

2885 pat
HANKEL, H.
1874

HANKEL, H.

Zur Geschichte der Mathematik in
Alterthum und Mittelalter 1874

p 157 - 171

Allgemeine Arithmetik, Algebra und unbestimmte
Analytik der Griechen.

Diophant.

Ueber die Leistungen der Griechen in Arithmetik lässt sich unser Urtheil kurz so zusammenfassen: sie sind nach Form und Inhalt unbedeutend, kindlich, könnte man sagen; und doch sind es nicht die ersten Schritte, welche die Wissenschaft noch unbewusst ihres Zieles, unsicher in der Methode auf schwankem Boden thut, es sind die Leistungen eines Volkes, welches einst einen Euklid, einen Archimed, einen Apollonius hervorgebracht hatte. Es ist Greisenhaftigkeit ohne Zukunft, die uns in diesen Schriften langweilig entgegentritt. Da mitten in dieser traurigen Oede erhebt sich plötzlich ein Mann mit jugendlicher Schwungkraft: Diophant. Woher, wohin, wer sind seine Vorgänger, wer seine Nachfolger? — wir wissen es nicht — alles ein Räthsel. Bei seinem Namen fängt der Zweifel an; wissen wir doch nicht, ob er Diophantus oder Diophantes hiess; er lebte in Alexandrien; sein Geburtsland ist unbekannt; wäre eine Conjectur erlaubt, ich würde sagen, er war kein Grieche; vielleicht stammte er von den Barbaren, welche später Europa bevölkerten; wären seine Schriften nicht in griechischer Sprache geschrieben, Niemand würde auf den Gedanken kommen, dass sie aus griechischer Cultur entsprossen wären; so weit ist sein Sinn und Geist von dem entfernt, der sich in der klassischen Zeit griechischer Mathematik geoffenbart hatte. Er steht durchaus isolirt; ein einziges Mal wird er von einem griechischen Mathematiker citirt; so schwankt denn auch die Bestimmung seiner Lebenszeit um mehrere Jahrhunderte; doch mag man seine Blüthezeit um 360 n. Chr.

Allgemeine Arithmetik, Algebra und unbestimmte Analytik der Griechen.

Diophant.

Ueber die Leistungen der Griechen in Arithmetik lässt sich unser Urtheil kurz so zusammenfassen: sie sind nach Form und Inhalt unbedeutend, kindlich, könnte man sagen; und doch sind es nicht die ersten Schritte, welche die Wissenschaft noch unbewusst ihres Zieles, unsicher in der Methode auf schwankem Boden thut, es sind die Leistungen eines Volkes, welches einst einen Euklid, einen Archimed, einen Apollonius hervorgebracht hatte. Es ist Greisenhaftigkeit ohne Zukunft, die uns in diesen Schriften langweilig entgegentritt. Da mitten in dieser traurigen Oede erhebt sich plötzlich ein Mann mit jugendlicher Schwungkraft: Diophant. Woher, wohin, wer sind seine Vorgänger, wer seine Nachfolger? — wir wissen es nicht — alles ein Räthsel. Bei seinem Namen fängt der Zweifel an; wissen wir doch nicht, ob er Diophantus oder Diophantes hiess; er lebte in Alexandrien; sein Geburtsland ist unbekannt; wäre eine Conjectur erlaubt, ich würde sagen, er war kein Grieche; vielleicht stammte er von den Barbaren, welche später Europa bevölkerten; wären seine Schriften nicht in griechischer Sprache geschrieben, Niemand würde auf den Gedanken kommen, dass sie aus griechischer Cultur entsprossen wären; so weit ist sein Sinn und Geist von dem entfernt, der sich in der klassischen Zeit griechischer Mathematik geoffenbart hatte. Er steht durchaus isolirt; ein einziges Mal wird er von einem griechischen Mathematiker citirt; so schwankt denn auch die Bestimmung seiner Lebenszeit um mehrere Jahrhunderte; doch mag man seine Blüthezeit um 360 n. Chr.

ansetzen. Von seinen Werken sind die „Porismen“ verloren gegangen, eine kleine Schrift „über Polygonalzahlen“ ist uns als Bruchstück überliefert; sein grosses Werk „Arithmetisches“ ist uns indess zum Glück ziemlich vollständig erhalten; denn obgleich das Werk, das nach seinem Verfasser 13 Bücher enthalten soll, uns jetzt nur in 6 Büchern vorliegt, so ist doch der Verlust nicht nach dem Verhältnisse 6:13 zu messen; jedenfalls kann man mit grosser Wahrscheinlichkeit vermuthen, dass auch die verlorenen Stücke nichts enthalten haben, was erheblich die Stufe dessen übersteigt, was wir kennen.

