hellenischen Volkes als eine primitive, selbstständige zu betrachten, und zu übersehen, wie die Griechen überall an das von den Barbaren überkommene anknüpften, ist neuerdings auf dem Gebiete der Kunstgeschichte lebhaft und schlagend von Semper bekämpft worden: „Die hellenische Kunst ist secundäre Schöpfung; nicht der Stoff, wohl aber die Idee ist neu, die sie belebt“ Semper, der Stil. Frankfurt 1860, t. I. p. 150, 219 und passim).

Unter den mathematischen Leistungen des Thales war im Alterthume vorzugsweise berühmt die Lösung einer der praktischen Geometrie angehörenden Aufgabe: Die Messung der Höhe der Pyramiden aus ihrem Schatten. Nach dem einen Berichte*) mass Thales den Schatten der Pyramide in dem Augenblicke, in welchem der Schatten eines daneben in den Boden gesteckten Stabes dessen Länge gleich befunden wurde. Die Höhe der Pyramide war dann ihrer Schattenlänge gleich. Wenn ein anderer Bericht**) ihn dieselbe Aufgabe lösen lässt, indem er aus dem Verhältnisse der Länge des Stabes und seines Schattens zu irgend einer Zeit und aus der Länge des Pyramidenschattens die Höhe bestimmt, so ist dies nur eine weitere Ausschmückung jenes durch seine Einfachheit glaubwürdigeren Berichtes.

Eudemus***) erzählt ferner, dass Thales eine Methode besessen habe zur Messung der Entfernung der Schiffe auf dem Meere vom Lande. Welcher Art diese gewesen sei, deutet er jedoch nur dadurch an, dass er sagt, Thales habe sich dabei des Satzes bedienen müssen, dass zwei Dreiecke congruent seien, wenn eine Seite und zwei Winkel in beiden übereinstimmen. Es geht hieraus wenigstens soviel hervor, dass er sich bei seiner Bestimmung einer gemessenen Standlinie bediente.

Wenn ferner berichtet wird, dass die Sätze von der Gleichheit der Scheitelwinkel†) sowie von der Gleichheit der Winkel an der Basis eines gleichschenkligen Dreiecks††) Erfindungen des Thales seien, so dürfen wir hieraus wohl einen Schluss ziehen, worin die Bedeutung des letzteren für die Geschichte der Geometrie besteht. Die Anschauung und unbewusste Ueberzeugung, dass zwei gleich lange Stäbe, welche man mit ihren oberen Enden verbunden auf den Boden stellt, gegen die Horizontale gleich geneigt sind; besass bereits der erste Mensch, der zwei solche Stäbe zum Bau eines Zeltcs oder Dachgiebels verwendete; es war aber

*) Hieronymus aus Rhodos bei Diogenes Laert. I, 27.

**) Plutarch, conviv. sept. sapient. c. 2.

***) Proklus, a. a. O. Comment. ad prop. 26 lib. I. Euclid.

†) Nach Eudemus bei Prokl. ad prop. 15.

††) Wahrscheinlich nach Eud. a. a. O. ad prop. 5.

das Verdienst jenes Philosophen, diese unmittelbare Ueberzeugung zuerst zum Bewusstsein, jene Anschauung zu einem abstracten Ausdruck zu bringen und so den Anfang zu einer wissenschaftlichen Behandlung der Raumverhältnisse zu machen, indem er die mehr oder minder verworrenen und unbewussten Anschauungen analysirte und in die Form fester, von dem Verstande zu erfassender Begriffe und Lehrsätze brachte.

Thales wird auch als der Erfinder des Satzes genannt, dass alle Winkel im Halbkreise rechte sind. *) Die Nachricht aber, er habe zuerst bewiesen, dass ein Kreis von seinem Durchmesser halbirt wird **), scheint mir denn doch durch die Auffassung der späteren an Euklid's Formen gewöhnten Geometer allzustark beeinflusst zu sein. Denn dieser Beweis würde schon einen Grad von Abstraction und ein so ausgebildetes System von Begriffen voraussetzen, dass wir ihn kaum in diese erste Periode wissenschaftlichen Denkens verlegen können, wo auch in der Philosophie noch kein Zweifel auftaucht, dass das durch naive Anschauung Erkannte unmittelbar gewiss sei. Ja nicht einmal Euklid hat einen Beweis jenes Satzes für nöthig gehalten. ***)

In Bezug aber auf alle dem Thales zugeschriebenen mathematischen Sätze muss man immer festhalten, dass selbst die besten Berichterstatter, wie Eudemus, ausser Stande waren, das, was jener selbst entdeckt, von dem zu unterscheiden, was er einfach von den Aegyptern entlehnt hatte.

Aehnliches gilt in Betreff der astronomischen Entdeckungen des ersten der ionischen Philosophen und seiner Nachfolger. Und wenn z. B. berichtet wird, dass Oenopides von Chios †), der ebenfalls Aegypten besucht hatte ††),

*) Pamphila bei Diog. I, 24. Dasselbst jedoch auch dem Pythagoras zugeschrieben.

**) Prokl. ad def. 17.

***) Euklid hat ihn vielmehr, wenn auch unmethodisch, in die def. 17 verlegt.

†) Sein Zeitalter ist unbestimmt. Jedenfalls muss er, zufolge der Angaben des Eudemus, früher als Anaxagoras sein, als dessen Zeitgenossen man ihn nach Diog. IX, 37, 41 ansehen will.

††) Diodor I, 96.

zuerst die Aufgaben: von einem Punkte auf eine Gerade eine Senkrechte zu fällen, und an eine Gerade in einem Punkte einen gegebenen Winkel abzutragen, gelöst habe*), so kann es wohl keinem Zweifel unterliegen, dass Oenopides die entsprechenden Constructionen bei den Aegyptern kennen gelernt hat.

Wenn aber die Lösung solcher Aufgaben noch längere Zeit nach Thales erwähnenswerth schien, so leuchtet ein, dass sich noch damals die Mathematik in dem ersten Kindheitszustande befand und die von Thales gegebene Anregung zum Studium geometrischer Figuren in seinem Vaterlande ohne erhebliche Früchte blieb; die ionischen Philosophen, ganz einer Erklärung der Natur aus wirkenden Ursachen zugewandt, mochten sich zu der abstracten Mathematik nicht besonders hingezogen fühlen und sich mit ihr nur nebenbei, soweit es etwa für ihre astronomischen Speculationen und rohen Beobachtungen nöthig war, beschäftigen.

Pythagoras und seine Schule.

Umfassend dagegen und in selbstständigem Interesse wurde bald nach der Zeit des Thales die Mathematik in den dorischen Colonieen Grossgriechenlands betrieben.

Pythagoras von Samos (etwa 580–500) darf als der Vater der Mathematik bezeichnet werden. „Die Pythagoriker waren die Ersten, welche die Mathematik weiter förderten.“**) Wenn es sich nun darum handelt, die Stellung dieses Mannes und seiner Schule in der Geschichte der Mathematik treu darzustellen, so befinden wir uns angesichts der Nothwendigkeit uns kurz zu fassen in einer nicht geringen Verlegenheit. Denn einerseits sind die Berichte über das Leben, die Lehren und Entdeckungen des Pythagoras und seiner Schule bei den älteren, sonst glaubwürdigen Schriftstellern so mager und lückenhaft, dass nicht allein wir Neueren uns kein ausreichendes Bild von der so ausserordentlich interessanten mathematisch-philosophischen Schule bilden können, sondern auch annehmen müssen, dass die Berichterstatter selbst

*) Eudemus a. a. O. ad prop. 12 und 23.

**) Aristoteles, Metaph. I, 5. 985, a, 23.

nur sehr unvollkommene Kenntniss von ihr gehabt haben; — andererseits zeichnen uns zwar spätere Schriftsteller ein farbenreiches und lebendiges Bild dieses wunderbaren Philosophen, indess erweist sich dies vielfach als ein tendentiöser Roman.

Unter den verschiedenen Strömungen, von welchen der griechische Geist nach Erschöpfung seines specifischen Inhaltes in den eigentlich klassischen Jahrhunderten durch seine Berührung mit dem orientalischen Geiste ergriffen wurde, tritt bereits vom 1. Jahrh. v. Chr. an eine ethisch-religiöse, mystisch-speculative immer mächtiger hervor.

Unter allen griechischen Philosophen war Pythagoras der einzige gewesen, welcher ähnliche Züge zeigte: er hatte eine Schule gegründet, welche mehr als eine Akademie war, welche ihre Schüler zu einem festen Verbande einigte, der durch strenge Disciplin, durch Askese, geheimnissvolle Gottesdienste und religiöse Speculation zugleich Verstand und Gemüth bilden und erheben sollte. So ist es begreiflich, wie jene neue Richtung an ihn anknüpfen und sich selbst nur als eine Erneuerung der alten, lange unbeachteten und missverstandenen pythagorischen ansehen konnte. Alexandrien war der Ausgangspunct dieser s. g. neupythagorischen Schule, welche im Laufe der Zeit mehr und mehr jüdische, persische und bald auch indische religiös-mystische Vorstellungen in wunderlichem Synkretismus in ihren Ideenkreis aufnahm. Es konnte nicht fehlen, dass sie die grosse, schon von Herodot hervorgehobene Verwandtschaft entdeckten, welche nicht wenige uralte metaphysische und ethische Lehren der pythagorischen Schule mit ägyptischen und persischen Speculationen zeigen; eine alte Ueberlieferung erzählte von einem langen Aufenthalte des Pythagoras in Aegypten; und so kam es, dass die Philosophen dieser Richtung bald Orientalisches und Pythagorisches bis zur Verwirrung mit einander vermischten.

Es ist begreiflich, dass die Neupythagoriker, um ihren historischen Zusammenhang mit jener alten Zeit zu erhalten, darauf bedacht sein mussten, die äusserst lückenhafte Tradition zu vervollständigen. So entstanden denn bereits im 1. Jahrh. v. Chr. zahlreiche sogenannte pythagorische Schriften

und fabelhafte Biographien des Altmeisters, welche von Jahr zu Jahr stärkere orientalische Färbung annahmen, ja sogar später in der Absicht, Christo gegenüber heidnische Heilige zu schaffen, sich nicht scheuten, ihrem Pythagoras und selbst neueren Pythagorikern, wie dem Apollonius von Tyana, zahlreiche Wunderthaten, ja selbst dem Meister göttlichen Ursprung anzudichten. Wir müssen bezüglich einer weiteren Schilderung dieser neupythagorischen Richtung auf die Werke über Geschichte der Philosophie verweisen; hier darf diese eigenthümliche Erscheinung nur insoweit angedeutet werden, als sie eben jene Thatsache zu erklären vermag, dass die Quellen über das Leben und die Lehre des alten italischen Philosophen um so reichlicheren Stoff liefern, je weiter man sich von der Zeit des Pythagoras entfernt. Es gibt freilich auch Historiker*), welche in der That die Neupythagoreer als eine neue Blüthe einer Jahrhunderte lang latent gewesenen Schule betrachten, und diese späten Berichte, wenn auch nicht für ganz rein, doch als aus der wahren Tradition entsprungen ansehen. Ich halte mich nicht für berufen, diese Ansicht als irrig zu bekämpfen; doch scheint mir eine Herausschälung des Wahren aus diesen späten Dichtungen, wenn nicht ganz unmöglich, so doch bisher nicht gelungen.

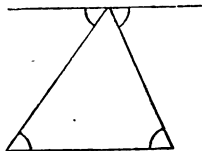
Nur das Eine geht aus Allem unzweifelhaft hervor, dass bereits die alte Pythagorische Lehre einen stark orientalisirenden Zug im Allgemeinen und im Einzelnen zeigt, der aus einem Zufall oder einer Naturanlage des Meisters nicht erklärt werden kann, sondern nothwendig hinweist auf eine, wahrscheinlich durch seinen Aufenthalt in Aegypten erlangte Bekanntschaft mit orientalischer Priesterweisheit, die noch Jahrhunderte später ein Platon und ein Eudoxus sich anzueignen nicht verschmähten.

In Bezug auf die einzelnen mathematischen Leistungen der Pythagoriker, zu deren Darstellung ich mich nun wende, ist es, glaube ich, nothwendig, sich durchaus an die alten und sicheren Zeugnisse zu halten.

Was zunächst die Geometrie betrifft, so ist es keinem Zweifel unterworfen, dass den Pythagorikern die Ehre ge-

*) Röth, Gesch. uns. abendl. Philosophie. Theil II.

bührt, die beiden wichtigsten Theoreme der Elementargeometrie entdeckt zu haben. Zuerst den Satz, dass die Winkelsumme in jedem Dreieck gleich zwei Rechten ist, wie Eudemos berichtet*), der zugleich hinzufügt, dass sie ihn bewiesen, indem sie durch die Spitze des Dreiecks eine Parallele mit der Grundlinie zogen und die beiden so an der Spitze entstehenden Winkel mit denen an der Grundlinie verglichen. Nehmen wir hiezu die durchaus verbürgte Notiz**), dass „die Alten für jede besondere Form des Dreiecks das Theorem der zwei Rechten speciell bewiesen, zuerst für das gleichseitige, dann für das gleichschenklige und zuletzt für das ungleichseitige“, so haben wir hier die erste Stufe der Entwicklung, während uns Eudemos in jenem eleganten, die ganze Parallelentheorie voraussetzenden Beweise offenbar die zweite vorführt.



Es hat für uns etwas Befremdliches, jenen einfachen Satz von den Winkeln im Dreieck in drei specielle Fälle zerlegt zu sehen. Indess ist der Fortschritt vom Besonderen zum Allgemeinen überhaupt der Entwicklungsgang der Wissenschaft; ausserdem aber ist die Zerstückelung der Theoreme jener ersten Periode der griechischen Mathematik ganz besonders eigen, wie wir noch mehrfach wahrnehmen werden.

Es schien mir von Interesse den Versuch zu machen, die Methode, nach welcher man diesen Satz zuerst gefunden und bewiesen haben mag, zu reconstituieren:

Die Pythagoriker haben sich viel mit der Construction regulärer Polygone und Polyeder beschäftigt, die in ihrer Kosmologie als die Grundformen der Elemente und des Weltalls eine wesentliche Rolle spielten. Es mag ausdrücklich bemerkt werden, dass sie die dabei verwendeten gleichseitigen Dreiecke aus zwei rechtwinkligen Dreiecken zusammensetzten.***) Den ersten Anfang dieser mathematischen

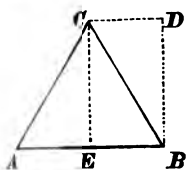
*) Prokl. ad prop. 32.

**) Geminus in Eutoc. Comm. zu Apollonii Conica ed. Halley. p. 9.

***) Platon, Timaeus. 53. C. Wie weit jedoch die Pythagoriker in diese Theorie eingedrungen sind, namentlich ob sie die geometrische

Speculationen finden wir in dem als pythagorisch bezeugten*) Satze ausgesprochen, „dass die Ebene um einen Punct herum durch sechs gleichseitige Dreiecke, vier Quadrate oder drei regelmässige Sechsecke vollständig erfüllt sei“.

Ich nehme nun an, dass dieser Satz beim constructiven Experimentiren mit gleichseitigen Dreiecken zuerst gefunden und dann nach einem Beweise dafür gesucht worden ist, dass jeder Winkel in einem solchen Dreieck $= \frac{2}{3} R$. War nun die Zerlegung in rechtwinklige Dreiecke überhaupt

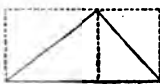


schon vorgenommen, so lag nichts näher, als, um in dem gleichseitigen Dreiecke ABC den Winkel ABC mit $ABD = R$ zu vergleichen, das Perpendikel CE zu fällen und das Rechteck zu vervollständigen.

Nun wird Niemand bezweifeln, dass die Existenz einer Figur mit vier rechten Winkeln, welche jeder Stein in der Mauer lehrte, als eine unmittelbar gewisse Thatsache von den ältesten Geometern ohne Beweis angenommen sein wird, ebenso die andere, dass ein Rechteck durch seine Diagonale in zwei congruente Hälften zerfällt.

Daraus aber geht in dem jetzigen Falle hervor, dass der Winkel $CBD = BCE = \frac{1}{2} C = \frac{1}{2} BCA = \frac{1}{2} ABC$; da nun $ABC + CBD = R$, so ist $ABC = \frac{2}{3} R$.

Man mochte dann weiter bemerken, dass man eine ganz ähnliche Figur auch für ein gleichschenkliges Dreieck mit der Spitze C zeichnen könne, an welcher dieselbe Betrachtung zu dem Satze $A + \frac{1}{2} C = R$ führte. Indem man diesem Satze die elegantere Form $A + B + C = 2R$ gab, mag man überhaupt erst auf die Winkelsumme im Dreieck aufmerksam geworden sein, und es entstand die weitere Auf-



gabe, das Analogon auch für das ungleichseitige Dreieck zu finden. Dazu bedurfte es einer Abänderung der Construction in beistehender Weise.

Construction des Fünfecks und des Pentagondodekaeders gekannt haben, lässt sich nicht mit Sicherheit ermitteln.

*) Prokl. ad prop. 15.

So war denn in diesen drei Schritten jenes schöne Fundamentaltheorem gefunden; nach der Ausbildung der Parallelentheorie aber erkannte man, dass die drei Perpendikel in der letzten Figur überflüssig seien und das blosse Ziehen einer Parallele mit der Grundlinie genüge.

Das ist mein Versuch, den Weg der Alten an der Hand der überlieferten Notizen zu verfolgen.

Mit geringerer Sicherheit als der Satz von den Winkeln im Dreieck ist der heute allgemein als pythagorisch bezeichnete Satz von dem rechtwinkligen Dreieck auf diese Quelle zurückzuführen. Der erste Schriftsteller, der diesen Satz als von Pythagoras gefunden bezeichnet, ist Vitruv*), schwerlich ein zuverlässiger Zeuge; von da an verbreitete sich diese Angabe allgemeiner, aber immer in Verbindung mit jener bekannten Hekatombe, welche Pythagoras vor Freude über die Entdeckung jenes Lehrsatzes dargebracht haben soll — eine Anekdote, welche die Glaubwürdigkeit der ganzen Nachricht stark beeinträchtigt. Denn dies Opfer verträgt sich nicht mit dem strengen Verbote alles blutigen Opfers, welches uns aus den pythagorischen Ritualgesetzen die Schriftsteller derselben Zeit, ja oft dieselben**) überliefert haben, die anderswo von der Hekatombe erzählen. Schon Cicero***) nahm daher an jener Anekdote Anstoss und in der spätesten Tradition der Neupythagoriker wird das blutige Opfer durch das eines „aus Mehl geformten Ochsen“ ersetzt.†)

Jene berühmte Erzählung nebst den vielen witzigen Versen, zu denen sie Veranlassung gegeben hat, wird man demnach aufgeben müssen; doch möchte ich nicht so weit gehen, den Lehrsatz selbst dem Pythagoras abzusprechen, obgleich keine einzige, nur einigermaßen glaubwürdige Nachricht darüber vorhanden ist.††)

*) De architect. IX. praef.

**) Diog. VIII, 12, 22. vergl. ferner I, 24.

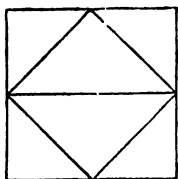
***) De nat. deor. III, 36.

†) Porphyrius, de vit. Pyth. 36.

††) Proklus, ein einsichtiger Schriftsteller, drückt sich auffallend unbestimmt so aus (Comm. ad prop. 47): „Wenn wir die, welche alte Geschichten erzählen wollen, hören, so finden wir, dass sie dieses

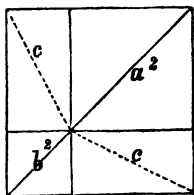
Hankel, Gesch. d. Mathem.

Was nun den Weg zur Erfindung dieses Lehrsatzes betrifft, so glauben wir, dass Pythagoras zuerst durch die empirische Kenntniss von dem rechtwinkligen Dreieck 3, 4, 5, vielleicht auch anderer, durch geometrisches Experiment gefundener rechtwinkliger rationaler Dreiecke, sodann durch

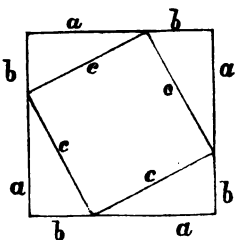


die in nebenstehender Figur erläuterte Wahrnehmung, dass das Quadrat über der Diagonale eines Quadrates das Doppelte des letzteren, d. h. dass das Quadrat über der Hypotenuse eines gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks das Doppelte von dem Quadrate einer Kathete sei, zu der Vergleichung der

Kathetenquadrate mit dem Hypotenusenquadrate überhaupt veranlasst worden sei. Zu dem allgemeinen Beweise würde dann die folgende von Bretschneider*) aufgestellte Betrachtung geführt haben, gegen die sich freilich einwenden lässt, dass sie durchaus kein specifisch griechisches Colorit trägt, vielmehr an die indische Art erinnert.



