

2906 pdf
SZABO, A.
1962



CHICAGO JOURNALS



History
of
Science
Society

Der älteste Versuch einer definitorisch-axiomatischen Grundlegung der Mathematik

Author(s): A. Szabo

Reviewed work(s):

Source: *Osiris*, Vol. 14 (1962), pp. 308-369

Published by: The University of Chicago Press on behalf of The History of Science Society

Stable URL: <http://www.jstor.org/stable/301872>

Accessed: 25/03/2012 13:25

Your use of the JSTOR archive indicates your acceptance of the Terms & Conditions of Use, available at
<http://www.jstor.org/page/info/about/policies/terms.jsp>

JSTOR is a not-for-profit service that helps scholars, researchers, and students discover, use, and build upon a wide range of content in a trusted digital archive. We use information technology and tools to increase productivity and facilitate new forms of scholarship. For more information about JSTOR, please contact support@jstor.org.



The University of Chicago Press and The History of Science Society are collaborating with JSTOR to digitize, preserve and extend access to *Osiris*.

<http://www.jstor.org>

Der älteste Versuch einer definitorisch-axiomatischen Grundlegung der Mathematik*

EINLEITUNG

1. Das historische Problem der euklidischen Grundlagen
2. Der Vorrang der Arithmetik
3. Die Einheit und die Zahlen
4. Die Teilbarkeit der Zahlen
5. Die Teilbarkeit und die Geometrie.
6. „Das Ganze ist grösser als der Teil.“
7. Wie kam man zu der axiomatischen Grundlegung der Geometrie?

In mehreren Aufsätzen habe ich in der letzten Zeit die These verfochten, dass die älteste deduktive Mathematik der Griechen einer Anregung der eleatischen Philosophie zu verdanken sei (1). Zu dieser Vermutung führten mich ausser chronologischen Über-

* Ein bedeutender Teil der hier entwickelten Gedanken wurde schon in meinem Aufsatz, „Die Grundlagen in der frühgriechischen Mathematik“ (Studi italiani di Filologia Classica 1958), zum ersten Male veröffentlicht. Zu einer neuen Behandlung des Themas fühlte ich mich aus den folgenden Gründen veranlasst.

Meine frühere Arbeit war eher philologisch orientiert und die für die Mathematikgeschichte wichtigen Gesichtspunkte blieben dabei oft bedauerlicherweise im Hintergrund. Diesmal unterdrückte ich alles, wofür sich eher nur Philologen interessieren dürften, lieber verwies ich gelegentlich auf meine frühere Arbeit.

Obwohl ich von meinem genannten Aufsatz gar nichts aufgeben möchte, befriedigt mich heute nicht mehr jene Behandlungsweise, die ich dort zur Geltung brachte. Darum will ich die Arbeit in dieser — wie mir scheint — besseren Form der wissenschaftlichen Öffentlichkeit noch einmal vorlegen.

(1) Á. Szabó : „Eleatica“ (in *Acta Antiqua Acad. Scient. Hung.*, III., Budapest 1955, 67-103); „Wie ist die Mathematik zu einer deduktiven Wissenschaft geworden?“ (*ibid.*, IV., 109-152); „Λεϊκννυμ als mathematischer Terminus für *bewiesen*“ (in Maia, *Rivista di letteratura classica*, Nuova serie, X, 1958, 106-131).

legungen hauptsächlich zwei Beobachtungen. *Erstens* hat mich das häufige Auftreten des sog. indirekten Beweises in der griechischen Mathematik des 5. Jahrhunderts auf den Gedanken gebracht, dass eine deduktive Mathematik ohne die Kenntnis des indirekten Beweisverfahrens gar nicht möglich sei (2). Und doch lässt sich das Entstehen dieser Art von Beweisführung innerhalb einer anfänglichen, rein praktisch-empirischen Mathematik kaum erklären. Umso leichter war es, diese Denkweise als ein aus der Philosophie der Eleaten übernommenes Gedankengut darzustellen (3).