Sollen wir nun kurz die epochemachende Stellung charakterisiren, die Diophant in der Geschichte der Wissenschaft einnimmt, so müssen wir, so lange uns jede Spur fehlt, dass er Vorgänger gehabt, die zwischen ihm und einem Nikomachus oder Theon stehen, aussprechen: Diophant ist der Vater der Arithmetik und Algebra in dem Sinne, wie wir diese Wissenschaften betreiben; er ist der erste gewesen, der ohne geometrische Repräsentation, ja ohne jede Beziehung zu einer solchen, mit allgemeinen, zusammengesetzten Zahlausdrücken nach den bestimmten formalen Gesetzen der Addition, Subtraction, Multiplication, Division, Potenzirung, Radicirung operirt, d. h. gerechnet hat. Er stellt jene zusammengesetzten Zahlausdrücke ganz wie wir nur in Worten dar, und so leicht es uns erscheinen mag, er als der erste weiss ein Product wie $(x + 1)(x + 2)$ zu berechnen und in $x^2 + 3x + 2$ zu entwickeln. Bei Producten wie $(x - 1)(x - 2)$ kam er auf das Gesetz: „Eine negative Zahl ($\lambda\epsilon\acute{\iota}\psi\iota\varsigma$) mit einer negativen Zahl multiplicirt gibt eine positive Zahl ($\acute{\upsilon}\pi\alpha\rho\epsilon\acute{\iota}\varsigma$)“, welches die Multiplication von Differenzen lehren soll, ohne dass dabei Diophant nur im Entferntesten an Zahlen gedacht hätte, welche an sich negativ sind; nicht nur, dass der griechische Text keine Andeutung hievon enthält, die in der Uebersetzung nicht zu vermeiden ist, so sieht er ausdrücklich rein negative Zahlen als unbrauchbar an. Die ausdrückliche Aufstellung jenes Gesetzes aber gibt ein genügendes Bild von der Reinheit der formalen Auffassung arithmetischer Operationen bei Diophant. Die Identitäten, wie $(a + b)^2$

$= a^2 + 2ab + b^2$, welche bei Euklid in der pathetischen Würde geometrischer Lehrsätze erscheinen, sind für ihn die einfachsten Folgen der allgemeinen Verknüpfungsgesetze, deren Wahrheit aus ihrer Entwicklung selbst folgt und keines Beweises bedarf.

In der Anwendung jener Operationen auf verwickelte Ausdrücke zeigt er eine grosse Leichtigkeit und Gewandtheit, die um so bewundernswerther ist, als er nicht durch eine so bequeme und übersichtliche Bezeichnung, wie wir sie heute haben, in deren Ausführung unterstützt wurde. Denn ausser dem Zeichen von ψ oder ϕ für unser — Zeichen, der unmittelbaren Nebeneinanderstellung als Zeichen der Addition muss er alles durch Worte ausdrücken, hütet sich aber im klaren Bewusstsein seines Zweckes, die Operationen leicht ausführbar zu machen, Quotienten in der fatalen Form von Proportionen zu geben, die einem neueren Leser das Studium der klassischen Geometer nicht selten zur Qual werden lässt.

Wenn ich oben schon hervorhob, dass seine Arithmetik ganz unabhängig von der Rücksicht auf geometrische Constructionen ist, so mag zur Erläuterung bemerkt werden, dass er, wo er herkömmlicher Weise von rechtwinkligen Dreiecken spricht, doch darunter nur drei Zahlen g, k, h versteht, die in der Relation $g^2 + k^2 = h^2$ stehen; dass er ohne Weiteres die Fläche $\frac{1}{2} gh$ eines solchen mit einer der Katheten addirt, dass er verlangt, eine Kathete soll ein Kubus sein u. s. w., welche Vorstellungen ganz ausserhalb des Gedankenkreises eines klassischen griechischen Geometers liegen. Auch die lineare-Methode Euklid's im VII. Buche wendet er in seinem grossen Werke niemals*) an, sondern operirt stets mit und an Zahlen und zusammengesetzten Zahlausdrücken nach den Regeln der sog. 4 Species, die er selbst in der Einleitung zu jenem Werke kategorisch angibt.

Bei Diophant treten denn auch zuerst algebraische Gleichungen auf, d. h. Gleichheiten zwischen Grössenausdrücken, welche eine oder mehrere Unbekannte in denselben bestimmen sollen und durch eine passende Aufeinanderfolge

*) Mit Ausnahme von V, 13. — gewiss interpolirt.