Wurde in beigezeichneter Weise ein Quadrat in zwei Quadrate a^2 , b^2 und die beiden Rechtecke ab zerlegt, dann jedes der Rechtecke durch die Diagonalen c in Dreiecke zerschnitten und diese vier Dreiecke, wie es die zweite Figur zeigt, in das grosse Quadrat hineingelegt, so lassen sie in der Mitte ein Quadrat c^2 frei, welches $= a^2 + b^2$ sein muss; zugleich aber ist c die Hypotenuse jener rechtwinkligen Dreiecke, deren Seiten a und b sind. q. e. d.



Es wird uns ferner berichtet, dass die Pythagoriker sich bereits mit der Aufgabe beschäftigten, einen gegebenen Flächenraum an einer gegebenen Strecke zu entwerfen (*παράβαλλειν*, applicare), d. h. in ein Rechteck zu verwandeln, dessen eine Seite

Theorem auf Pythagoras zurückführen.“ Auch ihm war, wie hieraus hervorgeht, keine sichere Quelle bekannt.

*) Bretschneider, die Geom. v. Eukl. p. 82.

jene gegebene Strecke ist. *) Das Entwerfen an einer gegebenen Strecke (*παράβολή*) hatte aber im Alterthume als Aufgabe des Zusammenstellens noch einen allgemeineren Sinn, indem man darunter die Aufgabe verstand, an eine gegebene Strecke AB einen gegebenen Flächenraum als Rechteck AY so anzulegen, dass ein Quadrat BY übrig bleibt (*ἔλλειψις*) oder überschiesst (*ὑπερβολή*). Diese von Euklid VI, 28, 29 behandelten Aufgaben, welche, wenn man $AB = a$, $BX = x$ und den gegebenen Flächenraum $= b$ setzt, unserer Auflösung der quadratischen Gleichungen $ax \mp x^2 = b$ entsprechen, hatten ebendeshalb für das Alterthum eine hohe Bedeutung, besonders nachdem man die Kegelschnitte zu betrachten anfang und bemerkte, dass die Aufgabe aus einer gegebenen Ordinate y derselben die zugehörige Abscisse x zu finden, auf eine der drei vorstehenden Aufgaben zurückführte, wie der moderne Leser sogleich aus den Gleichungen $ax = y^2$, $ax - x^2 = y^2$, $ax + x^2 = y^2$ erkennt. Höchst interessant ist nun die Nachricht des Eudemus**), wonach die Pythagoriker bereits jene drei Aufgaben gekannt und mit den Namen der Parabel, Ellipse, Hyperbel gekennzeichnet haben. Diese wenigen, von einem unverdächtigen Zeugen überlieferten Worte geben uns einen hohen Begriff von den gewaltigen Leistungen dieser Schule. Denn einerseits verlangen diese Aufgaben zu ihrer Lösung bereits die Kenntniss einer Menge geometrischer Lehrsätze, andererseits sind sie nicht, wie etwa der Satz vom Quadrat der Hypotenuse, an sich interessante Resultate einer Entwicklungsreihe, vielmehr die Anfangsglieder einer Entwicklung, deren Ende leider in den allgemeinen Nebel verläuft, der die pythagorische Schule einhüllt.

Fassen wir alles, was hienach an geometrischen Sätzen als Eigenthum der pythagorischen Schule beglaubigt ist, zusammen, so sehen wir: Es ist wesentlich der Inhalt der zwei ersten Bücher von Euklids Elementen, welcher auch historisch den Anfang der Geometrie gemacht hat.

Wir haben ferner zwei Lehren zu erwähnen, welche

*) S. Eukl. Elem. I, 44.

**) Prokl. ad prop. 44.

aus der Verbindung der Zahlen mit den Raumgrößen entstehen.

Die erste derselben ist die Formel zur Bildung rationaler rechtwinkliger Dreiecke, des ersten Anfanges der von Diophant ein Jahrtausend später glänzend ausgebildeten unbestimmten Analytik. Nach einer glaubwürdigen Tradition des Alterthums*) entdeckte Pythagoras, dass wenn a eine ungerade Zahl bedeutet, dann die Längen a und $\frac{1}{2}(a^2 - 1)$ die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks bilden, dessen Hypotenuse $\frac{1}{2}(a^2 + 1)$ ist. Diese Formel, welche, sobald man dem a jeden beliebigen rationalen Werth geben darf, in der That alle rationalen rechtwinkligen Dreiecke umfasst, jedoch immer nur in jener Beschränkung auf ungerade a angewandt wird, scheint mir ihren Ursprung noch deutlich an der Stirn zu tragen. Aus dem Oriente (s. o. S. 94) mochte Pythagoras die Erfahrung mitgebracht haben, dass man aus drei Stäben von den Längen 3, 4, 5 ein rechtwinkliges Dreieck bilden kann; diese Thatsache konnte ihm interessant genug sein, um ihn zu einem Versuche einer Verallgemeinerung zu veranlassen. Aus seinen arithmetischen Untersuchungen (s. u. S. 104) war ihm bekannt, dass die Differenzen der Quadrate aufeinanderfolgender Zahlen die Reihe der ungeraden Zahlen geben; jede ungerade Quadratzahl (z. B. 25) wies ihn dann auf zwei Quadrate (144 und 169) hin, deren Differenz sie ist. Der Satz von dem Quadrate der Hypotenuse liess ihn dann in diesen Dreiecken sofort rechtwinklige erkennen.

In engster Verbindung mit dem Satze von dem Quadrate der Hypotenuse steht ferner die Lehre vom Irrationalen, welche der pythagorischen Schule zugesprochen wird.**)

In der That, sobald nur selbst im einfachsten Falle eines gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks die Relation zwischen den Quadraten der Seiten entdeckt war, konnte es den Pythagorikern bei ihrer Neigung, die Zahlenlehre

*) Der älteste Zeuge ist Heron, Heron Alex. geometr. reliqu. ed. Hultsch.

**) Eudemos bei Prokl. p. 19 ed. Basil. p. 38 Barocc.

auf Geometrie anzuwenden, nicht entgehen, dass die Hypotenuse nicht, wie in dem Dreiecke mit den Katheten 3, 4 leicht durch eine Zahl dargestellt werden konnte, sondern vielmehr aller Bemühungen spottete. Man mochte die Kathete jenes gleichschenkligen Dreiecks $= 1$ oder $= 2$ oder $= \frac{3}{2}$, oder $= \frac{5}{4}$, oder wie man wollte setzen, immer ergab sich keine Zahl für die gesuchte Diagonale. Immer und immer wieder wird man diese Aufgabe, welche Anfangs so leicht schien und nun so unerwartete Schwierigkeiten bereitete, angegriffen, sich in den für jene Zeit so beschwerlichen Zahlenrechnungen abgemüht haben, bis endlich einer jener seltenen Geister, denen es vergönnt ist, in glücklichen Augenblicken sich von dem Niveau menschlichen Denkens mit Adlersflug zu erheben — wohl mag es Pythagoras selbst gewesen sein — von dem Gedanken erfasst wurde: hier handelt es sich um ein absolut unlösbares Problem. Damit aber war so gut wie Alles geschehen; denn um die Richtigkeit dieser Idee streng zu erweisen, war zwar noch eine schwierige Deduction nöthig, die gewiss ein grosses Talent erforderte; indess der Weg war gezeigt, es bedurfte nur der Energie des Denkens und des Gebrauchs gewöhnlicher Logik, um die Heerstrasse zu bauen, die uns jetzt so bequem zugänglich ist. Aber man beachte nur, von welcher ausserordentlichen Kühnheit jener Gedanke war, anzunehmen, dass es unter den ganz homogenen geraden Linienstrecken auch solche geben könne, welche sich von anderen nicht nur durch ihre Länge, also ihre Quantität, sondern durch eine Qualität unterscheiden, welche zwar wesentlich, doch aber sinnlich absolut unerkennbar, zwar unzweifelhaft gewiss, doch aber mit der Vorstellung unerreichbar und nur im reinen Begriffe zu fassen ist. Wenn wir weiter unten sehen werden, welche ausserordentliche Schwierigkeit das Alterthum in dem Gedanken des Stetigen fand und wie in dieser Incongruenz der Reihe der stetigen Grössen und der Zahlen selbst bis auf heute noch ein ungelöster Widerspruch liegt, so müssen wir diese die Bedeutung eines einzelnen Satzes weit übertreffende Idee des Irrationalen für eine der grössten Entdeckungen des Alterthums halten.

Wir begreifen dann, wie man im Sinne der alten Philosophen in dem Irrationalen (*ἄλογον* = ohne Verhältniss) ein tiefes Mysterium sah, den Doppelsinn des Wortes *λόγος* benutzend, das Irrationale als das Unausgesprochene, das Unbegreifliche fasste, das Bildlose (*ἀνείδεον*) nennen konnte. Und wenn die ältesten Pythagoreer wirklich diese Idee entdeckt hatten, so ist es in der That nicht unwahrscheinlich, dass sie diese als ein Geheimniss sorgfältig bewahrten, wie uns denn in später Zeit erzählt wird, „dass derjenige, welcher zuerst die Betrachtung des Irrationalen aus dem Verborgenen in die Oeffentlichkeit brachte, durch einen Schiffbruch umgekommen sei, und zwar: weil das Unausprechliche und Bildlose immer verborgen werden sollte, und dass der, welcher von Ungefähr dieses Bild des Lebens berührte und aufdeckte, in den Ort der Mütter versetzt und dort von ewigen Fluthen umspült wurde. Solche Ehrfurcht hatten diese Männer vor der Theorie des Irrationalen.“*)

Der alte Beweis von der Incommensurabilität der Diagonale eines Quadrates gegen die Seite bestand in einer deductio ad absurdum, die zeigte, „dass, wenn man den Durchmesser (die Diagonale) als commensurabel annimmt, gerade und ungerade Zahlen einander gleich sein müssen.“**) Verhalten sich nämlich Diagonale und Seite wie zwei ganze zu einander prime Zahlen $p : q$, so muss $p^2 = 2q^2$, folglich p^2 und somit auch p eine gerade Zahl sein; dann aber ist q jedenfalls keine gerade Zahl, weil sie sonst mit p den gemeinschaftlichen Theiler 2 hätte. Da nun p gerade ist, so kann $p = 2r$ gesetzt werden, also ist $2r^2 = q^2$, also q^2 und somit auch q eine gerade Zahl, was dem zuvor Bewiesenen widerspricht.

Man sieht, wie dieser Beweis durchaus nur auf die Irrationalität der Diagonale des Quadrates geht; um zu beweisen, dass die Seite eines Quadrates, welches dreimal so

*) Proklus, Scholia ad I. X bei Knoche, Unters. üb. d. Scholien d. Prokl. Herford 1865. p. 9.

**) Aristoteles, An. prior. I, 23. 41, a, 26 und c. 44. 55, a, 37. Euklid hat uns diesen Beweis El. X, 117 wohl nur aus historischem Interesse aufbewahrt, da die Irrationalität aus X, 9 schon von selbst hervorgeht und der 117. Satz überhaupt nur ein Anhang ist.

gross als ein anderes ist, nicht durch die Seite des letzteren gemessen werden kann, muss eine völlig neue Betrachtung angestellt werden. In der That erfahren wir*), dass noch hundert Jahre nach dem Tode des Pythagoras einzeln bewiesen wurde, dass die Seite eines Quadrates, welches 3 oder 5 oder 7 u. s. f. bis 17 Quadratfuss enthält, in Fussen nicht ausgedrückt werden kann; woraus deutlich hervorgeht, dass das allgemeine Princip: dass zwei Grössen, deren Quadrate sich wie zwei nichtquadratische Zahlen verhalten, incommensurabel sind, auch nicht mit Einem Schlage entdeckt, sondern erst, nach der Weise jener Zeit, aus speciellen Fällen entwickelt worden ist.**)

„Die Arithmetik scheint Pythagoras vor Allem werth gehalten und hauptsächlich dadurch weiter gefördert zu haben, dass er sie aus dem kaufmännischen Geschäftsbedürfnisse hervorzog und alle Dinge unter der Form der Zahl betrachtete“***), und wenn wir der neupythagorischen Schule glauben wollen, die sich vorzugsweise mit reiner Arithmetik beschäftigt hat, so hätte die älteste Schule des Pythagoras in dieser Wissenschaft bereits sehr beträchtliche Fortschritte gemacht. Der Eifer jedoch, mit welchem die neuere Schule seit ihrer Begründung durch den Arithmetiker Nikomachus in dieser wissenschaftlichen Disciplin an die älteste Schule anzuknüpfen sucht†), macht ihre Zeugnisse verdächtig; und so bleiben nur eine kleine Zahl älterer gelegentlicher Nachrichten übrig, welche kein eben sehr durchsichtiges Bild liefern. Wir erfahren aus diesen nichts von einer praktischen Rechenkunst, welche die Aufgaben des bürgerlichen und kaufmännischen Lebens zu lösen, zu begründen und zu vereinfachen bestrebt gewesen wäre, vielmehr ausschliesslich von Untersuchungen im theoretischen

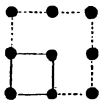
*) Plato, Theaetet. Dialog. ex rec. Bekkeri. P. II. V. I. p. 186.

**) Wenn dies Theorem später dem Theätet zugeschrieben wird (Prokl. Schol. bei Knoche a. a. O. p. 24), so scheint mir diese Nachricht wesentlich auf jener Stelle Platon's zu beruhen, die jedoch die Auslegung nicht gestattet, dass dem Lehrer des Theätet, dem Pythagoriker Theodoros aus Kyrene jenes allgemeine Theorem unbekannt gewesen sei.

***) Aristoxenus, Fragm. in Stob. Ecl. phys. I. I. p. 16.

†) Nikom. Introd. arith. an mehreren Orten.

Interesse. Die Eintheilung der Zahlen in gerade, ungerade, gerad-ungerade, in Quadrat- und Nichtquadratzahlen, wohl auch noch nach anderen Gruppierungen, von denen die späteren Arithmetiker einen so grossen Reichthum hatten, spielten bei ihnen eine bedeutende Rolle. Mit Summationen von Zahlenreihen haben sie sich viel beschäftigt; sie entdeckten dabei, dass die Summe der aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen immer eine Quadratzahl gibt und erläuterten dies geometrisch, indem sie die einzelnen Einheiten als Punkte in ein quadratisches Netz setzten und die ungeraden Zahlen als „Gnomone“ um die ursprüngliche 1 und die Quadrate 4 u. s. w. herumsetzten;



wie z. B. aus 4 Punkten durch Umränderung mit 5 Punkten ein neues Quadrat 9 entsteht. *) Ebenso bemerkten sie, dass durch Addition der geraden Zahlen die Reihe 2, 6, 12, 20 entsteht, deren jede in das Product zweier um eine Einheit verschiedenen Zahlen zerfällt, wie denn $2 = 1 \cdot 2$, $6 = 2 \cdot 3$, $12 = 3 \cdot 4$, $20 = 4 \cdot 5$ u. s. w. Diesen Zahlen legten sie einen so besonderen Werth bei, dass sie ihnen einen eigenen Namen den der „Heteromeken (= ungleichseitigen)“ gaben. Ob sie in der Untersuchung weiter fortschritten und auf die höheren Polygonalzahlen eingingen, mit denen sich die neupythagorische Schule gern beschäftigte, lässt sich nicht constatiren.

Dass ferner die Pythagoreer nach einer anderen Seite hin die Arithmetik förderten, dass sie nämlich die Lehre von den Proportionen ausbildeten, kann, obgleich Nikomachus hiefür der einzige directe Zeuge ist**), deswegen kaum bestritten werden, weil zu Platon's Zeiten bereits die drei Proportionen wohlbekannt waren; man nannte vier Grössen a, b, c, d in arithmetischer Proportion stehend, wenn $a - b = c - d$, in geometrischer, wenn $a : b = c : d$; an die besonderen Fälle der „stetigen“ Proportionen $a - b = b - c$ und $a : b = b : c$ reihte man dann als eine dritte Art die harmonische Proportion $(a - b) : (b - c) = a : c$ an; man unterschied für zwei Zahlen a, b die Werthe $\frac{a+b}{2}$,

*) Aristoteles, Phys. III, 4. 203, a.

**) Intr. arith. II, c, 22 ff.

$\sqrt{ab}$ und $\frac{2ab}{a+b}$ als arithmetisches, geometrisches und harmonisches Mittel.

Ja es ist wohl glaublich, dass Pythagoras bereits gewusst hat, dass zwischen zwei Zahlen, ihrem arithmetischen und harmonischen Mittel die geometrische Proportion

$$a : \frac{a+b}{2} = \frac{2ab}{a+b} : b$$

stattfindet, welche, weil sie alle früheren in sich zusammenfasst, die „vollkommenste“ oder die „musikalische“ genannt wird. Was wir mit der Nachricht*), dass diese Proportion bereits den Babyloniern bekannt und von Pythagoras nur nach Griechenland gebracht worden sei, anfangen sollen, muss ich dem Urtheile des Lesers überlassen.

Das wäre etwa alles, was wir von der rein mathematischen Thätigkeit der pythagorischen Schule bis in die Mitte des 5. Jahrhunderts v. Chr. ziemlich sicher wissen. Der Name jener letzten Proportion aber wird den Leser bereits erinnert haben an die wunderbare arithmetische Natur der musikalischen, harmonischen Tonintervalle. Wenn wir den Neupythagoreern glauben, so war es Pythagoras selbst, welcher, lange mit dieser Idee beschäftigt, endlich durch angemessene Experimente mit gespannten Saiten die Entdeckung des grossen Gesetzes machte, dass alle, unserem Ohre harmonisch erklingenden Intervalle mit den einfachsten rationalen Zahlenverhältnissen in realem Zusammenhange stehen: bekannt ist, dass die Hälfte einer Saite in der Octave, eine Länge von $\frac{2}{3}$ derselben in der Quinte des Tones erklingt, den die ganze Saite angibt u. s. w. Man entdeckte in diesen Accorden z. B. *C, G, c* noch weitere Eigenthümlichkeiten; es bilden deren Saitenlängen $1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}$ eine harmonische Proportion, denn es ist

$$1 : \frac{1}{2} = \left(1 - \frac{2}{3}\right) : \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right).$$

Dies eine Beispiel mag genügen, um zu zeigen, in welcher Weise man die durch die Consonanzen und die Tonleiter

*) Jamblich. Comm. ad Nik. Arith. ed. Temml. p. 168.

gegebenen Zahlenverhältnisse weiter analysirte und bearbeitete. Man begreift, wie unter diesen Umständen das Streben nach einer theoretischen Grundlage der Musik einen bedeutenden Einfluss auf die Entwicklung der betreffenden Lehren der Arithmetik, namentlich der Proportionen haben musste. Die Arithmetik wurde von da an eine Vorbereitungswissenschaft für das Studium der theoretischen Musik und somit ein Bestandtheil jeder höheren Bildung.

Zu engherzig wäre es jedoch, wollten wir jene Entdeckung von der Rationalität harmonischer Tonverhältnisse nur insoweit betrachten, als sie der Arithmetik und deren Verbreitung einst nützlich gewesen ist; sehr zweifelhaft ist es freilich, wie hoch wir den Gewinn, welchen die praktische Musik der Griechen durch jene theoretische Grundlage und die daran anknüpfenden abstracten Speculationen der Arithmetiker davon trug, anschlagen dürfen, da unsere heutige Kenntniss der von den Griechen wirklich ausgeübten Musik eine sehr unvollkommene ist und sich bereits unter Aristoxenus, einem Schüler des Aristoteles, eine empirische Schule gegenüber den Prätensionen der Mathematiker in der Musik erhob; — weit über allem diesem vergänglichen Nutzen steht aber die Bedeutung jener Entdeckung für eine philosophische Weltanschauung.