(2) „Wie ist die Mathematik zu einer deduktiven Wissenschaft geworden?“ a.a.O. 140 ff.

(3) Es ist hier natürlich nicht möglich, den ganzen Gedankengang mit Belegen zusammen zu wiederholen, der mich zu diesem Schluss führte. Da mir jedoch bedeutende Mathematiker der Gegenwart ihren Zweifel mitteilten — sie fanden meine These, dass die griechischen Mathematiker den indirekten Schluss von den Eleaten gelernt hätten, nicht überzeugend genug —, sei mir doch erlaubt, meine bisherigen wichtigsten Argumente dafür noch einmal kurz zusammenzufassen.

1. Die älteste bekannte Anwendung der indirekten Beweisführung auf griechischem Sprach- und Kulturgebiet liegt in dem Lehrgedicht des Parmenides vor. Die zur Zeit bekannten ältesten mathematischen Anwendungen derselben Art von Beweisführung sind nach unseren heutigen Kenntnissen alle ausnahmslos auf eine Zeit *nach* Parmenides zu setzen.

2. Es gibt gar keine Erklärung dafür, wie man den Kunstgriff der indirekten Beweisführung auf Grund rein praktisch-empirischer Kenntnisse mathematischer Art hätte erfinden können. Wollte man das Entstehen des indirekten Beweisverfahrens innerhalb einer anfänglichen und bloss praktisch-empirischen Mathematik erklären, so bliebe es ein ungelöstes Rätsel. (Dagegen lässt sich das Zustandekommen dieser Denkweise innerhalb der eleatischen Lehre doch erklären; vgl. dazu meinen Aufsatz „Zum Verständnis der Eleaten“, *Acta Antiqua Acad. Scient. Hung.*, II., 1954, 243-289).

3. Die Anwendung des indirekten Beweisverfahrens tritt in der griechischen Mathematik *zusammen* mit einer antiempirischen und anschauungswidrigen Tendenz auf. Die auffallende Verbindung dieser beiden Erscheinungen — indirekter Beweis und antiempirische Einstellung — lässt sich unter dem Gesichtspunkt einer praktisch-empirischen Mathematik gar nicht erklären. Sinnvoll ist jedoch dieselbe Verbindung innerhalb der eleatischen Philosophie. Die Eleaten *mussten* in der Tat Antiempiriker sein, d.h. jede sinnliche Wahrnehmung und praktische Erfahrung ablehnen (vgl. dazu meinen Aufsatz „Zur Gesch. der Dialektik des Denkens“, *Acta Antiqua Acad. Scient. Hung.*, II., 1954, 17-62), denn nur so konnten sie die Gültigkeit ihrer indirekten Schlüsse verfechten. Die Verbindung des indirekten Beweises mit der antiempirischen Tendenz muss selbstverständlich dort entstanden sein, wo sie sinnvoll ist, d.h. also in der eleatischen Philosophie. Durch die Mathematik wurde sie nur übernommen, und auch auf einem solchen Gebiete angewandt, wo sie gar nicht unbedingt notwendig war, da in der Mathematik der indirekte Beweis meistens auch *ohne* eine antiempirische Einstellung sehr gut bestehen konnte.

Zweitens drängte mich zu derselben Vermutung auch eine historische Untersuchung über die Entwicklung des mathematischen Evidenz-Begriffes (4). Ich glaube nachgewiesen zu haben, dass die Evidenz in der ältesten griechischen Mathematik rein empirisch-anschaulicher Art war. Aber das Streben nach dieser primitiven Evidenz wurde noch im 5. Jahrhundert durch eine antiempirische und anschauungswidrige Tendenz abgelöst. Diese merkwürdige Tendenz trat Hand in Hand mit den ersten Anwen-