arithmetischer Operationen explicite darstellen. Um sowohl die Aussprache der Gleichungen selbst als auch ihre Auflösung übersichtlicher zu machen, führte Diophant für die Unbekannte ($\acute{\alpha}\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma$) die Abbreviatur ς , für deren Quadrat ($\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\mu\iota\varsigma$), Kubus ($\kappa\acute{\upsilon}\beta\omicron\varsigma$) u. s. w. die Zeichen $\delta^{\tilde{\nu}}$, $\kappa^{\tilde{\nu}}$ u. s. w. ein. Die absoluten Glieder der Gleichungen werden durch das Zeichen $\mu^{\tilde{\delta}}$ ($\mu\omicron\nu\acute{\alpha}\delta\epsilon\varsigma$) kenntlich gemacht. Diese Zeichen gehen den Zahlencoefficienten vorher. An die Einführung von Zeichen für allgemeine Coefficienten, d. h. nicht numerisch bestimmte, aber als gegeben angenommene Zahlen, ist auf dieser Stufe der algebraischen Zeichensprache nicht zu denken. Näher hätte es gelegen, für verschiedene Unbekannte, welche gleichzeitig auftreten, auch verschiedene Zeichen zu verwenden. Diophant hat aber nur jenes eine. In vielen Fällen half er diesem Uebelstande dadurch ab, dass er alle Unbekannten, die in der Aufgabe enthalten sind, möglichst bald durch eine unter ihnen ausdrückte, oder aber, er bezeichnet verschiedene Unbekannte hinter einander mit demselben Zeichen, ein Verfahren, das in der Praxis bei weitem weniger verwirrt, als es von vorn herein scheinen kann, oder endlich: er setzt für die verschiedenen bekannten oder unbekannten Grössen beliebige Zahlen und rechnet mit diesen, erinnert sich aber an den Stellen, wo es nöthig ist, an die Art, wie die erhaltenen Zahlen aus jenen willkürlich angenommenen gebildet sind und gelangt so zu einer Einsicht in den Bau der Formeln und das Resultat der Rechnungen. Ein Beispiel wird hinreichen, dieses Hilfsmittel klar zu legen: IV, 16. „Man soll drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, dass die Summe der ersten und zweiten Zahl mit der dritten multiplicirt das Product 35, die Summe der zweiten und dritten mit der ersten multiplicirt das Product 27, die Summe der ersten und dritten mit der zweiten multiplicirt das Product 32 gebe.“

Lösung:*) „Man setze die dritte Zahl $= x$, so ist die Summe der ersten und zweiten $\frac{35}{x}$. Die erste Zahl sei

*) Ich gebe hier die einfache Uebersetzung des Diophant, wo ich nur das in seinen Zeichen oder in Worten Ausgedrückte in unserer algebraischen Zeichensprache darstelle.

$\frac{10}{x}$, so ist die zweite $\frac{25}{x}$.*) Nun sind aber noch zwei Bedingungen zu erfüllen, nämlich dass die Summe der zweiten und dritten, mit der ersten multiplicirt, das Product 27, und die Summe der ersten und dritten, mit der zweiten multiplicirt, das Product 32 gebe. Aber die Summe der zweiten und dritten mit der ersten multiplicirt gibt zum Product $10 + \frac{250}{x^2}$, folglich ist $10 + \frac{250}{x^2} = 27$.**) Die Summe der ersten und dritten, mit der zweiten multiplicirt, gibt zum Product $25 + \frac{250}{x^2}$, folglich ist $25 + \frac{250}{x^2} = 32$.***) Aber es ist auch, wie wir gesehen haben, $10 + \frac{250}{x^2} = 27$. Nun ist der Unterschied $32 - 27 = 5$ †) und der Unterschied

$$25 + \frac{250}{x^2} - \left(10 + \frac{250}{x^2}\right)$$

sollte daher ebenfalls = 5 sein. Aber die 25 kommt von dem Ausdrücke für die zweite Zahl, die 10 von dem Ausdrücke für die erste Zahl her und wir müssen also diese Zahlen so wählen, dass ihr Unterschied 5 wird. Die erste und zweite Zahl an sich sind aber nicht willkürlich; sondern ihre Summe soll 35 sein. Ich muss also 35 in zwei Theile theilen, deren Unterschied 5 ist; die eine dieser Zahlen ist 15, die andere 20.

Nunmehr setze ich die erste Zahl = $\frac{15}{x}$, die zweite = $\frac{20}{x}$. Nun gibt die Summe der zweiten und dritten, mit der ersten multiplicirt, das Product $15 + \frac{300}{x^2} = 27$, und die Summe der ersten und dritten, mit der zweiten multiplicirt, das Product $20 + \frac{300}{x^2} = 32$. Nehme ich nun die Gleichung $15 + \frac{300}{x^2} = 27$, so wird $x = 5$. Die erste Zahl ist also 3, die zweite 4, die dritte 5.“

*) Wir würden hier etwa so verfahren: Sei die dritte Zahl x , die erste $\frac{p}{x}$, die zweite $\frac{q}{x}$, so muss $\left(\frac{p}{x} + \frac{q}{x}\right)x = 35$, $p + q = 35$ sein.

$$**) \left(\frac{q}{x} + x\right) \frac{p}{x} = \frac{pq}{x^2} + p = 27.$$

$$***) \left(\frac{p}{x} + x\right) \frac{q}{x} = \frac{pq}{x^2} + q = 32.$$

$$†) q - p = 5.$$

Es wird schon dies ein Beispiel hinreichen, um zu zeigen, wie ein solches Verfahren, welches man das des falschen Ansatzes nennen könnte, in einfachen Fällen unsere Rechnung mit Buchstaben, wenn auch unvollkommen, zu ersetzen vermag.