Es ist schon früher darauf hingewiesen, dass, sobald nur einmal Lineal und Senkloth erfunden war, in der heiligen Baukunst sich gewisse bestimmte Zahlenverhältnisse traditionell als canonisch, oft sogar als von den Göttern geoffenbarte und gebotene festsetzten. Bei der freien Stellung, welche die Griechen schon sehr früh gegenüber religiöser Tradition einnahmen und dem wunderbaren Sinn für klare Schönheit, der sie seit den ältesten Zeiten auszeichnet, dürfen wir annehmen, dass sie bereits im 6. Jahrh. v. Chr. jene canonischen Zahlenverhältnisse in den Tempelbauten ihres mystischen Charakters entkleidet und sie in ihrer rein ästhetischen Bedeutung klar erkannt hatten. Die andere religiöse Kunst, die Musik, führte ihren Ursprung ebenfalls auf göttliche Offenbarung zurück; denn Hermes hatte dem Orpheus einst die viersaitige Leyer übergeben und ihn spielen gelehrt. Im Laufe der Zeit erhielt dieses älteste einfache

Instrument mehr Saiten, die in der Musik angewandten Tonfolgen und Harmonien wurden, nicht ohne Widerstand der conservativen Spartaner, mannigfaltiger und reicher; und es wird auch in dieser Kunst bald die reine Schönheit der Tonverhältnisse das einzig Maassgebende gewesen sein. Indessen scheint in diesem Gebiete die Freiheit gar zu subjectiv gebraucht worden zu sein, und daher das praktische Bedürfniss, eine feste, gleichmässige Scala zu schaffen, die auch theoretisch hoch interessante Frage dringender gemacht zu haben: ob nicht die Grundlagen aller Musik, die Tonintervalle ebenso unabänderlich bestimmt werden können, als man mit Lineal, Loth und Maassstab die Bausteine bestimmt, und ob nicht auch in der Musik gewisse Zahlenverhältnisse die Grundbedingungen aller Schönheit sind.

Die Antwort hierauf aber gab jene Entdeckung, aus welcher Pythagoras mit philosophischem Sinn sofort den allgemeinen Schluss zog, dass das Wesen aller Schönheit in inneren Zahlenverhältnissen der Dinge beruhe. Der Begriff der Harmonie, bisher so schwankend und unfassbar, hatte eine bestimmte, mathematisch feste Gestalt gewonnen: Harmonie ist nichts, als jene geheimnissvolle Zahlenbeziehung, deren äussere Wirkung offenbar, deren inneres Wesen nur Wenigen bekannt. Ueberall, wo Harmonie, da sind Zahlen; und wo Zahlen, da ist Harmonie. Damit aber war Harmonie weit über alles Menschlich-subjective erhoben und ein Göttlich-objectives geworden. Konnte es anders sein, als dass Pythagoras das Princip aller Ordnung und Schönheit der Welt in jener Harmonie fand? So war das grosse Problem aller priesterlichen Weisheit des Orientes auf eine Weise, wie sie nie in eines Orientalen Sinn gekommen, durch den griechischen Geist gelöst: „Gott hat alles nach Maass, Zahl und Gewicht geordnet.“*) Wer will dem Pythagoras einen

*) Diese einzige Stelle der Bibel, in welcher man, freilich den Zusammenhang im Texte vernachlässigend, eine Andeutung von mathematischen Gesetzen in der äusseren Natur findet, ist nicht jüdischen Ursprungs; sie steht in dem apokryphen Buche der Weisheit (XI, 22), das nicht früher, als im 2. Jahrh. v. Chr. von einem alexandrinischen, mit griechischer Philosophie wohl vertrauten Juden geschrieben ist.

Vorwurf daraus machen, wenn er mit jugendlicher Frische diesen grossen Gedanken erfasste? wenn er die Zahlenverhältnisse des Septachords auch in den weiten Räumen des Himmels wieder fand und in den Bewegungen der 7 Planeten eine wunderbare, nur dem geistigen Ohre wahrnehmbare Sphärenharmonie erkannte?

Aber nicht nur im Reiche des Schönen und dem lichten Kosmos der Natur, auch in jenen geheimnissvollen Gebieten, in denen der Mensch guten und bösen Dämonen unterworfen ist, herrscht die Zahl. Durch die ganze Welt geht eine uralte Zahlenmystik, ein felsenfester Glaube an Tage und Stunden, die glücklich oder unglücklich, an Zahlen, die heilig oder unheilig sind, sei es, dass sie in sich selbst wunderbare dunkle Eigenschaften tragen, sei es, dass sie das innere Wesen einer Gottheit im Bilde darstellen, sei es beides. Auch die pythagorische Schule, die unter einem Volke voll Glaubens an die althergebrachte Weisheit der Tage- und Stundenwähler, in einem Lande vielfacher Uebung des Zeichendeutens aufgekommen war und von ihrem Meister die Ehrfurcht vor der alten Zahlenmystik des Orientes erbt hatte, musste in allem diesem nur immer stärkere Gründe sehen, um nicht wie die ionische Philosophie in der Materie, sondern vielmehr in den Zahlen das Wesen, das Princip aller Dinge zu sehen.

So denke ich begreiflich gemacht zu haben, wie dieser Satz in der gesammten Weltanschauung der Pythagoreer das centrale Princip werden konnte, in dem Alles zusammenläuft und aus dem sich wieder Alles entwickelt. Die Ausdrücke, welche die Schule jenem grossen Grundgedanken gegeben hat, decken ihn nie ganz und scheinen mannigfach von einander abzuweichen. Indessen dürfen wir nicht vergessen, dass man im 5. Jahrhundert v. Chr. noch keine strenge Unterscheidung zwischen einem materialen und formalen, zwischen einem realen und einem Erkenntnissprincip erwarten darf. Alles dies umfasst das Princip der Pythagoriker, und ob sie sagen, dass die Zahl das Wesen aller Dinge, dass Alles seinem Wesen nach Zahl sei, oder dass die Dinge aus Zahlen bestehen, die Dinge aber nicht nur Eigenschaften einer dritten Substanz, sondern unmittelbar

an sich selbst Substanzen seien, dass die Zahlen zugleich Stoff und Eigenschaft der Dinge seien, oder dass die Dinge durch Nachahmung der Zahlen und nach deren Muster gebildet waren oder dass Alles Harmonie ist*) — in allem diesem ist doch nichts anderes zu finden, als der „Eindruck, welchen die erste Wahrnehmung einer durchgreifenden und unabänderlichen Gesetzmässigkeit im Kosmos auf den frischempfänglichen Geist machen musste“, als der Ausdruck überwältigender Ueberzeugung von der allengsten Beziehung der Dinge zu den Zahlen.

Wir können uns in der Geschichte der Mathematik glücklicher Weise der dem Geschichtsschreiber der Philosophie so lästigen Mühe ent schlagen, aus einer Reihe von unzureichenden Notizen ohne Kenntniss des eigentlichen Schlüssels darzustellen, wie die pythagorische Schule aus jenem Grundsatz ihre Metaphysik deductiv entwickelte. Nur einige, mit unserer Wissenschaft sich eng berührende Punkte müssen wir hier noch hervorheben.

An der Hand der Zahlen ging man vor: Alle Zahlen zerfallen in gerade und ungerade, das Ungerade aber ist zugleich begrenzt, das Gerade unbegrenzt**); die ungeraden Zahlen aber sind nach altem Volksglauben heilige, die geraden daher unheilig. So mochte man weiter in ziemlich loser Gedankenfolge zu dem Schema folgender 10 Gegensätze kommen: 1) Grenze und Unbegrenztheit, 2) Ungerades und Gerades, 3) Eins und Vieles, 4) Rechtes und Linkes, 5) Männliches und Weibliches, 6) Ruhendes und Bewegtes, 7) Gerades und Krummes, 8) Licht und Finsterniss, 9) Gutes und Böses, 10) Quadrat und Heteromekes. Eine wunderliche Mischung! Am auffälligsten in der Reihe der Kategorien ist das letzte Paar. Man hat dasselbe aus jenen Summationen (s. ob. S. 104) ableiten wollen und sich auch sonst vielfach bemüht, dessen Bedeutung zu ermitteln, ohne

*) Alle diese Sätze sind aus der Physik und Metaphysik des Aristoteles entnommen.

**) Arist. Met. I, 5, 986, a. 17. Phys. III, 4, 203, a. 10. Nikom. Intr. arith. II, 20. Worauf diese Vergleichung des Ungeraden mit dem Begrenzten ursprünglich und ob sie auf der Theorie der Gnomonen (s. o. S. 104) beruht haben mag, lässt sich schwerlich noch ermitteln.

indessen zu einer nur leidlichen Erklärung gelangt zu sein. *)

Mit den mathematischen Kategorieen jenes Schemas operiren nun die späteren Pythagoreer, nicht selten spielend, in ihrer Arithmetik fortwährend, ohne indess damit mehr zu leisten, als dass sie das Interesse an dieser Disciplin so lange wach hielten, bis an Stelle jener inhaltlosen Schatten die eigentliche Wissenschaft trat.

Und weiter führte die detaillirte Ausbildung des dem ganzen System zu Grunde liegenden grossen Gedankens zu dessen Carricatur. Hatten die Pythagoreer die Zahl als oberstes Gesetz der Welt erkannt, so sollte nun auch jedem Dinge eine bestimmte Zahl zukommen. So sagten sie etwa, die Gerechtigkeit bestehe in der Quadratzahl, weil sie Gleiches mit Gleichem vergilt und sie nannten deshalb weiter die 4 oder die 9 die Gerechtigkeit, die 5, als die Verbindung der ersten männlichen und weiblichen Zahl, nannten sie die Ehe, die 2 die Meinung u. s. w. Doch überlassen wir es den Geschichtsschreibern der Philosophie, diese Spielereien weiter zu verfolgen**), welche immerhin der Schule des Pythagoras die Ehre nicht rauben können, die Mathematik zuerst gründlich als Wissenschaft behandelt und grossartig gefördert zu haben. —

Pythagoras hat nicht allein das erste umfassende System theoretischer Philosophie geschaffen; die Harmonie, das oberste Gesetz der Welt, auch im Leben des Einzelnen und der Gesammtheit zu realisiren, war auch der Ausgangspunct seiner praktischen Philosophie. In einem auf das strengste Autoritätsprincip begründeten Bunde mit strenger Disciplin, besonderen Cultusvorschriften und enger Abgeschlossenheit gegen die Welt suchte der Meister seine ethischen

*) Vielleicht findet meine Erklärung einigen Beifall. Wenn die Pythagoriker die Theorie des Irrationalen entdeckt und deren hohe Bedeutung erkannt haben, so muss es, wie man sofort zugeben wird, sehr auffällig erscheinen, dass die so nahe liegenden Gegensätze von Rational und Irrational in ihrer Tafel keinen Platz haben. Sollten diese nicht unter dem Bilde Quadrat und Rechteck enthalten sein, welche bei der Quadratwurzelauszug eben auf jene Begriffe geführt hatten?

**) Siehe die ausführliche Darstellung bei Zeller, Gesch. d. Philos., I. Th., p. 285 ff.

Anschauungen zur That zu machen; jeder Egoismus sollte schweigen, jede individuelle Leistung der Schule als Ganzes zu Gute kommen. So erklärt es sich, wie es unmöglich ist, die Entwicklung der Lehre innerhalb der Schule zu verfolgen, zu trennen, was dem Meister und was seinen Schülern zukommt; und es begreift sich, wie die tieferen mathematischen Theorien, welche in der Schule behandelt wurden, nur geringe Verbreitung ausserhalb derselben fanden, auch ohne dass wir, der Ueberlieferung späterer Schriftsteller folgend, ein eigentliches Gelübde des Schweigens anzunehmen brauchen.

Die Mathematiker im 5. Jahrhundert.

Jene corporative Verfassung der Schule war von ihrem Gründer zugleich dazu bestimmt, seine politisch-ethischen Ideen in den Republiken Grossgriechenlands zu verkörpern; eben hieran aber scheiterte dieser eigenthümliche Versuch, orientalische Einrichtungen auf hellenischen Boden zu übertragen. Bald nach dem Tode des Stifters durchzog ganz Unteritalien eine stark demokratische Strömung, die allenthalben in blutigen Revolutionen die Aristokratie und mit ihr die pythagoreischen Gemeinschaften niederwarf, vernichtete und aus dem Lande vertrieb. So finden wir in der Mitte des 5. Jahrhunderts in allen Ländern griechischer Zunge versprengte Pythagoriker, welche nun, jenen eigenthümlichen corporativen Einflüssen entzogen, mit ihrem Wissen ebenso frei schalteten als andere Philosophen. Von dieser Zeit an erst fand die Mathematik in Griechenland allgemeinere Verbreitung; das erste Lehrbuch der Elemente der Geometrie ist in dieser Zeit von einem Pythagoriker, Hippokrates aus Chios, geschrieben*), der, wie es scheint, zuerst in Athen, der Stadt, die von nun an eine Zeit lang der Mittelpunkt mathematischen Lebens sein sollte, Geometrie vorgetragen hat.

Das Glück hat es gewollt, dass uns ziemlich umfangreiche Stücke einer mathematischen Abhandlung dieses Hippokrates**) aufbewahrt sind, welche uns eine Vorstellung von

*) Eudemus bei Prokl. p. 19. ed. Basil.

**) Ans Eudemus in Simplic. Comm. in Arist. Phys. (Venedig 1526)

dem Stande der Geometrie in der Mitte des 5. Jahrhunderts geben können.

Da zeigt sich denn zunächst die höchst überraschende Thatsache, dass dieses älteste Fragment griechischer Geometrie, welches 150 Jahre älter als die Elemente Euklid's ist, bereits den durch letztere typisch fixirten Charakter trägt, welcher der Geometrie der Griechen so eigenthümlich ist. Dahin gehört vor Allem die äusserste Sorgfalt in der Construction der Figur, die keinen Schritt vorwärts thut, ohne ausdrücklich, durch oft langwierige und meist unerquickliche Schlussreihen zu zeigen, dass er auch immer möglich ist, dass sich gewisse Linien wirklich schneiden, die eine Strecke in der That länger als jene andere ist u. s. w. Um ein Beispiel davon zu geben, in welchem Grade schon in dieser frühen Zeit die unmittelbare geometrische Anschauung ignoriert wurde, bemerke ich z. B.: Hippokrates glaubt den Satz, dass um ein Trapez, welches aus einem gleichschenkligen Dreiecke durch eine Parallele mit der Basis abgeschnitten wird, ein Kreis beschrieben werden kann, durch eine umständliche Betrachtung congruenter Dreiecke beweisen zu müssen. Es hängt hiemit eine andere Eigenthümlichkeit der griechischen Geometer eng zusammen: der Mangel an allgemeinen Principien und leitenden Ideen in der Darstellung; die Sätze, welche in dem interessanten Fragmente entwickelt werden, sind, wie sich zeigen lässt, offenbar aus einem und demselben Grundgedanken hervorgegangen; anstatt nun diesen anzudeuten und so das Verständniss des Wesens der Sätze zu erleichtern, scheint der alte Geometer fast absichtlich jede Spur eines Zusammenhanges verwischt zu haben und stellt also jene Sätze neben einander, als ob sie aus den Wolken gefallen seien.

Mit dieser Zerstückelung des Gedankens in seine kleinsten Bestandtheile hingen dann aber die charakteristischen Vorzüge der griechischen geometrischen Methode eng zusammen: die genaue Erkenntniss der Bedingungen eines Theorems, die Strenge der Schlussfolgerung, die Sicherheit des Resultates,

fol. 12 ff. Bretschneider hat sich das Verdienst erworben, den verdorbenen Text zu emendiren und die Figuren hinzuzufügen. (Geom. vor Eukl. p. 100—121.)

und in allen diesen Beziehungen gibt Hippokrates den späteren klassischen Geometern nichts nach. Das einzige, worin er sich von ihnen unterscheidet, ist die etwas ge-lockerte Form, die noch nicht die Euklidische feierliche Gliederung eines Satzes kennt, sondern Construction und Beweis in Eins verflechtend, die Bedingungen des Theoremes nach einander, wo es nöthig wird, einführend, den Lehrsatz selbst bald zuerst, bald zuletzt bebringend, die später sogenannte synthetische und analytische Methode noch ungetrennt anwendet.

Was nun den Umfang des mathematischen Wissens jener Zeit betrifft, so können wir ihn aus einem Fragment einer speciellen Abhandlung nicht völlig ermessen. Doch finden wir bei Hippokrates zum ersten Male die Lehre von der Aehnlichkeit der Figuren in ihren Anfängen. Aus der Gleichheit der Winkel an der Grundlinie zweier gleichschenkligen Dreiecke wird auf Proportionalität der Seiten geschlossen. Ob aber damals schon die Bedingungen der Aehnlichkeit ungleichseitiger Dreiecke bekannt waren, lässt sich nicht ausmachen.

Die Lehre von der Aehnlichkeit erforderte die Uebertragung der Proportionen von den Zahlen, auf welche man sie bis dahin bezog, zu den Grössen. Uns Neueren scheint dies leicht genug; man leitet die Gesetze für die Proportionen an Zahlen ab und überträgt sie ohne Weiteres auf Grössen, indem man incommensurabele Grössen zwischen benachbarte rationale Zahlen einschliesst und so allmählich dazu gelangt, aus der ihrer Natur nach discreten Zahlenreihe eine stetige Reihe zu erzeugen.

Wenn auch nicht geläugnet werden kann, dass in dieser Erzeugung des Stetigen aus dem Unstetigen ein gewisser unnatürlicher Zwang und ein innerer, im Begriffe des Unendlichkleinen besonders hervortretender Widerspruch liegt*), so gehört doch diese Idee der stetigen Zahlenreihe, der Zahlgrösse, wie ich es nenne, zu den wichtigsten Errungenschaften der neueren Mathematik gegenüber dem gesammten

*) S. meine Vorl. üb. d. complexen Zahlen (Leipzig 1864). p. 46 und 65.

Hankel, Gesch. d. Mathem.

Alterthume, dem, so weit wir es kennen, die beiden Begriffe der Zahl und der Grösse völlig getrennt neben einander standen. In Euklid's Satze: „Incommensurabele Grössen verhalten sich nicht wie Zahlen zu einander“ kommt diese Kluft in ihrer ganzen Schärfe zum Vorschein.

So stützt sich denn auch bei Euklid die Lehre von den Proportionen der Grössen nirgends auf die von den Proportionen der Zahlen (XIII, def. 20), hat vielmehr ihre eigene Definition (V, def. 5): „Grössen a , b , c , d sind in einerlei Verhältniss, wenn bei Vergleichung eines jeden Gleichvielfachen von a und c mit einem jeden Gleichvielfachen von b und d es sich jedesmal findet, dass, wenn das Vielfache von a grösser oder gleich oder kleiner als das Vielfache von b ist, alsdann auch das Vielfache von c grösser oder gleich oder kleiner als das Vielfache von d ist“; und auf dieser wird nun in geistreicher Weise die Lehre von den Proportionen der Grössen und der Aehnlichkeit der Figuren selbstständig aufgebaut.

Wir werden sehen, dass diese Methode nicht erst von Euklid geschaffen, sondern schon in der Platonischen Schule üblich war. Auch können wir nicht annehmen, dass im 5. Jahrhundert etwa unsere heutige Art und Weise, die Proportionslehre zu begründen, angewendet worden sei, da es nicht glaublich wäre, dass nachher diese so viel einfachere Methode verlassen und die Idee der stetigen Zahlenreihe aufgegeben worden sei. Man wird daher nicht umhin können, dem 5. Jahrhundert die ersten Schritte auf dieser Bahn zuzuschreiben, die das ganze Alterthum nicht wieder verlassen hat; und diese Vermuthung wird nicht wenig dadurch bestätigt, dass die Griechen, denen es niemals gelungen ist, den Begriff der Zahl mit dem der Länge zu vereinigen, in jener Zeit selbst die verschiedenen Arten von Grössen nicht unter Einen Begriff zu fassen wussten. Denn es wird uns authentisch berichtet*): „Der Satz, dass die Glieder einer Proportion sich vertauschen lassen, wurde ehemals für Zahlen, Linien, Körper, Zeit besonders bewiesen, obgleich es möglich ist, dasselbe von allen durch Einen

*) Aristot. An. post. I, 5. 74. a. 17.

Beweis zu zeigen. Weil man aber keinen gemeinschaftlichen Namen hatte, worunter alles dies begriffen werden kann, Zahl, Länge, Körper, Zeit, und weil hier von einander verschiedene Arten gegeben sind, so nahm man jede besonders.“ So schwer werden Verallgemeinerungen in der Wissenschaft errungen!