4. Wir sind in der glücklichen Lage auch das noch erklären zu können, warum die ersten Mathematiker sich zu der Übernahme der eleatischen Methode der indirekten Beweisführung veranlasst fühlten? — Diese Methode ermöglichte für sie den Nachweis einer solchen Tatsache, die sich mit den früheren praktisch-empirischen Methoden gar nicht nachweisen liess; diese Tatsache war nämlich *die Existenz der Inkommensurabilität*. Man liest über die Inkommensurabilität die folgende sehr treffende Schilderung bei Aristoteles (Met. 983 a 12 ff.): „Man wundert sich zunächst über die Inkommensurabilität der Diagonale und der Seite des Quadrats. Denn zuerst erscheint es jedermann verwunderlich, dass es etwas geben sollte, was auch mit dem kleinsten gemeinsamen Mass nicht gemessen werden könnte.... Ein geometrisch gebildeter Kopf würde sich umgekehrt über nichts mehr verwundern, als wenn die Diagonale auf einmal kommensurabel sein sollte.“ — Es ist in der Tat so, dass man die Inkommensurabilität der Quadratdiagonale zur Seite mit bloss praktisch-empirischen Methoden nie endgültig nachweisen kann, ja man kann nicht einmal auf den Gedanken kommen, dass es eine Inkommensurabilität überhaupt gibt, solange man nur praktisch-empirische Methoden benutzt. Eine unerschütterliche Tatsache wird die Existenz der Inkommensurabilität erst dann, wenn man den indirekten Schluss verwendet, vgl. Eucl. El. X 27. — Die ersten Mathematiker müssen also gerade darum diese Art Beweisführung übernommen haben, weil sie bald merkten, welch neue Möglichkeiten für sie dadurch eröffnet werden.

Im Sinne dieser vierfachen Überlegung halte ich also auch weiterhin an meiner ursprünglichen Vermutung fest: die ältesten griechischen Mathematiker haben das indirekte Beweisverfahren von den Eleaten gelernt.

Zum Schluss sei mir in diesem Zusammenhang noch eine Bemerkung von beinahe persönlicher Art erlaubt. Ich hielt die eben behandelte Vermutung jahrelang für meinen eigenen Gedanken. In der Tat ist mir aus der Literatur eine solche Begründung dieser, wie ich sie in meinen verschiedenen Arbeiten entwickelte, nicht bekannt. Erst in der letzten Zeit erfuhr ich, dass ähnliches auch sonst, von mir unabhängig, wohl schon vermutet wurde. Ich fand in dem Büchlein von J. E. HOFMANN, „Geschichte der Mathematik, erster Teil. Von den Anfängen bis zum Auftreten von Fermat und Descartes. Berlin 1953“ (*Sammlung Göschen*, Bd. 226) im Kapitel „Um das Irrationale 400-325“ den folgenden Satz (S. 27): „Jetzt bemächtigten sich die Mathematiker der indirekten Schlussweise, die schon Zenon von Elea (490?-430?) angewendet hatte, um die landläufigen Ansichten vom Wesen des Raumes, der Zeit und vor allem der Bewegung durch scharfsinnige Trugschlüsse in Frage zu stellen.“ — Diese Behauptung sieht schon beinahe wie eine Vorwegnahme meiner These aus.

(4) „*Δείκνυμι* als mathematischer Terminus für *beweisen*“ a.a.O.

dungen des indirekten Beweisverfahrens auf, und liess sich ebenfalls als der Einfluss der eleatischen Philosophie erklären.

Diesmal möchte ich die Spuren des eleatischen Einflusses in der ältesten definitorisch-axiomatischen Grundlegung der Mathematik verfolgen.