Mit diesen formalen Hilfsmitteln ausgerüstet ging nun Diophant daran, arithmetische und algebraische Aufgaben, wie sie vor ihm als solche nur vereinzelt und beiläufig gestellt waren, in grosser Auswahl um ihrer selbst willen aufzustellen und zu lösen. Wir haben schon oben darauf hingewiesen, dass vor ihm — so viel uns bekannt — die Idee einer algebraischen Gleichung nicht vorhanden war; so kann denn auch z. B. von der Auflösung quadratischer Gleichungen vor ihm nicht die Rede sein, wenn auch in Euklid's Elementen und Daten an mehreren Stellen die geometrischen Operationen angegeben sind, welche zur Construction einer solchen führen. Diophant ist aber weit entfernt, seine rein algebraische Lösung derselben, die sich von der heute üblichen nicht unterscheidet, irgendwie auf geometrische Constructionen zu stützen, was um so mehr bemerkt zu werden verdient, als bis in's 18. Jahrhundert hinein bei keinem seiner Nachfolger die algebraische Lösung ohne geometrische Construction für ausreichend gehalten wird; und im 11. Jahrhundert führt ein arabischer Mathematiker die algebraische Methode der Auflösung ausdrücklich als „die Methode des Diophant“ an, während er der geometrischen den Vorzug zu geben scheint.

Dass Diophant negative Wurzeln der Gleichungen überhaupt verwirft, werden wir ihm nicht zum Vorwurf machen; wenn er aber auch im Falle, dass eine quadratische Gleichung zwei positive Wurzeln hat, nur eine von diesen erkannte und die nothwendige Zweideutigkeit ganz übersah, obgleich sie auf der Hand zu liegen scheint, würde uns dies unbegreiflich erscheinen, wenn wir nicht schon wüssten, dass den Griechen die Idee von der Vieldeutigkeit einer geometrischen Aufgabe gänzlich fehlte und sie, so zu sagen, des geistigen Organes beraubt waren, eine solche, selbst wenn sie offen vor ihnen lag, zu begreifen — ein interessanter Beweis für den Satz, dass wir nur dasjenige wahrnehmen, wozu wir die Idee schon in uns finden.

Man sieht aus dem Angeführten, dass Diophant, so grosse Verdienste er auch in formaler Hinsicht um die Algebra hat, doch materiell in dieser Disciplin keinen wesentlichen Fortschritt bezeichnet. Die Unsterblichkeit seines Namens und das nicht nur historische Interesse, was sich noch heute an seine Werke knüpft, verdankt er einer von ihm allererst begründeten und ausgebildeten Disciplin, die man früher Analysis indeterminata, unbestimmte Analytik nannte, die aber heute, nachdem ihr für uns werthvoller Inhalt in die höhere Zahlenlehre übergegangen ist, keinen besondern Namen mehr trägt. Das Wesen dieses Zweiges der Algebra oder Arithmetik besteht darin, rationale Werthe der Unbekannten zu bestimmen aus einem Systeme von Gleichungen, deren Anzahl die der in ihnen enthaltenen Unbekannten nicht erreicht. Eine einfache Aufgabe dieser Art wäre (II, 8) x, y als rationale Zahlen aus der Gleichung $a^2 = x^2 + y^2$ zu bestimmen; eine complicirtere (V, 21), x, y, z rational so zu bestimmen, dass, $u = x + y + z$ gesetzt, jeder der 4 Ausdrücke: $u, u^3 + x, u^3 + y, u^3 + z$ Quadrat einer rationalen Zahl werde; die Anzahl der Unbekannten beträgt hier 7, die der Gleichungen nur 4.

Es ist hier sogleich ein Irrthum zu bekämpfen, der durch einen falschen Namen fixirt und daher, wie ich fürchte, nicht auszurotten ist. Man bezeichnet im Unterrichte die linearen Gleichungen $ax + by = c$, welche in ganzen Zahlen x, y aufgelöst werden sollen, als diophantische. Nun hat nicht nur Diophant die Auflösung solcher Gleichungen, die im Occidente erst im 17. Jahrhundert durch den Commentator dieses Schriftstellers, Bachet, erfunden wurde, nicht gekannt, sondern es ist ihm die Aufgabe selbst völlig fremd, da er niemals die Bedingung festsetzt, dass die Lösungen ganze Zahlen sein sollen, vielmehr sich stets mit rationalen Lösungen völlig begnügt.*)