Eine neue Erwerbung des 5. Jahrhunderts sind ferner Sätze vom Kreise, von denen bei den älteren Pythagorikern noch keine Spur zu entdecken ist. Hippokrates betrachtet schon als „ähnliche“ Kreissegmente solche, welche den gleichvielten Theil eines Kreises einnehmen und daher ähnliche eingeschriebene gleichschenklige Dreiecke haben. Ihm selbst verdankt man wahrscheinlich den Satz, dass sie sich wie die Quadrate ihrer Sehnen, also Kreisflächen, wie die Quadrate ihrer Durchmesser verhalten. Der schöne Satz dagegen, dass die Peripheriewinkel über demselben Bogen constant gleich dem halben Centriwinkel sind, war ihm entschieden unbekannt, von anderen Sätzen, deren spätere Erfindung historisch überliefert ist, zu geschweigen.

Die Quadratur des Kreises und die Exhaustionsmethode.

Die besprochene Schrift des Hippokrates ist hervorgegangen aus der Beschäftigung mit dem Probleme der Quadratur des Kreises, welches im Verein mit noch zwei anderen Problemen das Interesse der gelehrten Kreise Athen's fast ein Jahrhundert lang vorzugsweise auf sich zog. Dass es überhaupt gestellt werden konnte, setzt voraus, dass man mit der Flächenbestimmung des Dreiecks und der Verwandlung aller geradlinig begrenzten Flächen in Quadrate völlig im Reinen war. Nun galt es eben, den einfachsten krummlinigen Flächenraum mit einem Quadrate zu vergleichen. Aber wie die Sache anfangen? Man wandte das Problem hin und her, Anaxagoras*) vertrieb sich (um 440) den Kummer über seine Gefängnisshaft mit Speculationen über diese Aufgabe, ohne sie angreifen zu können.

Die Sophisten, deren Blüthezeit mit dem Aufkommen dieses Problems zusammen fällt, warfen sich auf dasselbe.

*) Plutarch. de exil. c. 17.

Einige hatten von cyklischen Zahlen gehört (die Arithmetiker nannten diejenigen, wie 5 oder 6, deren Quadrate 25 oder 36 wieder auf dieselben Zahlen endigten, cyklisch), und „nun glaubten sie, dass sie die Quadratur des Cyklus in Grössenmaass gefunden hätten, wenn sie eine cyklische Quadratzahl nachwiesen“. Leider können wir nicht annehmen, dass diese Lösung der Quadratur des Kreises nur ein Scherz gewesen sei.*)

Andere Sophisten werden behauptet haben, die Quadratur sei überhaupt nicht zu finden; denn wie könne man Krummes und Gerades, da es doch entgegengesetzt und qualitativ verschieden sei, mit einander vergleichen? und wiesen durch solche lustige geistreiche Speculationen, wie es auch wohl heute noch geschieht, ein für sie zu tiefes Problem zurück. Andere wieder werden bemerkt haben, dass eben ein Kreis doch sicherlich eine ganz bestimmte Fläche hat, die sich der Schmied mit Gold bezahlen lässt, wenn er einen kreisrunden Schild liefert. Ein Sophist aber, Antiphon, machte seinem Stande Ehre, indem er bemerkte: Wenn man einem Kreise ein Quadrat einbeschriebe, über den Seiten desselben gleichschenklige Dreiecke und somit ein Achteck, dann über dessen Seiten ein Sechszehneck einbeschriebe „und dies immerfort wiederholte, bis dadurch der Kreis völlig erschöpft würde, so würde dem Kreise ein Vieleck einbeschrieben werden, dessen Seiten ihrer Kleinheit halber mit dem Kreisumfange zusammenfallen würden. Nun könne man aber zu jedem Vielecke ein gleichflächiges Quadrat construiren; folglich würde man, da dem Kreise ein gleichflächiges Vieleck substituirt ist, durch dessen Gleichsetzung mit dem ihm gleichen Quadrate ein dem Kreise gleichflächiges Quadrat construiren **)“. Wenn Antiphon

*) Bretschn. p. 106. Vielleicht ist diese Narrheit erst späteren Datums, obgleich sie lebhaft an die Sophisten erinnert, die auch bewiesen, „dass Homer's Poesie eine geometrische Figur sei“, weil sie ein (Sagen-) Kreis ist. „τὰ ἐπη κύκλος, ὁ κύκλος σχῆμα, τὰ ἐπη σχῆμα.“ Aristot. An. post. I, 12. 77, 6, 32.

**) Bretschn. p. 101 und 125, wo mehrere gelegentliche Notizen von Scholiasten zu Aristoteles, der vielfach von den Methoden der Quadratur spricht, zusammengestellt sind.

glaubte, das Problem hiedurch gelöst zu haben, so täuschte er sich freilich; gleichwohl hat er hiemit als der erste den völlig richtigen Weg betreten und den Flächeninhalt eines krummlinigen Raumes zu ermitteln versucht, indem er ihn durch Vielecke von immer wachsender Seitenzahl zu erschöpfen (exhaustire) suchte. Man hat aber schon damals gegen Antiphon mit Recht bemerkt, dass, wie weit man auch gehen möge, immer das Vieleck von dem Kreise, die Sehne von dem Bogen verschieden sei und daher auf diese Weise der Flächeninhalt nicht völlig genau erhalten werden könne. Es wird dies ohne Zweifel ein sehr viele Disputationen veranlassender Streitpunct in Athen gewesen sein; denn in eben derselben Zeit (um das Jahr 450) waren die Fragen über die Theilbarkeit und Stetigkeit der Grössen durch die berühmten Beweise des Eleaten Zeno gegen die Vielheit und die Bewegung in den Vordergrund wissenschaftlicher Beschäftigung gestellt worden. Es haben diese Paradoxa Zeno's, des „Erfinders der Dialektik“, einen so bedeutenden Einfluss auf die Entwicklung der griechischen Geometrie gehabt, dass wir nicht umhin können, wenigstens einige derselben hier vorzuführen.*)

Um einen Widerspruch in dem Begriffe der Bewegung nachzuweisen, verfährt Zeno so: Ehe der bewegte Körper am Ziel ankommen kann, muss er erst in der Mitte des Weges angekommen sein; ehe er in dieser ankommt, in der Mitte seiner ersten Hälfte u. s. f. ins Unendliche. Jeder Körper müsste daher, um von einem Puncte zu einem anderen zu gelangen, unendlich viele Räume durchlaufen; das Unendliche lässt sich aber in keiner gegebenen Zeit durchlaufen. Mithin ist die Bewegung unmöglich.

Auf ähnlichem Grunde beruht der bekannte Beweis Zeno's, dass Achilles das Langsamste, die Schildkröte, nicht einzuholen im Stande sei, wenn letztere irgend einen Vorsprung hat, weil er, um sie einzuholen, erst jeden der unendlich vielen Puncte erreichen müsste, die sie vorher einnahm.

Beide Beweise aber kommen, wie schon Aristoteles

*) S. das Nähere Zeller, *Gesch. d. gr. Phil.* I, 425 ff.

bemerkt, auf den einen Schluss hinaus: Wenn es Bewegung gibt, so muss das Bewegte in begrenzter Zeit unendlich Vieles treffen; dies ist unmöglich, also gibt es keine Bewegung.

Durch denselben Schluss kann man offenbar auch die Möglichkeit widerlegen, eine Länge fortgesetzt halbiren, überhaupt bis ins Unendliche theilen zu können. Es ist unmöglich, dass im Endlichen Unendlichvieles enthalten sei, das ist der positive Satz, auf dem Zeno's Argumente beruhen.

Diese Schlussreihen in ihrer schneidenden Logik galt es nun zurückzuweisen, wenn anders man die gegebene Anschauung von dem Raume und die Wirklichkeit der Bewegung retten wollte. Eine Auskunft, auf die man verfiel, war die, die unendliche Theilbarkeit, damit aber auch die absolute Stetigkeit des Raumes aufzugeben und diese Grössen als aus untheilbaren Elementen in endlicher Zahl zusammengesetzt zu betrachten. Gerade jenen ersten Zenonischen Beweis sah man als hiezu zwingend an, wie uns Aristoteles lehrt, der noch ein Jahrhundert später eine Schrift „über die untheilbaren Linien*“) schrieb, um deren mathematische und logische Unmöglichkeit darzuthun. Auch unser Antiphon liess, wie Eudemos bezeugt**), „den Grundsatz von der unendlichen Theilbarkeit bei Seite“ und meinte, dass wenn man nur jene Construction der Vielecke weit genug fortsetze, man endlich zu einem gelange, welches sich von dem Kreise nicht mehr unterscheide, da gerade und krumme Linien aus denselben untheilbaren Elementen zusammengesetzt seien.

Andere werden diese atomistische Zerstückelung bekämpft haben, indem sie sich auf die unmittelbare Anschauung beriefen, wonach jedes noch so kleine Linienstück beliebig theilbar und auch in einem solchen noch der Unterschied von Gerade und Krumm vorhanden ist.

Aber auch weitere philosophische Erörterungen führten zu demselben Ziel; Plato erkannte sowohl in den Ideen als

*) *περὶ ἀτόμων γραμμῶν*, de insecabilibus lineis. p. 968, a. ed. Bekker.

**) S. Bretschneider a. a. O. p. 102.

in dem sinnlich Wahrnehmbaren das Unendliche an, sowohl nach der Seite des Kleinen als des Grossen. *) Doch war erst des Aristoteles scharfe Dialektik im Stande, in diese Verwirrung Licht zu bringen. Er leitete die Unmöglichkeit, dass Stetiges aus untheilbaren Stücken zusammengesetzt werden könne, aus dem Begriffe des Stetigen ab; „denn stetig (*συνεχές*) sei ein Ding, wenn die Grenze eines jeden zweier nächstfolgenden Theile, mit der dieselben sich berühren, Eine und die nämliche wird, und, wie es auch das Wort bezeichnet, zusammengehalten wird“. **) Und gegen Zeno's erstes Paradoxon bemerkte er sehr richtig: Wir können zwar nicht in unserem Geiste unendlich Vieles in endlicher Zeit zählen; das Bewegte aber bewegt sich nicht zählend; denn Zählen ist eine discrete Operation, die bei jeder Zahl anhält und gewissermassen einen Ruhepunct macht; das Bewegte aber hält nicht bei jedem einzelnen Ruhepuncte an. ***) Und ferner erwiderte er: Allerdings durchläuft der Punct in begrenzter Zeit unendlich viele Linientheile; aber diese Zeit enthält auch unendlich viele Zeittheile; denn die Zeit ist ebenso unendlich theilbar, als der Raum; wenn also in unendlich vielen Zeittheilen auch unendlich viele Raumtheile durchlaufen werden, so hört jedes Paradoxon auf. †)

Auch über den Begriff des Unendlichen (*ἄπειρον*) selbst hat Aristoteles die ersten tieferen Untersuchungen angestellt. Er findet, dass das Unendliche nur der Möglichkeit, der Potenz nach (*δυνάμει*) existirt, jedoch nicht so, dass es einmal eine Verwirklichung als ein bestimmtes Unendliches fände, welches actuell (*ἐνεργείᾳ*) unendlich wäre; sondern es existirt nur immer in einem Entstehen und Vergehen, und wenn auch jedesmal begrenzt, ist es doch immer und immer wieder ein Verschiedenes. ††) Dieses potentiell Unendliche existirt zwar so in der Zeit und dem Zählen, sowie in der Theilung der Grössen, wo das jedesmal Gesetzte

*) Aristot. Phys. I. III. c. 4. 203, a, 9.

**) Ebd. c. 3. 227, a, 10.

***) Arist. de insec. lin. 969, a, 30.

†) Phys. VI, 2. 233, a, 21.

††) Ebd. III, c. 6. 206, a, 18.

wieder vergeht, wenn man weiter fortschreitet, nicht aber in Bezug auf die Zunahme der Grössen.*) Denn was potentiell sein kann, kann auch actuell sein. Da es nun keine unbegrenzte, sinnlich wahrnehmbare Grösse gibt**), so ist es auch nicht möglich, dass es ein Hinausgehen über alle bestimmte Grösse gäbe; denn sonst würde es etwas geben, was grösser wäre als das Himmelsgebäude.***)

Doch ist sich Aristoteles hiebei wohl bewusst, wesentlich von der physikalischen Grösse zu handeln. Denn er sagt: „Vielleicht ist die Untersuchung, ob das Unendliche auch in der Mathematik und in dem Denkbaren und in demjenigen, was keine Grösse hat, existire, eine weit allgemeinere.“†) Sollte aber auch im Denken etwas Unendliches existiren, so folgt daraus nichts für das Wirkliche. „Denn nicht deshalb ist etwas über die bestimmte Grösse, weil es Jemand so denkt, sondern weil es so ist. . . . Die Grösse aber wird nicht durch Vermehrung in Gedanken eine unendliche.“††)

Da, wie man hieraus ersieht, selbst der grösste Dialektiker des Alterthums nicht im Stande war, alle dem Begriffe des Unendlichen anhaftenden Dunkelheiten zu beseitigen, ja durch eine eigenthümliche nationale Beschränktheit selbst sich in neue Schwierigkeiten verwickelte, ist es begreiflich, dass die griechischen Mathematiker, nachdem durch die Paradoxien der Eleaten dies Feld einmal der Dialektik anheimgefallen war, allen diesen Schwierigkeiten aus dem Wege gingen, indem sie ein für allemal den Begriff der Veränderung und Bewegung aus der Wissenschaft verbannten, ebenso den des Unendlichen, auch des potentiell Unendlichen, also des unendlich Wachsenden oder unendlich Abnehmenden, den sie durch den des beliebig Grossen und Kleinen ersetzten.†††). Sie begnügten sich, das Axiom zu constatiren,

*) Ebd. c. 7. 207, 6, 1.

**) Ebd. c. 5, wo aus physikalischen Gründen die Unbegrenztheit der Welt als unmöglich darzuthun versucht worden ist.

***) Ebd. c. 7. 207, 6, 17.

†) Ebd. c. 5. 204, a, 34.

††) Ebd. c. 8. 208, a, 17.

†††) Wie Aristot. Phys. III, 7. 207, 6, 27 ausdrücklich hervorhebt.

dass jede Grösse beliebig theilbar sei. Der Begriff des actuellen Unendlichgrossen fand, wie schon Aristoteles' Lägung einer actuellen Unendlichkeit beweist, überhaupt keine Nahrung in dem klassisch-griechischen Geiste; er verdankt seine Entstehung erst der späteren Richtung des Geistes auf das Transcendente. In dem Begriffe des actuellen Unendlichkleinen aber fanden sie unlösbare Widersprüche: Ein Unendlichkleines vergrössert eine Grösse nicht, wenn es zu ihr hinzutritt. „Was aber zu Anderem hinzukommend dieses nicht vergrössert, und von ihm hinweggenommen es nicht verkleinert, ist Nichts“ — hatte schon Zeno*) gesagt; und doch sollte das Unendlichkleine Etwas sein, insofern es mit anderen Unendlichkleinen in bestimmtem Verhältniss stehen sollte. Ja sie schlossen diesen Begriff ausdrücklich durch das Axiom aus: „Wenn zwei Flächenräume ungleich sind, so ist es möglich, den Unterschied, um welchen der kleinere von dem grösseren übertroffen wird, so oft zu sich selbst zu setzen, dass dadurch jeder endliche Flächenraum übertroffen wird.“**) Danach aber kann es keinen unendlich kleinen Unterschied geben, der nach seinem Begriffe vielfältigt niemals einen endlichen Flächenraum übertreffen kann.

Mit welcher Vorsicht, ja uns unbegreiflicher Aengstlichkeit man in der Wahl solcher Axiome vorgeht, mag man aus der Rechtfertigung ersehen, die noch mehrere Jahrhunderte später Archimedes, als er dieses *λήμμα* (angenommener Satz), wie er es nennt, benutzt, hinzufügen zu müssen glaubt: „Auch die früheren Geometer haben sich dieses Lemma bedient; dass nämlich Kreise im quadratischen Verhältnisse ihrer Durchmesser zu einander stehen u. s. w., ist mit seiner Hilfe dargethan worden. Nun ist aber jeder der angeführten Lehrsätze keineswegs minder annehmbar befunden, als solche, die ohne Zuziehung jenes Lemma dargethan sind, und somit hat dasjenige, was ich jetzt darlege, dieselbe Annehmbarkeit für sich.“

Wenn nun Archimedes jenes Lemma mit dem Satze

*) S. Zeller, a. a. O. p. 425.

**) Archim. De quadr. parabol. Praef.

von dem Verhältnisse der Kreisflächen in solche Verbindung bringt, und andererseits Eudemos letzteren Satz als von Hippokrates erfunden und bewiesen bezeugt*), so dürfen wir auch annehmen, dass Hippokrates jenes von Archimedes wieder aufgenommene Axiom aufgestellt habe, welches in einer oder der anderen Form die Grundlage der Exhaustionsmethode der Alten, d. h. der Methode, durch ein- und umgeschriebene Vielecke den Inhalt einer krummlinigen Figur zu erschöpfen, bildet. Denn diese Methode bedarf nothwendig eines solchen Grundsatzes**), um zu erweisen, dass durch jene Vielecke die krummlinige Fläche auch in der That erschöpft wird, d. h. dass man durch weitere Vervielfältigung der Seitenanzahl nicht nur der krummlinigen Fläche immer näher, sondern ihr so nahe kommt, als man will. War demnach des Hippokrates Beweis des Satzes von den Kreisflächen richtig, wie wir nach Eudemos' Bericht glauben müssen, so war es in diesem zunächst seine Aufgabe nachzuweisen: Es gebe keinen noch so wenig von der Kreisfläche K verschiedenen Flächenraum $K-\varepsilon$, dass nicht eines jener nach Antiphon's Weise eingeschriebenen Vielecke zwischen K und $K-\varepsilon$ liege. Dazu war nöthig, nachzuweisen, dass der Unterschied eines Vielecks vom Kreise kleiner sei, als die Hälfte des Unterschiedes des vorhergehenden Vielecks vom Kreise. War dies geschehen und es hat an der Figur keine Schwierigkeit, so konnte man weiter so verfahren:

Wenn es nicht möglich wäre, durch die Vielecke der Kreisfläche K näher zu kommen, als $K-\varepsilon$, so verdoppele man ε so oft, dass es die Kreisfläche übertrifft, was nach dem Grundsatz zulässig ist, und beschreibe eben so viele Vielecke vom Quadrat an durch Verdoppelung der Seitenzahl in den Kreis. Dann ist nach Voraussetzung das letzte mehr als ε von K verschieden, das vorhergehende, nach dem bereits Bewiesenen, um mehr als 2ε , das diesem vor-

*) Bretschneid. p. 110.

**) Auch Euklid hat einen von jenem nicht wesentlich verschiedenen Grundsatz implicite. Elem. I, def. 3 und 4 und XII, prop. 1. Elemente, V. Buch, 3. und 4. Def., den man explicite so ausdrücken könnte: Eine Grösse kann immer so oft vervielfältigt werden, dass sie jede andere übertrifft.

hergehende um mehr als 4ε , . . und endlich das Quadrat um mehr als jene durch wiederholte Verdoppelung von ε erhaltene Grösse. Diese aber soll die Kreisfläche übertreffen, und es wäre also das Quadrat um mehr als die Kreisfläche kleiner als die Kreisfläche selbst, was unmöglich. Also kommen die Vielecke der Kreisfläche beliebig nahe.

Es kann nicht geläugnet werden, dass dieses Verfahren noch etwas Unbefriedigendes hat. Der Gedanke, dass man, wie weit man auch in der Reihe der Vielecke gehen möge, jene Kreisfläche nie erreicht, obgleich man ihr immer näher und ganz beliebig nahe kommt, spannt das vorstellende Denken in dem Maasse, dass es um jeden Preis diese Lücke, welche gleichsam zwischen der Wirklichkeit und dem Ideal liegt, auszufüllen strebt, und psychologisch gezwungen ist, den — unendlich kleinen oder unendlich grossen? — Schritt zu machen und zu sagen: Der Kreis ist ein Polygon mit unendlich vielen kleinen Seiten. Die Alten aber haben diesen Schritt nicht gethan; so lange es griechische Geometer gab, sind dieselben immer vor jenem Abgrunde des Unendlichen stehen geblieben und haben niemals die Grenze der klaren Anschauung und des völlig widerspruchsfreien Begriffes überschritten.