1. DAS HISTORISCHE PROBLEM DER EUKLIDISCHEN GRUNDLAGEN

Wie bekannt, werden in Euklids klassischem Werk, den „Elementen“, die rund um 300 v.u.Z. entstanden, die sog. mathematischen Grundlagen oder Prinzipien (5) gleich am Anfang des ersten Buches in einer dreifachen Gruppe aufgezählt. *Definitiones*, *Postulata* und *Communes animi conceptiones* heissen gewöhnlich in lateinischer Übersetzung die Bestandteile dieser dreifachen Gruppe (6). Proklos, der neuplatonische Kommentator der „Elemente“ im 5. Jahrhundert u. Z., erklärt ausführlich sowohl den Sinn und die Bedeutung dieser unbewiesenen Grundlagen für das ganze Gebäude der Mathematik, als auch die Unterschiede ihrer einzelnen Bestandteile (7). Die Grundlagen (= Prinzipien)

(5) Es gibt in unserem Euklid-Text gar keinen gemeinsamen Namen für die mathematischen Grundlagen oder Prinzipien. Man findet hier nur Sonderbezeichnungen für die Definitionen, Postulate und „Communes animi conceptiones“. In dem Kommentar des Neuplatonikers Proklos (siehe die Anmerkung 7) heissen die Grundlagen (= Prinzipien) ἀρχαί oder ὠρισμένοι ἀρχαί (Procl. ed. F. S. 75, 12 und 8) oder auch ὑποθέσεις (S. 77, 2). Die ältere Bezeichnung für die mathematischen Prinzipien scheint allerdings ὑποθέσεις gewesen zu sein; vgl. auch bei Platon, *Resp.*, VI, 510 C : ποιησάμενοι ὑποθέσεις αὐτά (über Definitionen gesagt).

(6) Ich benutze diesmal absichtlich nur die lateinischen Übersetzungen der betreffenden griechischen Termini, so wie sie in der Textausgabe von J. L. Heiberg (*Euclidis Elementa*, Vol. I, Lipsiae 1883) zu lesen sind, weil ich die rein philologisch-historischen Probleme der Terminologie in diesem Zusammenhang nicht behandeln will. Darum bemerke ich hier nur so viel, dass sich jene „vollständige terminologische Verwirrung, die bei den nacharistotelischen Mathematikern hinsichtlich der Bezeichnung der verschiedenen Gruppen von ἀρχαί herrschte, und welche auch die späteren Kommentatoren des Euklid und Archimedes nicht zu beseitigen imstande waren“ (vgl. K. v. Fritz, „Die APXAI in der griechischen Mathematik“, *Archiv für Begriffsgeschichte*, Bd. 1, Bonn 1955, S. 101), philologisch im Grunde doch leicht enträtseln lässt. Vgl. dazu den ersten Abschnitt meiner Arbeit „Die Grundlagen in der frühgriechischen Mathematik“ in *Studi italiani di Filologia Classica* 1958.

(7) Procli Diadochi in primum Euclidis Elementorum librum commentarii, ed. G. Friedlein, Lipsiae 1873 S. 75 ff. — Die für uns in dieser Beziehung wich-

wären unbewiesen vorausgeschickte Sätze, die man auch gar nicht zu beweisen hätte, aus denen sich aber alle übrigen Sätze der mathematischen Wissenschaft der Reihe nach ableiten liessen — heisst es in diesen Erklärungen. Es geht aber aus der Darstellung des Proklos gar nicht hervor, wie man wohl einst auf den Gedanken gekommen sein mag, dass man solche unbewiesene Grundlagen den mathematischen Erörterungen vorausschicken soll.