*) Wenn man überhaupt bei Diophant Lösungen in ganzen Zahlen sucht, so beruht dies auf einer historisch unrichtigen Vorstellung; seine Arbeiten hatten nicht sowohl den Zweck, wie heutige Untersuchungen aus der Zahlenlehre, in die tiefen Geheimnisse des aus so einfachen Elementen aufgebauten Systemes der ganzen Zahlen einzudringen; sie sind vielmehr hervorgegangen aus dem Streben nach einer Ausbildung

Der Leser wird nun begierig sein, die Klassen von unbestimmten Aufgaben, die Diophant behandelt, und seine Lösungsmethoden kennen zu lernen. Was das erstere betrifft, so ist zu bemerken, dass in den etwa 130 unbestimmten Aufgaben, welche Diophant in seinem grossen Werke behandelt, über 50 verschiedene Klassen von Aufgaben enthalten sind, die ohne jede erkenntliche Gruppierung aneinander gereiht sind, ohne dass die Lösung der vorhergehenden Aufgaben die der folgenden erleichterte. Das I. Buch enthält nur bestimmte algebraische Gleichungen; das II—V. Buch enthält meistens unbestimmte Aufgaben, bei denen Ausdrücke, die zwei oder mehrere Variabele je in erster oder zweiter Potenz enthalten, zu Quadraten oder Kuben zu machen sind. Das VI. Buch endlich beschäftigt sich mit rechtwinkligen Dreiecken in rein arithmetischer Auffassung, bei denen irgend eine lineare oder quadratische Function der Seiten zu einem Quadrat oder Kubus gemacht werden soll. Das ist alles, was wir über diese bunte Reihe von Aufgaben aussagen können, ohne jede der 50 Klassen einzeln vorzuführen.

Fast noch verschiedenartiger als die Aufgaben sind deren Lösungen, und wir sind völlig ausser Stande, nur eine einigermaßen erschöpfende Uebersicht über die verschiedenen Wendungen in seinem Verfahren zu geben. Von allgemeineren umfassenden Methoden ist bei unserem Autor keine Spur zu entdecken; jede Aufgabe erfordert eine ganz besondere Methode, die oft selbst bei den nächstverwandten

der Algebra ohne Anwendung der Geometrie. Irrationale Grössen waren den Alten keine Zahlen und konnten daher arithmetisch-algebraischen Verknüpfungen nicht unterworfen, sie konnten nur als actuelle Grössen, insbesondere als Strecken behandelt werden. Sollte daher eine Algebra als selbstständige Wissenschaft geschaffen werden, so mussten irrationale Lösungen gänzlich ausgeschlossen sein; in diesem nicht beachteten Umstände hat man den eigentlichen Grund zu suchen, warum Diophant die Bedingung stellt, dass die Lösungen in Zahlen (*ἐν ἀριθμοῖς*) angegeben werden sollen, und warum die unbestimmte Algebra vor der bestimmten ausgebildet werden musste, während uns Neueren, die wir die irrationalen Grössen in die Reihe der Zahlen zu setzen gewohnt sind, jene Forderung am Anfange der Algebra verfrüht erscheint, da thatsächlich die Schwierigkeiten der Diophantischen Algebra viel grösser sind als die der bestimmten Algebra.

Aufgaben ihren Dienst versagt. Es ist deshalb für einen neueren Gelehrten schwierig, selbst nach dem Studium von 100 Diophantischen Lösungen, die 101. Aufgabe zu lösen; und wenn man den Versuch gemacht hat und nach einigen vergeblichen Anstrengungen Diophants eigene Lösung liest, so wird man erstaunt sein, zu sehen, wie Diophant plötzlich die breite Heerstrasse verlässt, einen Seitenweg einschlägt und mit einer raschen Wendung beim Ziele anlangt — freilich oft bei einem Ziele, an dem wir uns nicht beruhigen mögen; wir glaubten einen beschwerlichen Pfad hinaufklimmen zu müssen, dann aber auch als Lohn eine weite Aussicht zu gewinnen; statt dessen führt uns unser Pfadfinder durch enge, wunderliche, aber glatte Wege auf eine kleine Anhöhe; er ist fertig! Zu einer Vertiefung in ein einzelnes wichtiges Problem fehlt es ihm an Ruhe und intensiver Kraft; und so eilt auch der Leser mit innerer Unruhe von Problem zu Problem, wie in einem Räthselspiele, ohne das Einzelne geniessen zu können. Diophant blendet mehr, als er erfreut. Er ist in bewundernswürdigem Maasse klug, gewandt, scharfsichtig, unermüdlich, aber weder gründlich noch tief in das Innere der Sache eindringend. Wie seine Aufgaben ohne ersichtliches wissenschaftliches Bedürfniss, oft nur der Lösung zu Liebe gestellt scheinen, so fehlt es auch letzteren an Vollständigkeit und tieferer Bedeutung. Er ist ein glänzender Virtuos in der von ihm erfundenen Kunst der unbestimmten Analytik, die Wissenschaft hat jedoch, wenigstens unmittelbar, diesem glänzenden Talente wenig Methoden zu verdanken, weil es ihm an dem speculativen Sinne fehlte, der in dem Wahren mehr als das Richtige sieht.