Wir neueren Mathematiker pflegen nun, um zur Vergleichung von Kreisflächen zurückzukehren, sofort weiter zu schliessen, dass, weil sich ähnliche Kreispolygone wie die Quadrate der Durchmesser verhalten, auch die Kreise selbst, als Polygone mit unendlich vielen Seiten, ebenso verhalten müssen. Die griechischen Mathematiker werden eine ähnliche Vorstellung auch im Geiste gehabt haben und gewiss aus dem Verhältniss der Vielecke sofort mit völliger innerer Gewissheit auf das entsprechende der Kreisflächen geschlossen haben; indessen war diese innere Gewissheit ihnen nicht genügend; sie strebten nach einem unangreifbaren, logisch völlig strengen Beweise, der hier, wo der Weg, auf dem sich der Satz genetisch ergab, nicht unangreifbar war, nur ein indirecter sein konnte. So findet sich denn an dieser Stelle der Exhaustionsmethode überall ein Beweis der Unmöglichkeit, dass das constante Verhältniss der ein- oder umbeschriebenen Vielecke von dem der betreffenden krummlinigen Flächen verschieden sei.

In unserem Falle kann dieser apagogische Beweis nicht wesentlich anders [geführt werden, als ihn Euklid (Elem. XII, 2) gibt.

Es seien r, r' die Radien, K, K' die Flächen zweier Kreise, dann ist

$$r^2 : r'^2 = K : K'.$$

Denn angenommen, es sei nicht der Fall, so sei etwa

$$r^2 : r'^2 = K : Z'.$$

1) Es sei $Z' < K'$. Dann aber kann man in den Kreis jedenfalls ein Vieleck einschreiben, dessen Fläche V' der Kreisfläche näher kommt als Z' . Ist dann V das entsprechende Vieleck in K , so ist:

$$V : V' = r^2 : r'^2 = K : Z', \quad V : K = V' : Z'.$$

Da nun $V' > Z'$, so müsste auch $V > K$, was unmöglich.

2) Es sei $Z' > K'$. Um die Unmöglichkeit dieses Falles zu beweisen, konnte man ihn entweder auf den vorigen reduciren, indem man ein $Z < K$ aus

$$K : Z' = Z : K'$$

bestimmt und dann auf die Proportion:

$$r'^2 : r^2 = Z' : K$$

genau die vorigen Schlüsse anwendete; oder konnte ihn, wie später Euklid, mit Vielecken führen, die dem Kreise umgeschrieben sind. Denn dass bereits damals auch diese angewandt wurden, beweist der Vorschlag eines zeitgenössischen Sophisten Bryson*), die Kreisfläche zu quadriren, indem man sie dem Mittel der ein- und umgeschriebenen Vielecke gleichsetzt.

War nun so bewiesen, dass weder $Z' > K'$ noch $Z' < K$ sein kann, so ist damit in aller Strenge erwiesen, dass $Z' = K'$ sein muss. Diese Exhaustionsmethode**) zur Er-

*) Bretschneider p. 126.

**) Ich muss annehmen, dass diese Methode sich bereits in der Mitte des 5. Jahrh. in ihren wesentlichen Theilen ausgebildet hatte. Denn es gibt keinen anderen Weg, um jenen Satz des Hippokrates streng zu beweisen, und Eudemos, der sonst die Kritik nicht scheut, bemerkt nicht, dass Hippokrates einen Fehler bei dem Beweise begangen habe.

mittelung der Verhältnisse zweier krummlinigen Flächenräume K, K' , die auch ohne Schwierigkeit auf die zweier Körperräume übertragen werden kann, besteht hienach aus drei Theilen: I. Der Construction der ein- und umschriebenen Vielecke V_n, V'_n und der Ermittlung des constanten, d. h. von der Seitenzahl unabhängigen Verhältnisses $V_n : V'_n = \alpha : \beta$ dieser. II. Dem Nachweise, dass die Vielecke die Flächenräume K, K' erschöpfen. Wir haben annehmen zu müssen geglaubt, dass der erste Nachweis ein indirecter gewesen ist; Euklid hat mittels des allgemeinen Lehrsatzes (Elem. X, 1), dass man durch fortgesetzte Halbierung einer Grösse immer zu einer beliebig kleinen Grösse gelangen kann, es möglich gemacht, diesen Nachweis in einfacheren Fällen direct zu führen. III. Der Uebertragung des Verhältnisses $V_n : V'_n$ auf die K, K' , indem $K : K' = \alpha : \beta$ gesetzt und die Unmöglichkeit gezeigt wird, dass es anders sein könne. Dieser Theil des Beweises ist von allen griechischen Geometern stets durch eine reductio ad absurdum geführt worden, weil sie den zwischen den Vielecken und den krummlinigen Flächen vermittelnden natürlichen Grenzbegriff der unendlichen Fortsetzung der Reihe der Vielecke nicht besaßen und daher einen indirecten Weg einschlagen mussten.

Es wäre nun aber möglich gewesen, diesen sich bei jeder einzelnen Untersuchung wiederholenden Theil des Beweises ein für allemal zu erledigen, wenn man folgenden Lehrsatz aufgestellt und auf die oben angegebene indirecte Art bewiesen hätte:

Wenn die Glieder zweier beliebig weit fortzusetzender Reihen von Grössen

$$\begin{array}{c} V_1, V_2, V_3 \dots \\ V'_1, V'_2, V'_3 \dots \end{array}$$

in dem constanten Verhältnisse:

$$V_1 : V'_1 = V_2 : V'_2 = V_3 : V'_3 = \dots = \alpha : \beta$$

stehen, und es kommen die V einer Grösse K , die V' einer Grösse K' beliebig nahe, so ist auch

$$K : K' = \alpha : \beta.$$

Einen solchen Satz findet man aber bei den Alten nirgends. Obgleich Euklid im XII. Buche seiner Elemente fünfmal

hintereinander Exhaustionen vornimmt, auf welche dieser Lehrsatz, der den III. Theil des Beweises ganz erspart, anwendbar wäre, so führt er doch fünfmal jene deductio ad absurdum vollständig durch. Archimedes, der sich mit besonderer Vorliebe und ausgezeichnetem Erfolge mit den Problemen der Quadratur und Kubatur beschäftigte, hat die Exhaustionsmethode auf mannigfache Weise modificiren müssen, weil jener Euklidische Lehrsatz in seinen Aufgaben nicht ausreichte, um den II. Theil des Beweises zu führen, aber niemals ist es ihm eingefallen, seine geschickten Kunstgriffe zu gleichförmigen Methoden auszubilden, welche, nachdem einmal der Faden angesponnen ist, ihn so zu sagen selbstständig weiter abwickeln. Von einer Exhaustionsmethode zu sprechen ist sonach insofern kaum zulässig, als die Alten niemals ihr Verfahren der Quadratur oder Kubatur unter einem allgemeineren Gesichtspunkte, wie er etwa hier gegeben ist, dargestellt und zu dem Range einer wissenschaftlichen Methode erhoben haben.

Um nun zum Schlusse zu der speciellen Quadratur des Kreises zurückzukehren, so galt es, nachdem die Beziehung der Fläche zu dem Durchmesser festgestellt war, sie zu ermitteln. Es ist wohl anzunehmen, dass dies, nachdem Antiphon und Bryson einmal den Weg gezeigt hatten, geschehen sein wird, indem man die successiv ein- oder umgeschriebenen Vielecke in Quadrate verwandelte. Indess werden die hiezu nöthigen complicirten Constructionen, welche wohl die Kräfte der Geometer jener Zeit überstiegen, bald von diesem Wege abgeschreckt haben; wenigstens erfahren wir nichts von weiteren Versuchen in dieser Richtung; und das Problem numerisch und mit einer gewissen Annäherung zu lösen lag, wie wir noch weiter sehen werden, jener Zeit ganz fern.

Erst Archimedes ging etwa 250 Jahre später auf diese Weise vor und brachte es trotz seiner vom ganzen Alterthum angestaunten Rechenkunst doch nur dahin, aus den berechneten Umfängen eines ein- und eines umgeschriebenen 96-Eckes zu schliessen, dass das Verhältniss des Umfanges zu dem Durchmesser des Kreises zwischen $3\frac{1}{7}$ und $3\frac{10}{17}$ läge. Andere Geometer, namentlich Apollonius, sollen nach ihm die Annäherung weiter getrieben haben.

Wenn man nun auch bis auf Archimedes keinen Schritt vorwärts zur Quadratur des Kreises zu thun vermochte, so entdeckte doch Hippokrates bei seinen einschlägigen Untersuchungen wenigstens krummlinige begrenzte Flächenräume, welche construierbaren geradlinigen Figuren gleich sind; und zwar mondförmige Räume (Menisken), die von zwei über einer Sehne stehenden Kreisbögen begrenzt sind, deren Centriwinkel sich wie 1:2 oder 1:3 oder 2:3 verhalten. *) Er knüpfte an diese überraschenden Entdeckungen grosse Erwartungen und zeigte, dass wenn es in solcher Weise gelingen sollte, bestimmte andere Monde zu quadriren, damit auch das Problem der Quadratur des Kreises gelöst sei. So war wenigstens ein Weg gezeigt; freilich einer, der nie zum Ziele geführt hat.

Die Platonische Schule.

(Viertes Jahrhundert.)

Die letzten Jahrzehnte des 5. Jahrhunderts, in denen Athen, das jetzt auch in der Mathematik die Führerschaft übernommen hatte, durch den peloponnesischen Krieg schwer heimgesucht wurde, waren für die Förderung unserer Wissenschaft unfruchtbar. Ausserhalb Athens ist der einzige namhafte Mathematiker der bekannte Demokrit (geb. c. 470), der seine mathematischen Schriften, von denen uns jedoch leider nur die theilweise unverständlichen Titel **) überliefert sind, in dieser Zeit geschrieben haben mag.

Eine neue Epoche ihres Glanzes aber beginnt mit dem 4. Jahrhundert, als sich alle mathematischen Talente jener Zeit in der Akademie vereinigten. Platon (429—348), mit einer umfassenden Kenntniss der Mathematik und einer bedeutenden Begabung auch für dies Gebiet reiner Speculation ausgerüstet, theilte nicht die spießbürgerliche Ansicht seines Lehrers Sokrates ***), „dass man Geometrie nur soweit

*) Bretschneider p. 109—121. Es ist interessant, dass diese von Hippokrates quadrierten Menisken in der That die einzigen sind, deren Flächenraum sich mit Hilfe von Lineal und Cirkel, also elementar construiren lassen. (Vergl. Clausen, Crelle, Journ. t. 21. p. 375.)

**) Diog. IX, 47.

***) Diog. II, 32.

treiben dürfe, bis man Land mit dem Maasse austheilen oder annehmen könne“. Er hat von den Pythagoreern, mit denen er in Grossgriechenland und Athen viel verkehrt hatte, nicht nur mathematisches Wissen, sondern auch die Anschauungen von der allgemeinen realen Bedeutung der Zahl- und Raumverhältnisse angenommen.

Die Seele der Welt ist ihrer ganzen Substanz nach in den festen Verhältnissen des harmonischen und astronomischen Systems getheilt*); sie begreift alle Zahlen und Maassverhältnisse von Ewigkeit her ursprünglich in sich, sie ist ganz Zahl und Harmonie, von ihr stammt alle Zahlenbestimmtheit und alle harmonische Gesetzlichkeit der Welt, sie ist das mathematische Princip selbst. Die Astronomie, wenn sie recht betrieben wird, hat die Aufgabe, diese ewigen Ideen aus ihrer realen Erscheinung zu ergründen und so zu der Erkenntniss der reinen Ideen vorzubereiten. Die Elemente der körperlichen Welt sind selbst nach geometrischen Vorbildern geschaffen, die regulären Körper der Geometrie sind ihre Formen.**). Und wie die äussere Natur, so soll auch die menschliche Gemeinschaft in allen ihren Lebensbeziehungen nach festen arithmetischen Verhältnissen, welche den geheimnissvollen Beziehungen der in jenen zum Ausdruck kommenden Ideen entsprechen, geordnet sein. Platon's Idealstaat enthält genug Beispiele solcher für uns meist unverständlicher, immer aber nach Proportionen der verschiedenen Art, durch Wurzelausziehungen und Quadrirungen erhaltener Zahlenbestimmungen für die Eintheilung des Staates und die Regelung des bürgerlichen Lebens.***) Die Geometrie ist nach Platon „die Erkenntniss des immer Seienden“†), wenn sie nicht um des praktischen Gebrauches willen betrieben, sondern vom Sinnlichen in das Reich des Gedankens übergeführt wird. Zwischen dem ewigen, unveränderlichen wahren Sein der Ideen und dem Unwirklichen, dem Nichtsein der Materie, welche nur durch eine „Theilnahme“ an den Ideen in den sinnlichen Dingen ein

*) Timaeus, 35. A. ff.

**) Tim. 53. C. ff.

***) Polit. 546.

†) Polit. 527.

veränderliches Werden und Dasein erlangt, steht das Mathematische in der Mitte, jedoch mit einer Annäherung an das Ideale. Und, während ihm früher die Zahlen nur ein Schema zum Ausdruck des rein Begrifflichen sein sollten, so wurden ihm später die Ideen selbst zu Zahlen, die sich von den mathematischen nur dadurch unterscheiden, dass letztere aus lauter gleichartigen Einheiten bestehen, so dass jede mit der anderen zusammengesetzt werden kann, während dies bei den Idealzahlen nicht der Fall ist. *)

Wir können hier nicht auf eine nähere Darstellung dieser vielfach an die Pythagoreischen Lehren erinnernden, halb phantastischen Beziehungen eingehen, in die Platon das Mathematische, also Zahl, Raum, Zeit, zu seiner Ideenlehre setzte; wir begreifen aber, wie er bei der Eröffnung seiner Vorträge in der Akademie (im Jahre 389) das berühmte Wort: „Kein der Geometrie Unkundiger trete unter mein Dach“ [*μηδεις ἀγεωμέτρητος εἰσὶτω μοῦ τὴν στέγην* **]) als Lösung ausgeben konnte.

Doch war es nicht nur dies theoretische, sondern auch ein praktisches Interesse, welches sich für ihn an die Mathematik knüpfte. Er glaubte beobachtet zu haben, „dass die, welche von Haus aus Mathematiker sind, sich auch in allen anderen Kenntnissen schnell fassend zeigen; die von Natur langsamen aber, wenn sie in der Mathematik unterrichtet und geübt sind, sollten sie auch weiter keinen Nutzen daraus ziehen, wenigstens darin alle gewinnen, dass sie in schneller Fassungskraft sich selbst übertreffen“. ***) Und diejenigen, welche den praktischen Nutzen der Astronomie für die Schifffahrt, die Chronologie u. s. w. hervorhoben, verspottete er ihrer Nüchternheit wegen: „Das aber, fügte er hinzu, ist die Sache und nichts Geringes, jedoch schwer zu verstehen, dass durch jede dieser Kenntnisse ein Sinn der Seele gereinigt wird und aufgeregt, der unter anderen Beschäftigungen verloren geht und erblindet, da doch an dessen Erhaltung mehr gelegen ist, als an tausend Augen; denn durch ihn

*) Vergl. Zeller, Gesch. d. gr. Phil. II, 1. p. 430 ff.

**) Tzetzes, Chil. VIII, 972.

***) Platon, Polit. 526.

Hankel, Gesch. d. Mathem.

allein wird die Wahrheit gesehen.“*) In noch höherem Grade aber fand er diesen Nutzen bei dem Studium der Mathematik, welche den Geist von dem Sinnlichen abziehe und ihn fähig mache, das Ideale zu begreifen. Die „Erkenntniss der in den Gestirnen waltenden Vernunft und mathematisches Wissen“ sind in seinem Idealstaat unentbehrliche Erfordernisse eines jeden, der unter die Gebildeten aufgenommen sein will.

Wenn Platon damit auch im Wesentlichen nur das wiederholt, was wohl schon die Pythagoreische Schule ausgesprochen hatte, so hat er doch dadurch sich das grosse Verdienst erworben, diese Ansichten zur thatsächlichen Geltung gebracht und die Mathematik zu einem nothwendigen Theile der höheren Bildung für seine und alle Folgezeit gemacht zu haben. Denn wenn von den Schulmännern bis heute, auch in den Zeiten des einseitigsten Humanismus, der Mathematik auf den Gelehrtschulen überall wenigstens ein Plätzchen zugestanden worden ist, so verdanken wir dies vor Allem der Autorität Platon's, dessen Behauptungen über den pädagogischen Werth der Mathematik sich wenigstens noch in der verblassten Phrase von ihrem „formalen“ Nutzen bis heute erhalten haben.

Um nun zur Akademie zurückzukehren, so hatte die Anregung, welche Platon zu mathematischen Studien gab, nicht allein jenen gewünschten formalen, sondern noch weit mehr den realen Nutzen, dass die Mathematik durch die vereinten Bestrebungen und den Wetteifer so vieler unter Einer Leitung stehenden jungen Männer mächtig gefördert wurde. Als Platon seine Schule eröffnete, war der Pythagoreer Archytas von Tarent († 365) der einzige namhafte Geometer Griechenlands. Alle anderen Männer, von denen uns bis gegen das Ende dieses Jahrhunderts mathematische Leistungen berichtet werden**), waren entweder Freunde und Genossen der Akademie, wie Leodamas von Thasos, Theaetetus von Athen, später Neoklides und dessen Schüler Leon, der wenig älter ist, als Eudoxus von Knidos (410—357),

*) Ebd. 527.

**) S. über diese Eudemus in Prokl. Comm. p. 19 ed. Basil. oder Bretschneider p. 29, 30.

der Schüler des Archytas*), oder waren eigentliche Schüler Platon's, wie Amyklas von Heraklea, das Brüderpaar Menaechmus und Dinostratus, Theudius von Magnesia, Kyzikenus von Athen und etwas später Hermotimus von Kolophon, Philippus von Mende.

Fortschritte in den Elementen.

Wir fassen nun zunächst zusammen, was diese Gruppe von Männern für die Förderung der zu jener Zeit bereits in Angriff genommenen Theile der Mathematik geleistet hat.

Was zunächst die Arithmetik und allgemeine Grössenlehre betrifft, so werden dem Platon selbst die Lehrsätze zugeschrieben: „Zwischen zwei Quadratzahlen fällt eine, zwischen zwei Kubikzahlen fallen zwei mittlere Proportionalzahlen“; d. h. sind a, b zwei ganze Zahlen, so lassen sich auch x und y in den Proportionen

$$a^2 : x = x : b^2$$

$$a^3 : x = x : y = y : b^3$$

immer als ganze Zahlen bestimmen. Diese Theoreme gehören zu der ganzen Gruppe engverbundener Sätze, welche Euklid**) im VIII. Buche seiner Elemente vorträgt, und welche somit wohl schon den Platonikern im Wesentlichen bekannt gewesen sein werden.

Wie wir wissen (S. 100), hat Pythagoras zur Bildung ganzzahliger rechtwinkliger Dreiecke die Formel

$$a^2 + \left[\frac{a^2 - 1}{2} \right]^2 = \left[\frac{a^2 + 1}{2} \right]^2$$

gegeben, worin er jedoch a als ungerade voraussetzen musste. Platon***) hat dieser Formel folgende zur Seite gestellt, welche von einer geraden Zahl a ausgeht:

$$a^2 + \left[\left(\frac{a}{2} \right)^2 - 1 \right]^2 = \left[\left(\frac{a}{2} \right)^2 + 1 \right]^2,$$

deren Ableitung aus der älteren für uns zwar einfach genug ist (wir brauchen nur letztere mit 4 zu multipliciren und $2a$

*) Diog. VIII, 86.

**) Nikom. Introd. arith. II, 24. S. Eukl. Elem. VIII, 11, 12.

***). Aeltester Zeuge: Heron, rel. ed. Hultsch p. 56.

durch a zu ersetzen), jedoch in jener Zeit immerhin nicht ohne Schwierigkeiten war.