Auch die moderne Forschung pflegt in diesem Zusammenhang meistens nur auf Aristoteles hinzuweisen. Man betont nämlich (8), dass es vor Aristoteles eine lebhafte Kontroverse darüber geherrscht hätte, ob es überhaupt eine beweisende Wissenschaft im strengsten Sinne geben könnte, da das zu einem "regressus in infinitum" führen sollte, oder ob diese Schwierigkeit nicht dadurch zu überwinden wäre, dass man die verschiedenen Sätze eines Wissenschaftssystems auseinander beweisen würde (9). Aristoteles hätte diesen beiden Auffassungen seine Lehre gegenübergestellt, wonach jede Wissenschaft aus unbeweisbaren, aber wahren ersten Prinzipien abgeleitet werden müsste, und dann hätte er die verschiedenen Eigenschaften festzustellen versucht, die die ersten Prinzipien haben müssten. Die Angabe des Proklos jedoch, dass nämlich Apollonios von Perge das erste Gleichheitsaxiom Euklids zu beweisen versucht hätte (10), schiene darauf hinzuweisen, dass auch zur Zeit des Apollonios, d.h. an Ende des 3. Jahrhunderts, ungefähr ein Jahrhundert nach Aristoteles, dessen Auffassung noch keineswegs durchgesetzt, und dass man zu dieser Zeit immer noch vergebliche Versuche unternommen hätte, die Prinzipien zu beweisen (11). — Im Sinne dieser Gedankenführung wäre also die definitorisch-axiomatische Grundlegung der griechischen Mathematik — oder mindestens die Tatsache, dass man sowohl die Möglichkeit als auch die Grenzen einer solchen Grundlegung klar erkannte — bis zu einem gewissen Grade das Verdienst von Aristoteles selbst. Damit sollte zwar nicht geleugnet werden, dass Aristoteles beträchtliches ihm schon vorliegendes mathematisches

tigsten Proklos-Stellen sind bei O. Becker (*Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung*, Freiburg-München 1954, S. 98 ff. und 121 ff.) übersetzt.

(8) K. v. Fritz, „Die *APXAI* in der griechischen Mathematik“, *Archiv für Begriffsgeschichte*, Bd. 1, Bonn 1955.

(9) *Analytica posteriora*, I, 3, 72b, 5 ff.; I, 19-23; p. 83b, 32-84a 6.

(10) Proclus (ed. F) S. 183, 13 ff.

(11) K. v. Fritz, *o.c.*, S. 64-65.

Material hatte, an dem er sich orientieren konnte, und auch tatsächlich orientierte — es wäre also möglich, ja vielleicht auch wahrscheinlich, dass es Ansätze einer definitorisch-axiomatischen Grundlegung auch schon in der voraristotelischen Zeit gab —, aber es wäre doch die eigene Leistung des Aristoteles — wie es auch wiederholt betont wird (12) —, dass er versucht hätte den Beweis zu erbringen, dass jede Wissenschaft von ersten unbeweisbaren aber nichtsdestoweniger wahren und gesicherten Prinzipien ausgehen muss. Mit dieser Erkenntnis hätte also eigentlich erst Aristoteles, kaum um eine Generation früher als Euklid, die definitorisch-axiomatische Grundlegung der Mathematik mindestens *prinzipiell* ermöglicht. Auch der Hinweis auf den vergeblichen Versuch des Apollonios von Perge, das erste Gleichheitsaxiom Euklids zu beweisen, sollte nach dieser Auffassung nur die Tatsache unterstreichen: wie sich die aristotelischen Gedanken über die Grundlegung der Mathematik nur mühsam durchsetzen konnten: selbst ein so hervorragender Geometer wie Apollonios von Perge am Ende des 3. Jahrhunderts hätte die entscheidende Erkenntnis des Aristoteles ihrem Wesen nach immer noch nicht richtig erfassen können.

Nun soll es hier nicht geleugnet werden, dass die eben ange deuteten Auseinandersetzungen des Aristoteles über Möglichkeit und Grenzen der beweisenden Wissenschaft zum Teil allerdings auch die Probleme beleuchten, die zu jener Zeit die Mathematiker in der Grundlegung ihrer Wissenschaft zu bewältigen hatten. Aber die Vermutung, dass erst die angeführten Ansichten des Aristoteles für die euklidische Grundlegung der griechischen Mathematik die Bahn geebnet hätten, ist doch sehr unwahrscheinlich. Jene Grundlagen der mathematischen Wissenschaft, die am Anfang der euklidischen „Elemente“ vorliegen, stellen nämlich — mindestens zu einem bedeutenden Teil — die Erbschaft einer viel älteren, voraristotelischen Zeit dar.