Das ist der allgemeine Eindruck, den ich von einem eingehenden und wiederholten Studium der Diophantischen Arithmetik erhalten habe. Ihn im Einzelnen ausreichend zu begründen, würde die mir hier gesteckten Grenzen bei Weitem überschreiten; nur sei zur Erläuterung bemerkt, dass Diophant nicht selten durch Einführung ganz specieller Nebenbedingungen die Lösung der ursprünglich gestellten Aufgabe gänzlich verschiebt, so wenn er z. B. in VI, 78 die Aufgabe stellt, w, y, z rational zu bestimmen, so dass $w^3 + z^2$ ein Quadrat, $y^2 + z^2$ ein Kubus wird, und er nimmt ohne

Weiteres $y^2 + z^2 = w^3$ an, so verwandelt er die Aufgabe in die wesentlich beschränktere $y^2 + z^2$ zu einem Kubus und $y^2 + 2z^2$ zu einem Quadrat zu machen, oder in die Aufgabe, $w^3 - z^2$ und $w^3 + z^2$ zu Quadraten zu machen. So wenig aber liegt es ihm an seiner eigentlich gestellten Aufgabe, dass er es nicht einmal für nöthig hält, zu bemerken, dass sie auf diese Weise in eine speciellere umgewandelt wird, die er allein lösen kann. Die Determinationen der gegebenen Constanten, nach ihrer Grösse oder nach ihrer arithmetischen Natur, für welche seine Auflösung allein statthaft ist, unterlässt unser Autor in sehr vielen Fällen anzugeben. Was aber seinen oft überraschend gewandten Lösungen meistens den höheren wissenschaftlichen Werth raubt, das ist vor Allem der Umstand, dass Diophant sich ausnahmslos damit begnügt, aus der meist unendlichen Anzahl von Werthsystemen, welche einer Aufgabe genügen, irgend eines herauszuheben, ohne auf die anderen Werthsysteme nur einen Blick zu werfen. Indessen hat man dies nicht so zu verstehen, als ob hiemit gegen Diophant ein Vorwurf erhoben werden sollte, insofern er seine Lösungen immer in bestimmten Zahlen angibt; denn da er keine allgemeinen Zeichen für Zahlen besass, so konnte er auch nicht anders, und es würde der Forderung, die Mannigfaltigkeit der Lösungen zu beachten, auch so genügt werden können, wenn Diophant im Texte bei jeder zum Behufe der Entwicklung eingeführten bestimmten Zahl bemerkt hätte, wie weit und worin diese willkürlich bleibt; dies geschieht aber nicht: Wenn z. B. V, 13 auf die Aufgabe $a + b + 1 = x^2 + y^2$ zurückgeführt wird, wo a und b gegebene Zahlen sind, so hätte Diophant zunächst bemerken sollen, dass die Aufgabe nur lösbar ist, wenn sich $(a + b + 1)$ in die Summe zweier Quadrate zerlegen lässt. Nicht nur aber, dass Diophant diese Determination verschweigt, sondern er wählt auch — ich möchte sagen, hinter dem Rücken des Lesers — die Zahlen a, b so, dass $a + b + 1$ ein Quadrat wird und gibt nun eine Bestimmung der x, y , welche nur in diesem Falle anwendbar ist, in dem allgemeinen Falle aber ihren Dienst versagt. So muss man stets auf der Hut sein, nicht durch Finten getäuscht zu werden. Unser Autor aber ist zufrieden

gestellt, wenn er das Kunststück gelöst und eine Lösung herausgebracht hat; er überrascht, aber er befriedigt nicht.

Der Grund dieses Mangels ist einerseits in der individuellen Anlage Diophants zu suchen, andererseits in jener Eigenthümlichkeit der griechischen Mathematik, die Vieldeutigkeit der Probleme gänzlich zu ignoriren, während auf dem Gebiete der unbestimmten Analytik es neuerdings die erste Aufgabe des Forschers ist, die Bedingungen der Lösbarkeit und die Anzahl der Lösungen zu bestimmen, Methoden zu entwickeln, durch welche aus einer Lösung die anderen abgeleitet werden können, und die ganze Mannigfaltigkeit der Werthsysteme, welche einer Aufgabe genügen, sich vor Augen zu stellen; erst dann und mit dieser Unterstützung pflegt er an die eigentliche Auflösung zu gehen.