Weniger der Platonischen, als der in Archytas noch fortlebenden Pythagorischen Schule wird man die Weiterführung der Lehre von den Proportionen zu verdanken haben. Zu den drei älteren Proportionen (s. S. 104) soll Archytas und ein nicht näher bestimmbarer Pythagoriker Hippasus noch folgende drei, aus der harmonischen hervorgegangene erfunden haben*):

$$a : c = (b - c) : (a - b)$$

$$b : c = (b - c) : (a - b)$$

$$a : b = (b - c) : (a - b)$$

Nach Eudemus hat Eudoxus, der Schüler des Archytas, diese Proportionen erfunden**), und er scheint sich mit der wichtigsten aller Proportionen, der geometrischen, eingehend beschäftigt zu haben; wenigstens wird uns berichtet***), dass die eigenthümliche Behandlung, welche Euklid im V. Buche seiner Elemente diesen Proportionen angedeihen lässt, um rationale und irrationale Grössen gleichzeitig zu umfassen, von Eudoxus herrühre. Hierher gehört auch die Nachricht†), dass erst Theaetet den allgemeinen Satz, dass „Quadrate, welche sich nicht wie Quadratzahlen verhalten, in Länge incommensurable Seiten haben“, erfunden habe.

In dem Raume dreier Dimensionen waren bis hieher die 5 regelmässigen Körper allein Gegenstand einer wohl nicht tief eindringenden Untersuchung gewesen, so dass Platon sagen konnte „mit der Stereometrie steht es noch lächerlich; sowohl weil kein Staat den rechten Werth darauf legt, wird hierin nur wenig erforscht bei der Schwierigkeit der Sache, als auch bedürfen die Forschenden eines Anführers, ohne den sie nicht leicht etwas entdecken werden, und der wird sich nicht so leicht finden; und fände er sich, so

*) Jambl. comm. in Nik. arith. ed. Tennul. p. 142, 159, 163.

**) Bretschn. p. 29.

***) Im sogenannten Scholium des Adelos (abgedruckt in der Ausgabe Euclidis Elem. graece ab E. F. August. ps. II Berolini 1829. p. 329), das Knoche (Unters. üb. d. Schol. d. Proklus. Herford, Programm von 1865, p. 10) dem Proklus zuschreibt.

†) Eb. p. 24. S. jedoch oben p. 103.

würden ihm, wie die Sache jetzt steht, die, welche in diesen Dingen forschen, nicht gehorchen, weil sie sich selbst zu viel dünken“.*) Doch wagte er es, selbst die Führerschaft zu übernehmen und der Erfolg belohnte es: Nicht allein wurde die Theorie der regelmässigen Körper weiter gefördert**), auch die unregelmässigen einfachen Körper, das Prisma, die Pyramide, der gerade Cylinder und Kegel wurden untersucht. Die Sätze, dass Pyramide und Kegel der dritte Theil eines Prismas und Cylinders von gleicher Grundfläche und Höhe sind (und vielleicht auch der Satz, dass Kugeln im kubischen Verhältnisse ihrer Radien stehen), wurden nach Archimedes' Bericht von Eudoxus entdeckt und mittels des Axioms S. 121 bewiesen.***) Auch das Problem, die Seite eines Würfels zu finden, dessen Inhalt doppelt so gross ist, als der eines gegebenen, das Platon bei seinen Klagen über den niedrigen Stand der Stereometrie†) wesentlich mit im Auge hatte, machte durch seine Anregung bedeutende Fortschritte. Die grösste Leistung in der Stereometrie aber war die Erfindung der Schnitte des Kegels durch seinen Schüler Menaechmus.

Doch damit treten wir bereits in die höhere Geometrie ein, die uns später beschäftigen soll. Zuvor jedoch noch eine Bemerkung.

Man sieht, wie Plato selbst an der eigentlich mathematischen Arbeit sich direct nur wenig betheiligte. Der Antheil, den ihm das ganze Alterthum an den Entdeckungen seiner Schule zuspricht, wird sich daher mehr auf die Anregungen beschränkt haben, die sein reicher, mathematisch begabter Geist freigebig nach allen Seiten ausstreute, auf geniale Aperçus, die seine Schüler emsig verfolgten, auf die Begeisterung und den Wettstreit, den er unter seinen Genossen für diese edle Wissenschaft zu erwecken wusste. Näher lag ihm bei seinen sonstigen Speculationen noch der philosophische, sowohl metaphysische als logische Theil der Mathematik. Kaum kann es bezweifelt werden, dass ihn die

*) Polit. VII, 528.

**) Durch Theaetet (Suidas s. v. Theaet.).

***) Arch. quad. parab. praef.

†) a. a. O. περί τῆν τῶν κύβων αὐξήν καὶ τὸ βάθος μετέχον.

Untersuchung der Methode*) und der Grundbegriffe der Mathematik, die nicht lange nachher bei Euklid ihren Abschluss gefunden hat, beschäftigt haben muss.

Wir haben zwar gesehen, dass die Beweisführung der griechischen Geometer bereits im 5. Jahrhundert in Bezug auf ihre streng logische Form der späteren im Wesentlichen gleicht, und mussten in der Exhaustionsmethode, welche muthmasslich schon jener Zeit zufällt, ein wahres Meisterstück feiner Logik bewundern. Doch aber kann es keinem Zweifel unterliegen, dass diese strengen Methoden ohne weitere Reflexion über deren Wesen aus dem eigenthümlich hiefür organisirten griechischen Geiste hervorgewachsen sind, und dass man ohne Bedenken die Anschauungen der gegebenen geometrischen Objecte, des Punctes, der Linie, der Fläche u. s. w. und deren nächstliegender Eigenschaften in die Geometrie aufgenommen haben wird, ohne sich mit formellen Definitionen abzumühen. Denn wenn auch schon die Pythagoriker erklärten, dass der Punct eine Einheit sei, welche einen Ort einnehme**), dass der Punct der Einheit, die Linie der Zweiheit, die Fläche der Dreiheit, der Körper der Vierheit entspreche***), so war dies nicht eine eigentliche Definition, sondern eine metaphysische Behauptung.

Ueberhaupt ist ja erst durch Sokrates im Gegensatze

*) Er liebt es, mathematische Beispiele zur Erläuterung philosophischer Methode zu benutzen. So: Euthyph. 82 ff., Theaet. mehrmals; ferner in der berühmten Stelle Menon 22, deren Dunkelheit und Kürze schon unzählige Erklärungsversuche veranlasst hat. Der neueste Versuch dieser Art (A. Benecke, Ueber die geometrische Hypothesis in Platon's Menon, Elbing 1867) scheint endlich die Schwierigkeiten in der Hauptsache gelöst zu haben, obgleich auch er noch einigen Bedenken Raum lässt. Denn wenn die *ὑπόθεσις* wirklich die von Benecke vermuthete überaus einfache war, dass die Seite des Quadrates (*τὸ χωρίον*) gleich dem Radius des Kreises sein müsse, warum drückte Platon dies in der schwerfälligen, unnütz weitläufigen Weise aus? *εἰ μὲν ἐστι τοῦτο τὸ χωρίον τοιούτῳ χωρίῳ, οἷον παρὰ τὴν δοθεῖσαν αὐτοῦ γραμμὴν παρατείναντα ἐλλείπειν τοιούτῳ χωρίῳ, οἷον ἂν αὐτὸ τὸ παρατεταμένον ᾗ.* Und wie konnte die der Aufgabe wesentliche Bedingung, dass das an dem Durchmesser zu beschreibende Dreieck ein rechtwinkliges, gleichschenkliges sein müsse, gänzlich unausgesprochen bleiben?

**) Prokl. Comm. ad def. 1.

***) Ebd. def. 2.

zu der früheren dogmatischen Behandlung die Begriffs-
bildung als die Grundlage jeder Wissenschaft dargethan
worden. Dass sein Schüler Platon, auf dieser Grundlage
weiter bauend, es nicht unterlassen haben wird, die Prin-
cipien der Mathematik zu untersuchen und die Definitionen
ihrer Grundbegriffe festzustellen, ist von vornherein wahr-
scheinlich, wird aber auch durch historische Zeugnisse unter-
stützt. Wir erfahren, dass, nachdem schon Hippokrates
Elemente (*στοιχεῖα*) der Mathematik zusammengestellt hatte,
auch ein Zeitgenosse Platon's, Leon solche schrieb, die
jene an Menge und Brauchbarkeit des Bewiesenen übertrafen;
ferner die Determination (*διορισμός*) erfand, „wann ein vor-
gelegtes Problem möglich ist, wann unmöglich“, dass ferner
Platon's Schüler Theudius von Magnesia „sehr gute Ele-
mente verfasste, wobei er vieles Specielle verallgemeinerte“.*)
Wenn nun Aristoteles zerstreut in seinen Schriften mathe-
matische Definitionen als allgemein recipirte anführt und
bespricht, so kann kein Zweifel obwalten, dass diese der
Platonischen Schule entstammen. Er erzählt uns, „dass Platon
den Begriff des Punctes als eine geometrische Fiction (*δόγμα*)
bekämpfte und dafür häufig 'Anfang der Geraden' oder 'un-
theilbare Linien' gesagt habe“.***) Ferner erwähnt er, dass
man den Punct***), die Linie, die Fläche†) als „Grenzen“
beziehungsweise der Linie, der Fläche, des Körpers anzu-
sehen pflege.††) Er gibt ferner die zu seiner Zeit üblichen
Definitionen der Linie, als „einer Länge ohne Breite“†††),
des Geraden: „Gerade ist, dessen Mittleres die Grenzen

*) Eudemus bei Bretschn. p. 29, 30.

**) Met. I, 9. 992, a, 20.

****) Bei Arist. *στιγμή*, bei Späteren *σημεῖον*.

†) Bei den Pythagorikern heisst die Fläche *χρoιά*, bei Aristoteles
noch *ἐπίπεδον*, während dies später nur die Ebene bezeichnet. Diesen
Gebrauch und zugleich die neue Bezeichnung *ἐπιφάνεια* für die Fläche
soll Platon aufgebracht haben. Diog. III, 24.

††) *Τὸ μὲν γὰρ γραμμῆς, τὸ δ' ἐπίπεδον, τὸ δὲ στερεοῦ φασὶ
πέρας εἶναι.* Ar. Top. VI, 4. 141, b, 19. Vergl. Eukl. I, def. 3, 6; XI,
def. 2: *Γραμμῆς πέρατα σημεῖα, ἐπιφανείας πέρατα γραμμαι, στερεοῦ
πέρας ἐπιφάνεια.*

†††) *Οἱ τὴν γραμμὴν ὀρίζόμενοι μῆκος ἀπλατέες εἶναι.* Top. VI, 6.
143, b, 12. Vergl. Eukl. I, def. 2: *Γραμμὴ μῆκος ἀπλατές.*

verdeckt“*), nämlich wenn man an der Linie entlang sieht, der Fläche, als welche „aus dem Breiten und Schmalen entsteht“**), des Körpers, als „das drei Dimensionen Habende“***) u. s. w. Wir sind berechtigt, alle diese Definitionen, von denen die meisten später in Euklid's Elemente übergegangen sind, der Platonischen Schule, ja theilweise dem Meister selbst zuzuschreiben.

Derselben Quelle, nämlich der in dieser Schule natürlichen Verbindung philosophischer und mathematischer Speculation, entsprang auch der durch Euklid's Elemente allgemein bekannte Gebrauch, an die Spitze der Mathematik gewisse Grundsätze, „Axiome“†), zu stellen, auf welche man sich als ausgemachte Wahrheiten im Verlaufe der Entwicklung berufen kann, wie: „Gleiches von Gleichem abgezogen lässt Gleiches“††) u. a. ähnliche.

Aus alledem ersehen wir, welche hohe Stufe die zu Aristoteles' († 322) Zeiten bekannten Lehrbücher der Elemente von Leon und Theudius einnahmen und wie sie bereits die Form derselben wesentlich fixirt hatten, welche man seitdem, ohne die Geschichte zu befragen, immer als die Erfindung Euklid's angesehen hat. Die Elemente des Alexandriner's aber haben die seiner Vorgänger so völlig verdrängt, dass wir nicht mehr im Stande sind, die Verdienste letzterer von seinen eigenen zu trennen.

*) *Τὸ εὐθύ, οὗ τὸ μέσον ἐπιπροσθεῖ τοῖς πέρασιν.* Top. VI, 11. 148, b, 29. Diese wird von Prokl. Comm. ad def. 4 ausdrücklich dem Platon zugeschrieben.

**) *Ἐκ πλάτους καὶ στενοῦ.* Met. I, 9. 992, a, 12, so die „Platoniker“.

***) *Σῶμα τὸ ἔχον τρεῖς διαστάσεις.* Top. VI, 5. 142, b, 24. Vergl. Eukl. XI, def. 1. *Στερεόν ἐστὶ τὸ μήκος καὶ πλάτος καὶ βάθος ἔχον.*

†) *Τὰ ἐν τοῖς μαθήμασι καλούμενα ἀξιώματα.* Met. IV, 3. 1005, a, 20.

††) *Ἀπὸ τῶν ἴσων ἴσων ἀφαιρουμένων ἴσα λείπεσθαι.* An. post. I, 11. 77, a, 31. Met. XI, 4. 1061, b, 17 und noch unzählige Male; zuweilen mit dem Zusatze *ἢ τῶν τοιούτων ἅττα*, so An. post. I, 11. 77, a, 31 und II, 11. 88, a, 36. Vergl. Eukl. I, ax. 2: *Ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπούμενά ἐστιν ἴσα.*

Die analytische Methode.

Noch nach einer andern Seite hin, als der einer wissenschaftlichen Grundlegung der Elemente, hat Platon die Methodik der Geometer erweitert. Er zeigte ihnen in der sog. *analytischen Methode* den logischen Weg zur Forschung.*)

Das Wort „analytisch“ ist seitdem von den Philosophen**) und Mathematikern in so mannigfaltiger Bedeutung verwendet worden, dass es zu einer klaren Auffassung der von den alten Geometern analytisch genannten Methode nothwendig ist, sich ausdrücklich jede andere Bedeutung dieses Wortes aus dem Sinn zu schlagen.

Die älteste Definition der Analysis im Gegensatz zu der bis auf Platon allein gekannten Synthesis findet sich bei Euklid.***)

„Analysis ist die Annahme des Gesuchten als zugestanden durch die Folgerungen bis zu einem als wahr Zugestandenem.

„Synthesis aber die Annahme des Zugestandenem durch die Folgerungen bis zu dem Erschliessen und Wahrnehmen des Gesuchten.“

Diese unbestimmte Erklärung ist dann in der Schultradition constant geblieben†), und die ausführlicheren Er-

*) Dass Platon deren Erfinder sei, bezeugt Prokl. Comm. ad prop. 1 und Diog. III, 24.

**) *Ἀναλύειν* heisst: Ein Gegebenes auf die Bestandtheile, aus denen es zusammengesetzt ist, oder die Bedingungen, durch die es zu Stande kommt, zurückführen. In diesem Sinne gebraucht Aristoteles *ἀναλύειν* und *ἀνάλυσις* stehend für die Zurückführung der Schlüsse auf die drei (logischen) Schlussfiguren, und so steht *ἀναλύειν* für *ζητεῖν* in der Bedeutung: untersuchen. (Zeller, Gesch. d. gr. Phil. II, 2, p. 131.) Doch gebraucht Aristoteles jene Wörter mehrmals auch in einer dem technischen Sinne der Geometer sehr nahen Bedeutung (An. post. I, 12. 77, b, 27 und 78, a, 6. Eth. Nik. III, 5. 1112, b, 21).

***) Elem. XIII, 5. Vielleicht aber geht diese Definition nach Bretschneider's scharfsinniger Vermuthung (a. a. O. p. 168) sogar bis auf Endoxus zurück.

†) Z. B. des Pappus, Coll. math. I. VII am Anfang. Der erste Philosoph, bei dem sich die Unterscheidung analytischer und synthetischer Methode in demselben Sinne zeigt, ist nach Prantl (Gesch. d. Logik, t. I, p. 621) Alexander von Aphrodisias (um 200 n. Chr.).

klärungen späterer Schriftsteller haben sie kaum verständlicher gemacht. Ich habe im Folgenden versucht, das Wesen der analytischen Methode in antikem Sinne genauer zu charakterisiren und zugleich die Bedingungen, unter welchen sie statthaft ist, festzustellen:

Jeder Lehrsatz der Geometrie enthält eine Behauptung, dass wenn einer gewissen Figur eine gewisse Eigenschaft A zukommt, ihr auch nothwendig und allgemein eine andere B zukommt, kurz, dass wenn A ist, auch B sein muss.

Findet nun neben einem solchen Satze noch ein zweiter statt, wonach, wenn A nicht ist, auch B nicht ist, so kann man beide in das eine Urtheil zusammenfassen: A ist die hinreichende und nothwendige Bedingung für B . Da weiter hieraus folgt, dass, wenn B ist, auch A sein muss, so ist in diesem Falle der Lehrsatz unbedingt und allgemein umkehrbar, und jene beiden Eigenschaften A und B stehen daher in dem festen Verhältnisse zu einander, dass eine die andere bedingt und beide stets gleichzeitig, wie an einander gekettet erscheinen.

Im Falle, dass A nicht die nothwendige Bedingung dafür ist, dass B stattfindet, so ist der Satz: A ist B nicht umkehrbar; es folgt aus ihm nur der Satz „ B ist A oder Nicht- A “.

In letzterem Falle werden sich alle solche Sätze befinden, bei welchen B eine untergeordnete, in A bereits enthaltene Eigenschaft ist, wie man solche wohl als Hilfsätze in den Beweisen gebrauchen kann. Ein Satz dagegen, der etwas Wesentliches aussagen, d. h. eine Wahrheit A mit einer anderen, nicht logisch in ihr bereits vorhandenen verknüpfen soll, muss allgemein umkehrbar sein, wenn er als definitiver Abschluss einer Theorie gelten soll. Ein Satz, „Wenn A ist, so ist auch B “, der nicht umkehrbar ist, weist stets auf einen anderen umkehrbaren Satz: „Wenn A' ist, so ist B “ hin, in dem jener als einfache logische Folge enthalten ist, indem entweder A' eine allgemeinere Eigenschaft als A oder B' eine speciellere als B bezeichnet, so dass, während A eine hinreichende Bedingung des Eintritts von B war, A' auch die nothwendige Bedingung des Stattfindens von B' ist. Erst, wenn so das Subject A zu einem

A' erweitert, das Prädicat B zu einem B' zusammengezogen ist, so dass A' , B' zwei in jenem reciproken Verhältniss einander bedingende Eigenschaften bedeuten, hat man die volle Erkenntniss in dem betreffenden Gebiete erlangt.

Es ist hier nicht unsere Aufgabe, den Grund des unserer Wissenschaft eigenthümlichen Vorzuges zu untersuchen, dass wenigstens in allen ihren elementaren Gebieten dies Ziel völlig erreicht ist und somit alle Hauptsätze allgemein umkehrbar sind, wie eine Durchsicht jedes Lehrbuches der Elemente zeigen kann. Doch sind nicht alle Lehrsätze in den Formen, in denen man sie zu geben pflegt, unbedingt umkehrbar. Z. B. der Satz: „Die Spitzen aller Dreiecke mit gemeinschaftlicher Basis, deren Winkel an der Spitze einen constanten Werth hat, liegen auf einem Kreise“, gestattet nicht die Umkehrung in den anderen: „Alle Dreiecke mit gemeinschaftlicher Basis, deren Spitzen auf einem Kreise liegen, haben denselben Winkel an der Spitze“. Denn einerseits gilt dies nur, wenn der Kreis durch die Endpunkte der Basis geht, andererseits nur für den auf je einer Seite der Basis gelegenen Theil des Kreises. Fügt man aber diese Bedingungen zu jenem Lehrsätze hinzu, so wird er allerdings und zwar unbedingt umkehrbar. Aehnlich verhält es sich mit dem Satze: „Liegen A, B, D, F auf einem Kreise, so ist (unter E den Durchschnitt von AB und DF verstanden) $EA \cdot EB = ED \cdot EF$ “, dessen Umkehrung offenbar dadurch bedingt ist, dass, je nachdem A und B auf derselben oder der entgegengesetzten Seite von E liegen, auch ED und EF gleich oder entgegengesetzt gerichtet sind.

Sätze dieser Art, welche erst durch die Hinzufügung gewisser bekannter Bedingungen, die man im Lehrsätze der Kürze halber häufig hinweglässt, umkehrbar werden, will ich bedingt umkehrbare nennen.