Auch die frühere Forschung hat diese Tatsache bis zu einem gewissen Grade schon erkannt. P. Tannery hat z.B. darauf aufmerksam gemacht (13), dass die 4. und 7. Definition des ersten

(12) K. v. Fritz, *o.c.*, S. 98.

(13) P. Tannery, „Sur la location ἐξ ἰσού“, *Revue des Études grecques*, t. X, 1897, 14-18 = *Mémoires scientifiques* (publiés par J. L. Heiberg-H. G. Zeuthen, Toulouse-Paris 1912), II, 540-544.

Buches der euklidischen „Elemente“, d.h. also die Definition der „geraden Linie“ und diejenige der „ebenen Fläche“ in den „Elementen“ nie gebraucht werden. Noch auffallender, dass manchmal auch die Terminologie dieser Definitionen mit jener Terminologie gar nicht übereinstimmt, welcher sich Euklid sonst in seinen Sätzen und Beweisen bedient. Das „Rechteck“ heisst z.B. in der 22. Definition des ersten Buches der „Elemente“ *ἐτερόμηκες*, wo Euklid für dieselbe Figur sonst immer den Namen *παρλληλόγραμμον* gebraucht. Dasselbst wird auch der „Rhombus“ (*ῥόμβος*) definiert, von dem Euklid nie mehr sprechen wird, und wir hören von dem „Rhomboid“ (*ῥομβοειδές*), welches Euklid sonst nur als ein *παρλληλόγραμμον* bezeichnet. Ja inkonsequent ist in der Sammlung der Definitionen des ersten Buches der „Elemente“ auch die Benennung der „Polygone“; man würde nämlich im Sinne der 19. Definition erwarten, dass diese nach der Zahl ihrer *Seiten* (*τρίπλευρα*, *πολύπλευρα*), und nicht wie es später geschieht, dass sie nämlich nach der Zahl ihrer *Ecken* (*τρίγωνον*, *πεντάγωνον* etc.) benannt werden (14). Man findet also am Anfang des ersten Buches nicht nur später gar nicht gebrauchte Definitionen („gerade Linie“, „ebene Fläche“, „Rhombus“), sondern auch die Terminologie scheint manchmal eine andere zu sein, als diejenige, die später im Werk selbst gebracht wird.

Tannery hat aus diesen Beobachtungen zweifellos den richtigen Schluss gezogen, dass nämlich die euklidischen Definitionen des ersten Buches in ihrer Gesamtheit eigentlich gar nicht von Euklid selbst stammten (15). Euklid hatte schon zahlreiche Vorgänger, die, ebenso wie er selber, versuchten, die Grundlagen der Mathematik ihren Erörterungen — besonders wenn sie „Elemente“ zusammenstellten — vor auszuschicken. Euklid hätte also von diesen Vorgängern manches ziemlich gedankenlos übernommen, ohne vorher das Übernommene, mindestens was die Terminologie betrifft, mit seinem eigenen Werk in Einklang zu bringen (16). Von dem Gesichtspunkt der Mathematik aus betrachtet, war es

(14) P. Tannery, „Sur l'authenticité des axiomes d'Euclide“, *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2^e série, t. VIII, 1884, 162-175 = *Mém. Scient.*, II, 48-63.

(15) *Mém. scient.*, II, 55.

(16) Ebenso werden die euklidischen Definitionen auch bei A. M. Frenkian (*Le postulat chez Euclide et chez les modernes*, Paris 1940, 14) beurteilt: „La terminologie des *Définitions* ne correspond pas à celle habituellement employée par Euclide au cours de ses *Éléments*. Ensuite ces définitions trouvent très peu d'emploi

gewiss ein schwerwiegender Fehler, aber man muss ihm dafür dennoch dankbar sein, denn gerade diese seine „Gedankenlosigkeit“ ermöglicht für uns ein wenig Einblick in die voreuklidische Geschichte der Wissenschaft.