Nur an sehr wenigen Stellen, und auch da nur zum ausgesprochenen Zwecke, Eine passende Lösung einer anderen Aufgabe zu finden, löst er Gleichungen allgemein (*ἀσολίστως*) auf; so gibt er VI, 12—13, wenn $y = 1$ eine particuläre Lösung der Gleichung $ay^2 + b = z^2$ und $a + b = c^2$ ist, an, dass man die allgemeine finden könne, wenn man $y = x + 1$, $z = dx + c$ setzt, wo dann $ax^2 + 2ax + a + b = d^2x^2 + 2dx + c^2$, also $ax + 2a = d^2x + 2d$ und somit $x = 2 \frac{d-a}{a-d^2}$, wo d beliebig, die allgemeine Auflösung ist. Aehnlich lehrt er in VI, 16 die Gleichung $ay^2 - b = z^2$ allgemein lösen, wenn die particuläre Lösung $y = p$ bekannt und $ap^2 - b = q^2$ gesetzt wird. Man nehme nämlich $y = x + p$, $z = dx + q$, und wie vorhin wird $x = 2 \frac{d-a}{a-d^2}$ gefunden.

Es ist schon oben bemerkt worden, dass man in der Sammlung unseres Autors, die sich selbst als „Arithmetisches“ ankündigt, nichts weniger als eine systematische Sammlung von Aufgaben zu sehen hat. Die eben erwähnten, uns so fundamental erscheinenden Aufgaben werden nahe am Ende des Werkes nur ganz gelegentlich behandelt, während die speciellere $a^2y^2 + b = x^2$ bereits von Anfang an durch die Substitution $x = ay \pm c$, also $y = \pm \frac{b-c^2}{2ac}$, und ebenso $ay^2 + \beta^2 = x^2$ durch $x = cy \pm \beta$ also $y = \pm \frac{2\beta c}{a-c^2}$ aufgelöst wird, ohne dass je eine allgemeine Bemerkung in dieser Hinsicht gemacht

worden wäre. Ebenso wenig wird die allgemeine Theorie der Gleichungen $ay^2 + 2cy + b = z^2$ jemals ausgeführt, obgleich Diophant nicht selten solche Formen behandelt.

Auch von der fundamentalen Aufgabe, die zwei quadratischen Ausdrücke $ax^2 + bx + c$, $a'x^2 + b'x + c'$ gleichzeitig zu Quadraten zu machen, auf welche *διπλοσίτης* (aequatio duplicata) Diophant sehr viele Lösungen zurückführt, findet sich nirgends eine systematische Behandlung. Nur von dem einfachsten Falle, dass $x + a$, $x + a'$ Quadrate sein sollen, wird II, 12 die schöne allgemeine Regel gegeben: „Man nehme den Unterschied der beiden Quadrate $a - a'$ und zerfalle denselben in zwei Factoren $a - a' = \kappa \kappa'$, dann ist $x + a = \left(\frac{\kappa + \kappa'}{2}\right)^2$, $x + a' = \left(\frac{\kappa - \kappa'}{2}\right)^2$ zu setzen.

Das mag genügen, um eine für die historische Entwicklung genügende Uebersicht von dem zu geben, was Diophants grosse Sammlung arithmetischer Aufgaben enthält und nicht enthält. Vielleicht noch berühmter aber als durch dieses Werk ist unser Autor durch ein anderes geworden, das wir nicht mehr besitzen, durch seine Schrift unter dem Titel „Porismen“. Aus drei als Porismen von ihm selbst ausdrücklich angeführten Sätzen (V, 3, 5, 19), sowie aus der Bedeutung, welche andere Mathematiker diesem Worte beilegen, dürfen wir schliessen, es habe dies Werk eine Sammlung von algebraischen Identitäten, wie sie zur Lösung unbestimmter Aufgaben nothwendig sind, und eine Reihe von Lehrsätzen enthalten, wie wir sie in der Zahlenlehre vorzutragen pflegen. Was nun die erstere betrifft, so hat Diophant in der That eine Reihe von Identitäten gekannt, welche zu interessanten Sätzen der Zahlenlehre Veranlassung geben, wie III, 22 den Satz, dass

$$\begin{aligned}(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) &= (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 \\ &= (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2\end{aligned}$$

und also das Product zweier Zahlen, welche Summen von Quadraten sind, wieder und zwar auf zweierlei Weise in die Summe zweier Quadrate zerlegbar ist. Es folgt hieraus, da die ungerade Summe von zwei Quadraten niemals von der Form $(4n + 3)$ sein kann, dass keine Zahl, welche