Um ein Theorem „ A ist B “ zu erweisen, wendet man in der Regel die Synthesis an, welche darin besteht, dass man zunächst mittels schon erwiesener Lehrsätze und anerkannter Axiome eine Reihe von Sätzen: A ist D , D ist E , ... an einander fügt, bis man zu einem Prädicat F gelangt, von dem es gilt: F ist B . Dann gibt jene Reihe sofort den Schluss A ist B . — q. e. d.

Die Alten haben für ihre Lehrsätze oder zum Beweise der Richtigkeit von Constructionen stets solche synthetische Beweise gegeben, mit Ausnahme der Fälle, wo sie die apagogische Beweisform (*reductio ad absurdum*) anwenden. Ist nämlich auf diese Art zu beweisen „ A ist B “, so verfährt man so: Man nimmt an: A ist Nicht- B ; dann bildet man eine synthetische Reihe von Schlüssen: Nicht- B ist C , C ist D u. s. f., bis man zu einem Satz mit dem Prädicate E gelangt, welches, wenn es nun mit A zu dem Satze A ist E vereinigt wird, einer ausgemachten Wahrheit widerspricht. Daher ist unmöglich, dass A Nicht- B ist, A ist also B . q. e. d.

Diese Schlussform, welche man auch im Gegensatze zur obigen synthetischen, als der directen, die indirecte nennt, ist eine natürliche, wenn es sich um die Umkehrung eines bereits erwiesenen Satzes: „Wenn B , so ist A “ handelt und wird in diesen Fällen, wo dann die Anwendung dieses directen Satzes in dem apagogischen Beweise sehr vortheilhaft ist, von den Alten stets angewandt.

Unentbehrlich ist ferner den Alten diese apagogische Beweisform in ihrer Exhaustionsmethode, und auch uns bei einer strengen Begründung der Grenzmethode; darin aber liegt der Beweis, dass es hier an dem organischen Begriffe fehlt, der eine directe synthetische Ableitung gestatten würde. Die Methode des Unendlichkleinen hat diesen vermittelnden Begriff in dem des Unendlichen und führt eben deshalb überall nur directe Beweise.

Um zu dem Beweise eines irgendwie gefundenen oder zur Prüfung vorgelegten Lehrsatzes zu gelangen, bedienen sich die Alten des Verfahrens, das von ihnen theoretische Analysis genannt wurde und in Folgendem besteht.

Um zu erweisen „ A ist B “, nehmen sie diesen Satz zunächst als zugestanden an, verbinden ihn dann mit anderen ausgemachten Sätzen B ist C , C ist D , D ist E . . . u. s. f., ziehen dies zusammen in A ist C , A ist D . . ., bis sie zu einem Satze A ist E kommen, welcher entweder falsch ist oder ausgemachter Weise von der betreffenden Figur A gilt. Im ersten Falle ist der vorgelegte Lehrsatz falsch und der Satz „ A ist Nicht- B “ richtig — wir erkennen also in der

reductio ad absurdum einen Fall der theoretischen Analysis. Ist aber jener Satz „ A ist E “ richtig, so wird er zu dem synthetischen Beweise des Satzes führen, wenn wir von „ A ist E “ ausgehen und nun daran die Schlüsse E ist D , D ist C , C ist B reihen können, woraus dann „ A ist B “ folgt. Dazu ist, wie man sieht, jedoch nothwendig, dass alle in der Analysis angewandten geometrischen Sätze unbedingt umkehrbar sind.

Eine bei weitem grössere Bedeutung hat die problematische Analysis der Alten, welche den methodischen Weg zur Auflösung von Problemen zeigen soll.

Wenn es sich um die Aufgabe handelt, aus und an gegebenen Bestimmungsstücken (data) eine Figur zu construiren, welche einem gewissen Complexe von Bedingungen genügen soll, so ist es zunächst nothwendig, letzteren so zu transformiren, dass er in eine Reihe von einzelnen Bedingungen und solchen Relationen zwischen den gegebenen (data) und den noch zu suchenden (quaesita) Bestandtheilen der Figur zerfällt, die es möglich machen, mittels bekannter Constructionen letztere aus ersteren successiv zu bestimmen.

Um nun jene Transformation der Bedingungen möglich zu machen, kann man nicht anders verfahren, als dass man zunächst eine allen jenen Bedingungen genügende Figur hypothetisch als gefunden und zugestanden annimmt und nun an dieser mit allen Mitteln der Synthese, d. h. mit Hilfslinien, Hilfsconstructionen und Hilfssätzen so lange operirt, bis man auf zunächst Eine Relation gelangt, welche mit bekannten Mitteln ein zwar bereits hypothetisch angenommenes, ja selbst gezeichnetes, doch in der That gesuchtes Stück der Figur aus den von vornherein gegebenen construierbar (*ποριστόν*) macht. Von diesem Augenblicke an gehört auch dieses zu den gegebenen und es muss nun weiter eine Relation gefunden werden, die ein zweites gesuchtes Stück aus den ursprünglich gegebenen und dem neu gefundenen zu bestimmen erlaubt. Wenn diese gefunden ist, so gehört auch dies zweite Stück zu den gegebenen und so hat man fortzugehen, bis alle Stücke der gesuchten Figur gegeben, d. h. durch die ursprünglichen Data der Figur bestimmt sind.

Das ist das Wesen der Analysis (resolutio) der Alten, dieser natürlichen Methode, eine gegebene Aufgabe zu lösen (*ἀναλύνειν*). Um sie aber zu diesem Zwecke möglichst geschickt zu machen, musste man immer darauf bedacht sein, ihren Gang von allem unnöthigen Ballast zu befreien. Ein solcher aber war es, wenn man sich, wo es galt die einzelnen Bestandtheile der hypothetisch angenommenen Figur successiv als gegeben nachzuweisen, auch immer die Constructionen vergegenwärtigen musste, durch welche dies geschehen konnte. Wenn man z. B. in der Figur der folgenden Seite, wo die Punkte E, D und der Kreis in ihrer Lage und Grösse die ursprünglichen festen Data sind, erkannt hatte, dass $EB \cdot EA = ED \cdot EF$, so konnte man weiter schliessen, dass weil $EB \cdot EA$ dem Quadrate einer von E an den Kreis gezogenen Tangente gleich ist, letztere aber, wenn E und der Kreis gegeben, immer construirt werden (*πορίσασθαι*) kann, also gegeben ist, das Product $EB \cdot EA$ trotz der noch unbekannten Lage der Geraden EBA doch als gegeben angesehen werden muss; dann aber ist auch das Product $ED \cdot EF$ der Grösse nach bekannt, und wenn man ein Rechteck von dieser Grösse an der gegebenen ED construirt, so wird die andere Seite EF sein; es ist also somit auch EF der Grösse nach und, da es in der Verlängerung der gegebenen Geraden ED liegt, auch der Lage nach gegeben.

Es konnte nun, ohne Schaden für die Anschaulichkeit und mit Nutzen für die Leichtigkeit der Methode, dieser Weitläufigkeit abgeholfen werden, wenn man eine Sammlung von Sätzen anlegte, welche ein für allemal alle diese einzelnen Schlüsse in sich vereinigten. Euklid, der grösste Systematiker des Alterthums, hat in der That eine solche Sammlung der am häufigsten vorkommenden Theoreme unter dem Titel Data herausgegeben. Dieselbe enthält z. B. folgende Sätze:

prop. 93. Wenn ausserhalb eines, der Lage nach, gegebenen Kreises ABC ein Punkt E gegeben und von demselben eine gerade Linie EBA durch den Kreis gezogen wird, so ist das Rechteck aus den abgeschnittenen Stücken $BE \cdot AE$ gegeben.

prop. 57. Wenn ein gegebener Raum an einer gegebenen

geraden Linie ED unter einem gegebenen Winkel (als Parallelogramm) entworfen ist, so ist die andere Seite gegeben,
aus denen sofort unsere obige Folgerung gezogen werden kann.

Man wird nun hienach verstehen, wie, um ein Beispiel zu geben, ein Alter*) die Aufgabe:

„Wenn ein Kreis ABC der Lage nach und zwei Punkte DE ausserhalb gegeben sind, so sollen von D, E aus nach einem Punkte B des Kreises die Linien DB, EB gezogen und bis A, C verlängert werden, so dass AC der DE parallel ist“

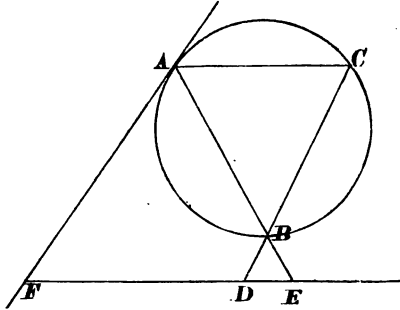
durch folgende Analysis lösen konnte:

„Es sei geschehen und die Tangente FA gezogen. Da nun

$$AC \parallel DE,$$

so ist $\widehat{C} = \widehat{CDE}$, aber auch $\widehat{C} = \widehat{FAE}$, weil FA den Kreis berührt und AE schneidet, mithin $\widehat{FAE} = \widehat{CDE}$, und somit liegen $ABDF$

auf einem Kreise; und es ist Rechteck $AE \cdot EB =$ Rechteck $FE \cdot ED$.



„Es ist aber das Rechteck $AE \cdot EB$ gegeben, weil es dem Quadrate der Tangente gleich ist; daher ist auch das Rechteck $FE \cdot ED$ gegeben, und da ED gegeben ist, auch FE und ebenso nach seiner Lage; es ist aber auch E gegeben, somit auch F selbst. Von dem gegebenen Punkte F ist aber die Gerade FA als Tangente an den nach seiner Lage gegebenen Kreis ABC gezogen worden; also ist FA nach Lage und Grösse gegeben, und da F gegeben ist, auch A . Aber es ist auch E gegeben, und daher AE nach seiner Lage, ebenso wie der Kreis, so dass auch der

*) Pappus, Collect. math. VII. prop. 105 ed. Commandin.

Punct B gegeben wird. Ferner sind gegeben E und D , also werden auch EB und DB der Lage nach gegeben sein.“

Jede einzelne Behauptung des ersten Absatzes, den ich die „Transformation“ nenne, weil er synthetisch die Eigenschaften der hypothetisch gezeichneten Figur so transformirt, bis deren eines Stück EF als gegeben erkannt wird, hätte durch ein Citat aus den „Elementen“ unterstützt werden können, jede Behauptung des letzten Abschnittes, der eigentlichen „Resolution“ des Problemes, durch ein Citat aus den „Daten“ Euklid's.

Mit dieser Analysis ist nun aber die Lösung des Problemes noch nicht vollendet; vielmehr folgt nun überall noch eine Synthesis (compositio), welche zunächst die „Construction“ in strenger Ordnung, wie sie zu geschehen hat, dann deren synthetische „Demonstration“ gibt. Die Construction folgt im Allgemeinen, wenn sich nicht zufällig Vereinfachungen ergeben, durchaus dem Gange des zweiten Theiles der Analysis, der „Resolution“; der Beweis aber schlägt den umgekehrten Weg des ersten Theiles der Analysis, der „Transformation“, ein. Da in der griechischen Literatur zwar oft die Synthesis der Aufgaben allein, niemals aber nur die Analysis gegeben wird, so möge hier auch noch die Synthesis folgen:

„Es seien ein Kreis ABC und zwei Puncte D , E gegeben, und es werde dem Quadrate der Tangente das unter ED und einer gewissen Linie EF enthaltene Rechteck gleich gesetzt; dann möge von F die Tangente FA an den Kreis ABC gezogen und A mit E verbunden werden. Es werde die Linie DB gezogen und bis C verlängert, auch A mit C verbunden. Ich behaupte, dass $AC \parallel DE$ sei.

„Da nämlich das Rechteck $FE \cdot ED$ gleich ist dem Quadrate der Tangente und diesem auch das Rechteck $EA \cdot EB$ gleich ist, wird $FE \cdot ED = AE \cdot EB$; es liegen mithin F , A , B , D in einem Kreise. Daher $\widehat{FAE} = \widehat{BDE}$, aber es ist auch $\widehat{FAE} = \widehat{ACB}$, nämlich dem Winkel, welcher in dem anderen Theile des Kreises steht; daher $\widehat{ACB} = \widehat{BDE}$ und also gleiche Wechselwinkel. Daher muss nothwendig AC der DE parallel sein.“ q. e. d.

Ein moderner Leser, der mit dem eigenthümlichen Geiste der griechischen Geometrie noch nicht vertraut ist, wird staunen über diese unnütze Mühe, den ganzen Weg, den man in der Analysis schon mit grosser Langsamkeit gegangen ist, in der Synthesis noch einmal rückwärts zu durchlaufen; für ihn wird diese allein schon völlig ausgereicht haben. Indessen ist diese Mühe doch nicht nur von dem Standpunkte der Griechen aus, welche durch grösste Vorsicht und völlige logische Strenge eine unangreifbare Gewissheit zu gewinnen suchten, sondern auch von einem höheren Standpunkte aus nicht ganz unnütz und überflüssig; es ist in der That nicht zulässig, den Wegfall der ganzen Synthesis durch den Satz: „Jede Analysis ist umkehrbar“ zu rechtfertigen. Denn dieser Satz ist nicht allgemein gültig.

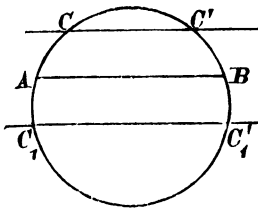
Zwar der zweite Theil der Analysis, die „Resolution“, worin nachgewiesen wird, dass alle Stücke der Figur gegeben sind, kann immer ohne Weiteres in die Construction selbst umgesetzt werden, da eben gegeben nur das heisst, was nach den Elementen construirt werden kann. Nicht so aber der erste Theil, die „Transformation“, wie ich sie genannt habe; denn diese erscheint in der schliesslichen Demonstration in umgekehrter Folge. Wir wissen nun, dass nicht alle Schlussketten, sondern nur solche logisch umkehrbar sind, in denen ausschliesslich rein umkehrbare Sätze erscheinen. Es ist nun aber keineswegs gewiss, dass jener erste Theil der Analysis nur solche Sätze enthält, und zwar kann durch zweierlei Umstände die Umkehrung verboten werden.

Es kann sich nämlich ereignen, dass gewisse Bedingungen der Aufgabe zwar in der hypothetisch gezeichneten Figur als erfüllt angenommen und doch gar nicht zur Bestimmung von gesuchten Grössen verwandt worden sind. Bei complicirten Aufgaben kann sich dies leicht während der Analyse ganz dem Sinn entziehen, und erst die Synthesis würde dann, indem sie nicht beweisen kann, dass diese Bedingungen erfüllt sind, bemerken, dass die Aufgabe sich selbst widersprechend, absolut unmöglich ist. Wenn man z. B. zu den Bedingungen der obigen Aufgabe noch die hinzugefügt hätte, dass AC ausserdem durch einen gegebenen Punct G hindurchgehen solle, so würde man ganz dieselbe Analysis und Con-

struction entwickelt haben; der Beweis aber, dass die so construirte AC durch G hindurchginge, wäre unmöglich gewesen, weil die Aufgabe jetzt eine im Allgemeinen ihr widersprechende Bedingung erhält.

Die Umkehrung der Transformation wird aber auch dann unzulässig, wenn in ihr Sätze angewandt werden, die nur bedingt umkehrbar sind. Es ist also nothwendig, bei der Analysis bereits darauf zu achten, dass zu den Sätzen alle Bedingungen hinzugefügt werden, die zu ihrer Umkehrung nöthig sind, namentlich auch solche, welche einen Satz auf gewisse Lagenverhältnisse einschränken. So könnte man z. B. bei der Construction obiger Aufgabe die Strecke EF statt in derselben Richtung wie ED auch in entgegengesetzter abtragen wollen. Durch den Punct aber, in dem die von diesem F aus an den Kreis gelegte Tangente letzteren berührt, geht keine der Aufgabe genügende Sehne. Dass aber die Analysis nicht sofort die Bestimmung liefert, es müssen ED, EF nach derselben Seite liegen, liegt einfach daran, dass der Satz: „Wenn die Puncte $ABDF$ in einem Kreise liegen, so ist $EA \cdot EB = ED \cdot EF$ “ nur bedingt umkehrbar ist (s. p. 139).

Oder ein anderes Beispiel: Wäre die Aufgabe gestellt, ein Dreieck zu construiren, in welchem die Basis AB , der Winkel an der Spitze und der Flächenraum gegeben ist, so zeigt die Analysis sofort, dass seine Spitze in dem Durchschnitt des Kreises ABC , auf welchem alle Dreiecke mit dem gegebenen Winkel liegen, und einer in gegebener Entfernung mit der Basis gezogenen Parallelen CC' oder C_1C_1' liegen. Es leuchtet aber ein, dass die

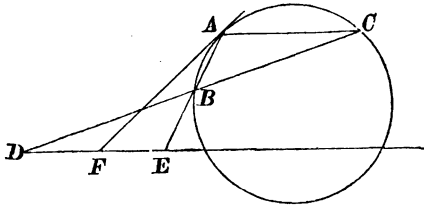


Dreiecke $ACB, AC'B$ nicht gleichzeitig mit $AC_1B, AC_1'B$ die Aufgabe lösen können. Die Vernachlässigung der nöthigen Beschränkungen dieser Art führt, wie man sieht, zu Constructionen, welche entweder mit dem gestellten Probleme gar nichts zu thun

haben, oder im günstigen Falle einem allgemeineren angehören, zunächst aber überflüssig und somit schädlich sind.

Endlich ist noch ein Umstand zu erwägen: Es kann

sich nämlich ereignen, dass die hypothetisch gezeichnete Figur andere Lagenverhältnisse zeigt, als sie der Wahrheit entsprechen. Es können z. B. die Punkte $ABDF$, anstatt wie in der obigen Figur ein gewöhnliches Viereck zu bilden, auch ein überschlagenes geben, wie in beistehender Figur; dann wird sich die Beweisführung in dem transformirenden Theile der Analysis etwas ändern müssen; ja es können in der Figur Verhältnisse angenommen sein, die nicht erfüllt sind; so kann z. B. der Punkt F , den wir in der Analysis ausserhalb des Kreises angenommen hatten, in gewissen Fällen in den Kreis fallen und dann die Construction einer Tangente nicht ausführbar sein, so dass also eine Modification der ganzen Analysis nöthig wäre. Ja es könnte sein, dass die Aufgabe, deren Lösung wir hypothetisch angenommen und in der Figur ausgedrückt haben, relativ, d. h. bei den gegebenen Grössen- und Lagenverhältnissen unmöglich*) wäre, während sie bei anderen recht wohl geometrisch möglich ist.



Auf solche Fälle nun wird man allerdings am sichersten aufmerksam, wenn man die Construction selbst auszuführen unternimmt und man kann dann, wenn Modificationen der Construction nöthig sind, in dem synthetischen Beweise diesen Rechnung tragen. Indess kann der Nachweis, wann ein Problem möglich ist oder nicht, auch schon bei der Analysis selbst vollständig erledigt werden.

Jene Nachweisung pflegen die Alten unter dem Namen des Diorismus (determinatio) am Schlusse hinter dem synthetischen Beweise hinzuzufügen. Das früheste Beispiel eines solchen finden wir bei Platon selbst**), und Eudemos erzählt uns, dass dessen Zeitgenosse Leon den Diorismus erfunden, d. h. wohl zuerst genau beachtet habe.

*) In solchen Fällen, welche die Alten allerdings schlechthin unmöglich nennen, hat die Aufgabe dann anschaulich nicht darstellbare, sondern imaginäre Lösungen.