Tannerys Vermutung über den voreuklidischen Ursprung der Grundlagen bei Euklid betraf nur die Definitionen des ersten Buches der „Elemente“. Seitdem hat man jedoch dasselbe auch über das sog. Axiom der Kongruenz (17) vermutet. Es ist nämlich K. v. Fritz aufgefallen, dass Euklid dies Axiom zwar aufstellte, aber später von demselben so gut wie gar keinen Gebrauch machte, obwohl sich manche Unstimmigkeiten in den Gleichheitsdefinitionen leicht hätten vermeiden lassen, wenn von der „Deckungsmethode“, d. h. von der Methode des Axioms der Kongruenz, ein etwas reichlicher Gebrauch gemacht worden wäre (18). Wir wüssten jedoch aus dem Text des Proklos, dass man früher die empirische Methode des Aufeinanderpassens — also die Methode des fraglichen Axioms — auch in solchen Beweisen benutzte, die bei Euklid gar nicht mehr vorkommen. „Diese Methode muss also einmal in viel weiterem Umfang angewendet worden sein, als dies bei Euklid der Fall ist. Sie scheint auf den ersten Anfang der griechischen Mathematik zurückzugehen.“ Nur Euklid war bestrebt, diese Methode ihres empirischen Charakters so sehr als möglich zu entkleiden (19). — Man hat also in dem 7. euklidischen Axiom eine mathematische Grundlage, die ihrerseits eine solche Methode — die „Deckungsmethode“ — voraussetzt, deren Gebrauch Euklid möglichst vermeiden wollte. Das scheint allerdings für den alten Ursprung dieses Axioms zu sprechen, ebenso wie man auch die erwähnten Ungereimtheiten der Definitionen nur mit der Vermutung erklären konnte, dass diese zu Euklids Zeiten ein zum Teil schon veraltetes Überlieferungsgut darstellten.

Nun erwecken aber diese Beobachtungen den Verdacht, ob nicht auch die übrigen euklidischen Grundlagen ähnlicherweise aus alten Zeiten überliefert worden sind. Das würde allerdings sehr

au cours de ses démonstrations. Il semble bien qu'il s'agit là de pièces héritées, qu'Euclide n'a pas eu la force d'écarter.“

(17) *Eucl. Elem.*, I. Communes animi Conceptiones VII : τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἀλλήλα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν, „Quae inter se congruunt, aequalia sunt“.

(18) K. v. Fritz, *o.c.*, 76 f.

(19) *Ebd.*, S. 94.

wohl zu dem Bilde passen, das man sich heutzutage über Euklid macht. Man weiss nämlich heute schon, dass er im Grunde wohl kein grosser Mathematiker war. Er hat die wichtigsten und schwierigsten Teile seines Werkes von anderen Autoren, vor allem von Theaitetos („Elem.“ X und XIII) und von Eudoxos („Elem.“ V und XII) übernommen. Diese Teile stehen, ebenso wie die arithmetischen Bücher der „Elemente“ (VII und IX), auf einem sehr hohen mathematischen Niveau, während andere Teile ihnen weit unterlegen sind. Es kommen Denkfehler darin vor, und die Formulierung ist manchmal verwirrt. Das Niveau, auf dem sich Euklid bewegt, wird offenbar ganz von seinen Vorbildern bestimmt. Kann er sich nach einem vortrefflichen Autor, wie Theaitetos oder Eudoxos richten, so ist er selbst vortrefflich, wenn aber sein Vorbild nicht so hoch steht, sinkt auch er. Euklid ist vor allem Didaktiker und kein schöpferisches Genie (20). — Ist aber der Verfasser der „Elemente“ in seinem Werk selbst gewissermassen ein „wissenschaftlicher Kompilator“, so ist es von vornherein wahrscheinlich, dass er auch in der Zusammenstellung der Grundlagen seiner Wissenschaft ähnlich verfuhr. Er wird wohl auch diese in den meisten Fällen von seinen Vorgängern übernommen haben. Man wird also die Grundlagen der euklidischen „Elemente“ — einstweilen natürlich nur hypothetisch — als ein älteres, durch den Verfasser fertig übernommenes Gut ansehen dürfen. Es fragt sich nur : wie sich auch jene Quellen namhaft machen liessen, aus denen diese Grundlagen stammen ?