einen Factor von dieser Form hat, in die Summe zweier Quadrate zerlegt werden kann. Dies hat Diophant richtig erkannt und gibt V, 12 als Determination einer Aufgabe, welche auf die Zerlegung einer Zahl in die Summe zweier Quadrate hinauskommt, in der That an, letztere dürfe keinen Factor von der Form $(4n + 3)$ besitzen.*) Aus dieser Bedingung hat man nun — in der Annahme, dass Diophant, wie die klassischen Mathematiker des Alterthums, vollständige Bestimmungen über die Möglichkeit seiner Lösungen gibt — geschlossen, dass Diophant bewiesen haben müsse, dass, im Falle jene Zahl von der Form $(4n + 1)$ ist, sie jedesmal in die Summe zweier Quadrate zerfällbar sei. Wenn er in IV, 31, 32, wo es sich darum handelt, eine Zahl in die Summe von 4 Quadraten zu zerlegen, keine Determination hinzufügt, so schloss man, immer unter jener stillschweigenden Annahme, Diophant habe erwiesen, dass jede Zahl in 4 Quadrate zerlegbar sei. So glaubte man noch aus anderen Determinationen oder aus dem Mangel solcher darauf schliessen zu müssen, dass Diophant eine Reihe der feinsten Lehrsätze aus der Zahlenlehre gekannt habe, welche erst die grössten Mathematiker der letzten beiden Jahrhunderte wieder beweisen konnten; und da man diese Lehrsätze und Beweise in dem vorhandenen Werke nicht fand, so glaubte man sie in dem verloren gegangenen enthalten, und das Ansehen der „Porismen“ wuchs in's Unbegrenzte. So sehr wir nun auch in historischem Interesse den Verlust dieses Werkes bedauern, das im 16. und 17. Jahrhundert sicherlich ein sehr lehrreiches gewesen wäre, so sind wir doch der Ansicht, dass man sich in Bezug auf seinen wissenschaftlichen Werth einer Illusion hingegeben hat. Denn es ist zunächst jene Annahme ganz unbegründet, dass Diophant überall die nothwendigen und zureichenden Bedingungen der Lösbarkeit einer Aufgabe genau aufstellte. An vielen Stellen sind die Bedingungen zu eng oder zu weit, und es kommen dabei durchaus nur nega-

*) Ich zweifle nicht, dass die von den Msscr. arg entstellte Determination so zu lesen ist: *Δεῖ δὲ τὸν διδόμενον μῆτε περισσὸν εἶναι, μῆτε τὸν διπλασίονα αὐτοῦ ἀριθμὸν μονάδι ἢ μείζονα μετρεῖσθαι ὑπὸ τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ, ὃς ἂν μονάδι ἢ μέζων ἔχη μέρος τέταρτον.*

tive Sätze der Zahlenlehre in Anwendung, wie dass keine Summe von 2 Quadraten von der Form $4n + 3$, keine von 3 Quadraten von der Form $8n + 7$ sein könne (V, 14) u. s. w. Diese Sätze, welche überaus leicht zu beweisen sind, erlaubt sich nun Diophant ohne Weiteres umzukehren und in eine positive Behauptung zu verwandeln. Dass er aber diese positiven Sätze nicht beweisen konnte, geht zur Genüge aus der Fehlerhaftigkeit vieler dieser Umkehrungen hervor, und wenn zuweilen die Umkehrung richtig ist, so ist Diophant daran unschuldig. Kurz: Streift man das Vorurtheil ab, dass alles Griechische klassisch und in sich vollendet sei, und prüft man unsern Autor an sich selbst, so findet man auch hier wieder jene Gewandtheit und jenen schnellen Blick unseres Autors; tiefsinnige Speculationen, welche die Arbeiten eines Euler, Lagrange, Gauss, Jacobi verdunkeln könnten, haben diese Porismen ohne Zweifel nicht enthalten.

So müssen wir gegenüber unwahren Ueberschätzungen von einem objectiven Standpunkte aus den wissenschaftlichen Werth der Schriften Diophants beurtheilen. Dass wir überhaupt diesen Maassstab an seine Leistungen anlegen, ist schon genügende Anerkennung; denn wer würde mit diesem an einen Nikomachus herantreten! Es darf aber daneben vom historischen Standpunkte ausdrücklich hervorgehoben werden, dass Diophants Arithmetik zu dem Bedeutendsten gehört, was uns aus dem griechischen Alterthum überliefert ist, ja dass an Originalität und Selbstständigkeit seine Leistungen vielleicht höher stehen, als die irgend eines anderen Mathematikers. Sie sind aus einem anderen Geiste hervorgegangen, als die klassischen Leistungen der griechischen Geometer, sie sind nicht mehr klassisch nach Form und Inhalt; „chacun a les défauts de ses vertus“. Der neue Gedankenkreis, aus dem sie entsprangen, war identisch mit dem der Völker, welche seitdem die Wissenschaft verbreitet und gefördert haben. Jener ästhetische Sinn für die Raumformen, der systematisch strenge Geist der klassischen Geometer ist ein durchaus griechisches Erbtheil. In der Zeit des untergehenden Griechenthums musste dieser einem anderen Platz machen, der in eigenthümlicher Weise an die erste Periode der griechischen Wissenschaft, an die Pythagorische Anschauung

anknüpft. Es ging damit das specifisch Griechische in das allgemein Menschliche über, und wie Pythagoras mit seiner Weisheit sich eng an Orientalisches anschloss, so berührt sich auch Diophants Sinn und Streben wieder auf das Engste mit dem des Orientes, insbesondere des Volkes, das im allgemeinen Entwicklungsgange jetzt an die Spitze mathematischer Thätigkeit tritt, der Inder.