**) Menon, 22. d.

Aus allem diesem sehen wir, dass die Analysis allein, wenn sie nicht nur vorläufig und oberflächlich, um sich einigermaßen über das Problem zu orientiren, sondern mit Umsicht und Sorgfalt angestellt wird, zur Lösung eines Problems, dem Beweise der Construction und Erörterung ihrer Bedingungen vollständig ausreicht und der Synthesis nicht bedarf. Wenn wir trotzdem in den Schriften der Alten die Synthesis überwiegen und überall, wo eine Analysis gegeben wird, nicht nur diese mit peinlicher Sorgfalt ausgeführt, sondern ihr auch eine vollständig durchgearbeitete Synthesis in feierlichster Weise folgen sehen, die alles in umgekehrter Ordnung noch einmal sagt, so können wir uns dies nur aus der eigenthümlichen Richtung der griechischen Mathematiker erklären, welche ihre Leser weniger in den wissenschaftlichen Gedankengang einzuführen suchten, der sie von selbst zu dem wahren Resultate führen musste, als vielmehr zu der Anerkennung des Resultates mit logischer Gewalt zu zwingen. Es muss diese Maxime der griechischen Philosophen und Mathematiker, ihre Resultate durch einen trockenen dogmatischen Syllogismus zu beweisen und auf dessen formelle und recht handgreifliche Bündigkeit einen hohen Werth zu legen, als eine allgemeine griechische National-eigenthümlichkeit angesehen werden, welche in der bei Gelehrten und Dilettanten früh sich kundgebenden Neigung zu dialektischen Klopffechtereien ihr interessantes Seitenstück hat. Denn dass nur, um ihre Wissenschaft solchen sophistischen Zänkereien zu entziehen, die Mathematiker die höheren Theile der Geometrie mit so schwerfälligen Panzern umgeben und sich selbst mit diesem unnützen Ballast beschwert hätten, ist nicht zu glauben. Die Sache liegt vielmehr so, dass diese, uns so lästige Form ihren Geisteskräften die angemessene war; denn sie besaßen mehr scharfsinnigen Verstand, um sich auf schmale Wege durch alle Hindernisse allmählich hindurchzuwinden, als jenes Vermögen des Geistes, von Einem Punkte aus ein ganzes Gebiet intuitiv zu überschauen. Nur ein Geist, wie Platon, bei dem umgekehrt die Intuition überwog, konnte die analytische Methode ihrer grossen Bedeutung nach erkennen.

So verdient denn auch die Ueberlieferung der Alten,

dass Platon persönlich der Erfinder der Analysis sei, alles Vertrauen. Zwar kann von einer „Erfindung“ kaum die Rede sein bei einer Methode, welche nicht einen künstlichen, sondern den natürlichen und einzigen Weg zeigt, um zu der Lösung vorgelegter Aufgaben zu gelangen. Auch finden wir in dem ältesten Fragmente griechischer Geometrie bei Hippokrates wiederholt in den schwierigeren Constructionen Anfänge analytischer Behandlung*), und so wie er müssen auch andere Zeitgenossen unbewusst bei der Forschung selbst vorwärts gegangen sein; denn es gibt eben keinen anderen Weg. Das Verdienst Platon's bestand aber darin, diesen Weg den Geometern zum Bewusstsein gebracht, ihn als einen eigentlich wissenschaftlichen nachgewiesen und zu einer klaren Methode entwickelt zu haben, welche dermassen die wesentliche und genetische ist, dass sie in weiterem Verlaufe der grössten und weitreichendsten Disciplin der Mathematik selbst den Namen gegeben hat. Die griechischen Geometer würden, wie oft sie auch bei der Lösung von Problemen einen analytischen Gedankengang eingeschlagen hätten, bis zuletzt bei der Synthesis allein stehen geblieben sein, hätte nicht Platon durch seine Schule einen so mächtigen Einfluss auf sie gewonnen. Platon aber hat durch die Aufstellung der Analysis als wissenschaftlicher Methode gerade das geleistet, was dem Philosophen zufiel. Erinnern wir uns ferner der Verdienste, die Platon um die Grundlegung der ersten geometrischen Begriffe hat, so werden wir ihm, selbst abgesehen von seinen eigentlich mathematischen Leistungen, eine bedeutende Stelle in der Geschichte unserer Wissenschaft einräumen müssen.

Die Verbindung philosophischer und mathematischer Productivität, wie wir sie ausser in Platon wohl nur noch in Pythagoras, Descartes, Leibnitz vorfinden, hat der Mathematik immer die schönsten Früchte gebracht: Ersterem verdanken wir die wissenschaftliche Mathematik überhaupt, Platon erfand die analytische Methode, durch welche sich die Mathematik über den Standpunct der Elemente erhob, Descartes schuf die analytische Geometrie, unser berühmter

*) Namentlich in §. 89 bei Bretschneider.

Landsmann den Infinitesimalcalcül — und eben das sind die vier grössten Stufen in der Entwicklung der Mathematik.

Die Kegelschnitte und die Verdoppelung des Würfels.

Nicht geringer als die formalen waren die materiellen Fortschritte, welche die griechische Mathematik innerhalb des sich um Platon sammelnden Kreises von Geometern machte. Nicht nur dass, wie wir gesehen haben, die bereits in der Pythagorischen Schule in Angriff genommenen Theile der Mathematik weiter ausgebildet wurden; es traten überdem ganz neue Zweige hinzu, welche in der Folge als höhere jenen gegenübergesetzt wurden, die man seitdem die „Elemente“ der Mathematik genannt hat.

Unter diesen neuen Zweigen ist als bei weitem der wichtigste die Lehre von den Kegelschnitten zu nennen. Menaechmus, der Schüler des Platon und des Eudoxus, erfand die drei Kegelschnitte*), indem er die durch Umdrehung eines spitz- oder recht- oder stumpfwinkligen gleichschenkligen Dreiecks um die Halbierungslinie jenes Winkels entstehenden geraden Kegel durch eine Ebene schnitt, welche senkrecht auf einer Seite des Kegels steht**). Er nannte die drei so erhaltenen Curvenarten den Schnitt des spitzwinkligen, rechtwinkligen, stumpfwinkligen Kegels; erst Apollonius führte die Namen Ellipse, Parabel, Hyperbel ein, nachdem er erkannt hatte, dass je nach der Lage der schneidenden Ebene aus jedem Kegel alle drei Arten erhalten werden können. Wie weit schon in der Platonischen Schule die Theorie der Kegelschnitte ausgebildet wurde, lässt sich aus Mangel an Quellen nicht bestimmen; dass man die Grössenbeziehung zwischen den Coordinaten der Punkte eines Kegelschnittes, die wir heute als Scheitelgleichung bezeichnen, aus seiner Definition abgeleitet haben wird, kann keinem Zweifel unterliegen; aber was bemerkenswerth ist, auch die Asymptotengleichung einer gleichseitigen Hyperbel kannte Menaechmus schon. Am Ende des vierten Jahrhunderts

*) Nach Eratosthenes bei Eutoc. Comm. in Archim. de sph. et cyl. L. II. ed. Torelli p. 146 und bei Prokl. Comm. ad def. 4.

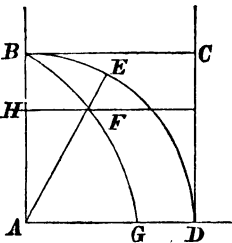
**) Geminus bei Eut. Comm. in Apoll. conica, ed. Halley, p. 9 und Pappus, Coll. math. I. VII. ad Apoll. Con.

war der Stoff bereits so weit angewachsen, dass Aristaeus der Aeltere „Elemente der Kegelschnitte“ in fünf Büchern schreiben konnte.*)

Durch die Kegelschnitte wurde das Gebiet der Geometrie, welches bisher nur auf die gerade Linie und den Kreis beschränkt war, ausserordentlich erweitert, indem nun überhaupt jene Schranke durchbrochen war.

So ist bereits damals von Dinostratus**), dem Bruder des Menaechmus, eine Curve erfunden worden, welche sowohl das Problem der Quadratur des Kreises löst und daher den Namen der Quadratrix erhielt, wie auch das, wie es scheint, bereits damals aufgetauchte Problem, einen gegebenen Winkel in drei oder überhaupt in beliebig viele Theile zu theilen.

Die Entstehung dieser Curve ist folgende: „In ein Quadrat $ABCD$ sei aus der einen Ecke A als Centrum mit der Quadratseite AB als Halbmesser ein Kreisquadrant BED beschrieben. Man lasse den Halbmesser AB sich um A mit gleichmässiger Geschwindigkeit so drehen, dass der Punkt B in einer gewissen Zeit den Bogen BD durchläuft. Genau in derselben Zeit rücke die Gerade BC stets sich selbst parallel mit gleichmässiger Geschwindigkeit aus der Lage BC in die Lage AD . Dann wird der Ort des Durchschnittes dieser Geraden mit dem sich um A drehenden Halbmesser eine Curve BFG liefern, welche die Quadratrix ist.“ Liegt demnach die Curve gezeichnet vor, so ist für einen beliebigen Punkt F , $BH:BA = BE:BD$. Theilt man daher die Strecke BA in eine Anzahl gleicher Theile, errichtet in den Theilpunkten H Senkrechte, welche die Quadratrix in F schneiden, so werden die entsprechenden Radien AF die verlangten Winkeltheilungslinien sein. Die Quadratur des Kreises aber wird durch diese Curve unmittelbar gegeben, indem die dem



*) Papp., Coll. math. p. 249 ed. Comm. p. 30 ed. Gerhardt.

**) Papp. Coll. math. IV. p. 57. Vielleicht auch von einem gewissen Hippias (Prokl. Comm. ad prop. 9 und vor prop. 27), der aber sicherlich nicht der Sophist Hippias aus Elis in der Mitte des 5. Jahrhunderts ist.

Quadranten BED gleiche Gerade die dritte Proportionale zu AC und AD ist. *)

Durch die Einführung dieser und vielleicht noch anderer krummer Linien wurde man auch zu einer Eintheilung der Curven oder „der laufenden Oerter“ (τόποι διεξοδικοί), wie man sie auch nannte, in Klassen geführt. Man unterschied die Gerade und den Kreis als „ebene Oerter (τόποι ἐπίπεδοι) von den Kegelschnitten als „körperliche Oerter“ (τόποι στερεοί) und setzte diesen die allgemeine Klasse der „linearen Oerter“ (τόποι γραμμικοί) gegenüber**), die man wohl auch nach ihrer Erzeugung „mechanische“ nannte.

Der Begriff des laufenden oder geometrischen Ortes eines Punctes weist selbst schon auf eine neue Klasse von Problemen hin, welche damals entstand. Zwar lässt jede Eigenschaft einer Curve zugleich dieselbe als geometrischen Ort eines sich unter gewissen Bedingungen bewegendenden Punctes erkennen und umgekehrt; und es scheint somit die Lehre von den geometrischen Oertern von einer Theorie der Curven selbst nicht verschieden zu sein. Indess ist doch durch den Begriff des geometrischen Ortes ein neuer Gesichtspunct gegeben und die Frage, welches ist der geometrische Ort unter den und den Bedingungen? wird nicht nur auf neue, bisher noch unbekannte Linien, sondern auch nicht selten auf Eigenschaften von Curven führen können, die rein als solche betrachtet ein geringeres Interesse erregt hätten oder ganz unbeachtet geblieben wären.

Nicht wenig trug zur Belebung der geometrischen Forschungen in dieser Zeit eine Aufgabe bei, die, obgleich schon früher von den Mathematikern gestellt, ja von Hippokrates schon bearbeitet, erst durch folgenden eigenthümlichen Vorfall in den Vordergrund gerückt wurde: Als einst die Insel Delos von einer Pest befallen war, hiess das Orakel zu Delphi den Einwohnern, dass sie, um von dieser befreit zu werden, den Altar des Gottes „verdoppeln“ sollten. Sie setzten darauf zwei kubische Altäre aufeinander und als das Uebel noch nicht wich, erhielten sie auf eine erneute Frage

*) Papp. IV, prop. 26.

**) Ebd. VII, praef. ad Apoll. loc. plan.

die Antwort, dass sie den Befehl, den Altar zu verdoppeln, ohne seine Form zu ändern, nicht erfüllt hätten. Die Delier wendeten sich, da sie dies nicht zu machen wussten, an Platon, der ihnen lächelnd vorhielt, „der Gott scheint Euch zu tadeln, dass Ihr so wenig Geometrie treibt“, doch aber selbst nicht im Stande war, eine brauchbare Antwort zu geben. *)

Das aus dieser Veranlassung als das Delische bezeichnete Problem, auf das auch ohne solche die Geometer bei weiterem Fortschritt in der Stereometrie verfallen mussten, besteht demnach im einfachsten Falle in der Verdoppelung (duplicatio) des Würfels, d. h. der Bestimmung der Seite eines Würfels, dessen Kubikinhalt $= 2$. Dem Leser wird vielleicht nichts leichter scheinen, als diese Aufgabe; denn man braucht nur die Kubikwurzel aus 2 zu ziehen, um jene Seite sofort zu erhalten. Aber eben, wie man dies zu thun habe, war die Frage, welche die Alten in Verlegenheit setzte. Von einer approximativen numerischen Bestimmung war in jener Zeit nicht entfernt die Rede; sowohl, weil die dazu nothwendige Rechnung die Kräfte der damaligen Rechenkunst der Griechen weit überstieg, als auch, weil eine solche Lösung ihres approximativen Charakters wegen doch nicht für genügend angesehen worden wäre, endlich weil die irrationalen Grössen ein für allemal von den Zahlen durch eine weite Kluft getrennt erschienen und eine solche Vermengung der Geometrie mit der Arithmetik für ganz unstatthaft galt. **) Es gehört diese schon mehrfach hervorgehobene scharfe Trennung zweier Gebiete, deren Vereinigung das Wesen der neuen Mathematik ist, zu den charakteristischen Eigenthümlichkeiten der klassisch-griechischen Geometrie, die trotz ihrer Einseitigkeit und eben um ihretwegen wieder für die ge-

*) Nach Eratosthenes in Eut. Com. in Arch. II de sphaera et cylind. ed. Torelli, p. 144 und Bernhardi, Fragm. Eratosth. p. 168.

**) „Man kann nicht etwas beweisen, indem man von einem anderen Genus ausgeht, z. B. nichts Geometrisches durch Arithmetik. . . . Wo die Gegenstände so verschieden sind, wie Arithmetik und Geometrie, da kann man nicht die arithmetische Beweisart auf das, was den Grössen überhaupt zukommt, anwenden, wenn nicht die Grössen Zahlen sind, was nur in gewissen Fällen vorkommen kann.“ (Arist. An. post. I, 7. 75, a, 38 ff.)

sammte Entwicklung der Mathematik von grösstem Nutzen gewesen ist.

Um eine geometrische Lösung des Delischen Problems also handelte es sich. Nachdem man diese im Raume selbst zuerst vergeblich gesucht hatte, machte Hippokrates die wichtige Entdeckung, dass die Verdoppelung des Würfels oder allgemein die Aufgabe, einen Würfel von der Seite a im Verhältniss $a : b$ zu vergrössern, also die Länge x aus der Proportion:

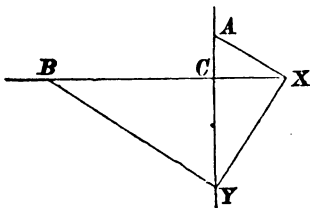
$$a^3 : x^3 = a : b$$

zu bestimmen, gelöst sei, wenn man x und eine neue Unbekannte y so bestimmen könne, dass:

$$a : x = x : y = y : b,$$

also x die mittlere Proportionale zwischen a und y , y aber die zwischen b und x sei. *) Da nun die Bestimmung Einer mittleren Proportionalen eine lösbare Aufgabe ist, so glaubte man hiemit das stereometrische Problem auf ein planimetrisches reducirt zu haben und die Auffindung zweier mittleren Proportionalen ($\tau\acute{o}\nu\ \delta\acute{\upsilon}\nu\ \mu\acute{\epsilon}\sigma\omega\nu$) ist von jetzt ab der Zielpunct weiterer Arbeiten.

Zunächst stellte Platon **) folgende Betrachtung an: Trägt man die 4 Strecken a, x, y, b , welche in obiger



Proportion stehen, auf einem rechtwinkligen Axenkreuz um C so ab, dass $a = CA$, $x = CX$, $y = CY$, $b = CB$, so sind die Dreiecke ACX , XCY , YCB ähnlich, daher ergänzen sich die Winkel bei X zu einem rechten, ebenso die bei Y . Umgekehrt: Kann man eine

Gerade XY so zwischen zwei Schenkel eines Axenkreuzes legen, dass die in den Puncten X, Y errichteten Perpendikel durch A und B gehen, so ist die Aufgabe gelöst. Ein sehr einfaches Instrument, bestehend aus einem Lineale, auf welchem sich zwei darauf senkrechte Lineale verschieben lassen, genügt daher, um mittels einigen Probirens die Auf-

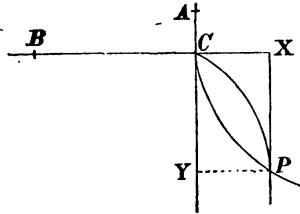
*) Eratosthenes in Eut. Comm. ebd.

**) Eutoc. Comm. p. 135.

gabe zu lösen. Platon selbst*) soll ein solches angegeben haben, welches für die Praxis der Architekten, wenn anders diese zur Vergrößerung ihrer Maasse in bestimmtem Verhältniss die Lösung gebrauchten, ganz ausreichend sein mochte. Eine sehr elegante Lösung fand Menaechmus mit Hilfe der Kegelschnitte; er bemerkte, dass die obigen Bedingungen in die Form:

$$x^2 = ay, \quad y^2 = bx$$

gefasst werden können. Beschreibt man daher durch C zwei Parabeln, die eine mit dem Parameter a und der Axe AC , die andere mit dem Parameter b und der Axe BC , so werden sich dieselben in einem Punkte P schneiden, dessen Coordinaten CX , CY die verlangten Grössen sind.



Da auch $xy = ab$, so kann man denselben Punkt auch erhalten als Durchschnitt einer jener Parabeln mit der Hyperbel, deren Asymptoten CX , CY und deren Potenz ab ist.

Eine andere merkwürdige Construction des Problemes im Raume „mittels der Halbcylinder“ gab Archytas von Tarent**), eine dritte, die uns aber nicht näher bekannt ist, Eudoxus.***)

Sollten diese Methoden praktisch angewendet werden, so mussten zuvor Instrumente erfunden werden, welche jene Curven mechanisch beschreiben liessen. Es ist wohl möglich, dass, wie uns berichtet wird†), Platon sich, obgleich er selbst ein Instrument zur Lösung des Problems für die Praxis erfunden haben soll, tadelnd gegen solche instrumentale (ὀργανικά) und mechanische Constructionen ausgesprochen hat, „weil so der Vorzug der Geometrie verdorben und aufgehoben werde, sofern man sie wieder auf den sinnlichen Standpunct zurückführe, statt sie in die Höhe zu heben und

*) Ebd. p. 141.

**) Ebd. nach Eudemus p. 143.

***) Ebd. nach Eratosthenes p. 144.

†) Plutarch, Quaest. conviv. VIII. q. 2. c. 1. und Vit. Marcelli c. 14. § 5.

mit ewigen und körperlosen Bildern zu beschäftigen“. Denn, der Praxis durchaus abgeneigt, wirft Platon sogar den Mathematikern vor: „Sie reden lächerlich und nothdürftig; denn es kommt heraus, als ob sie etwas ausrichteten und als ob sie eines Geschäftes wegen ihren ganzen Vortrag machten, wenn sie ‚viereckig machen‘, ‚entwerfen‘, ‚aneinandersetzen‘ und was sie sonst für Ausdrücke haben; die ganze Sache aber wird nur der Erkenntniss wegen betrieben.“*)

Hievon abgesehen, so hat den grossen Philosophen bei der Verwerfung organischer Constructionen ein richtiges Bewusstsein geleitet. Die Aufgaben, welche mit alleiniger Anwendung des Lineals und des Cirkels gelöst werden können, bilden eine ganz bestimmt abgegrenzte Gruppe, und es ist von der grössten Wichtigkeit, bei jeder Aufgabe die Frage eingehend zu erörtern, ob sie mit Hilfe jener Instrumente lösbar ist, oder nicht; wie in der Algebra, ob eine Gleichung durch Quadratwurzeln aufgelöst werden kann, oder nicht. Wäre aber die Einführung beliebig vieler Instrumente zugelassen worden, so würden eine Menge wichtiger Untersuchungen in dieser Beziehung nicht vorgenommen worden sein. Wir verdanken daher Platon die für die Geometrie so wichtige Beschränkung der geometrischen Instrumente auf jene zwei elementaren. Die anderen, von ihren Erfindern oft mit Pomp angekündigten Instrumente sind heute vergessen, da ihnen jede höhere wissenschaftliche Bedeutung abging.**)

*) Plato, Polit. 527.

**) Von der zweiten Periode der griechischen Geometrie haben sich unter den hinterlassenen Manuscripten des Verfassers nur Bruchstücke vorgefunden, von denen ein grösseres, Euklid betreffend, am Schlusse des Werkes als Anhang abgedruckt werden wird. Dagegen liess sich ein vom Verfasser vollständig bearbeiteter Theil der arithmetischen Periode, welcher über Diophant handelt, in den Text selbst aufnehmen.
d. H.