2. DER VORRANG DER ARITHMETIK

Es wird sich lohnen — ehe wir den historischen Ursprung von mindestens einigen euklidischen Grundlagen nachzuweisen versuchten — die Aufmerksamkeit auf einen interessanten Zug der griechischen Mathematik zu richten. Wie bekannt, ist nämlich die griechische Mathematik vorwiegend *geometrischen Charakters*. Euklids „Elemente“ sind eigentlich Elemente der Geometrie, in denen alles was nicht-geometrisch ist — darunter auch die ganze Arithmetik in den Büchern VII, VIII und IX — nur eine unter-

(20) B. L. van der Waerden, *Erwachende Wissenschaft*, Basel-Stuttgart 1956, 323.

geordnete Rolle spielt. Man weiss heute schon, dass diese Behandlungsweise mit einer zwar voreuklidischen aber doch nachträglichen Geometrisierung zusammenhängt (21), die wohl durch die Entdeckung des Irrationalen veranlasst wurde (22). (Man musste nämlich, um quadratische Gleichungen exakt lösen zu können, aus dem Bereiche der Zahlen in den der geometrischen Grössen hinübertreten. Jene „geometrische Algebra“, die bei Euklid in den Büchern II und VI der „Elemente“ vorliegt, gilt auch für irrationale Strecken und ist dennoch eine exakte Wissenschaft.) Nun besitzt man aber eindeutige Zeugnisse dafür, dass man die Geometrie in der älteren Zeit, *vor* dieser Geometrisierung der Mathematik, noch anders beurteilte. Der Pythagoreer Archytas schrieb z.B. um 400 v.u.Z. herum noch folgendes: „Die Logistik (= Arithmetik) hat, wie es scheint, in Bezug auf Wissenschaft vor den anderen Künsten einen recht beträchtlichen Vorrang; *besonders auch vor der Geometrie, da sie deutlicher als diese behandeln kann was sie will ... und wo die Geometrie wiederum versagt*, bringt die Logistik (= Arithmetik) Beweise zustande...“ (23). — Man hat dies Zitat in der bisherigen Forschung hauptsächlich nur dazu benutzt, um mit ihm jene grosse Wandlung greifbar zu machen, die bald nach Archytas (infolge der Entdeckung der Irrationalität und der damit zusammenhängenden Geometrisierung) in der wissenschaftlichen Betrachtung wohl eintreten musste (24). Aber es wurde dabei

(21) Vgl. dazu O. Neugebauer, „Zur geometrischen Algebra — Studien zur Geschichte der antiken Algebra III“ (in *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik*, etc., Abt. B, Bd. 3, Berlin 1936, 245-259) und B. L. van der Waerden, „Zenon und die Grundlagenkrise der griechischen Mathematik“, *Math. Ann.*, 117, 1940, 141-161.

(22) Vgl. dazu bei B. L. van der Waerden, *Erwachende Wissenschaft*, 204 ff. das Kapitel: „Wozu die geometrische Einkleidung?“

(23) H. Diels-W. Kranz, *Fragmente der Vorsokratiker*⁵, 47 (= *Vorsokratiker*^A, 35) Archytas, B. 4.

(24) O. Neugebauer, *o.c.*, S. 247: „Die Prägnanz dieses Ausspruchs ist umso interessanter, als er ja nur um wenige Jahre älter ist, als die Geometrisierung der griechischen Mathematik, die wir als ihre *klassische* Form anzusehen gewöhnt sind“ und B. L. van der Waerden, *Math. Ann.*, 117, 1940, S. 158: „Wenige Jahrzehnte später hat sich das Blatt bereits gewendet: Theaitetos entwickelt seine Klassifikation der irrationalen Strecken, und bei Plato ist das Verhältnis zwischen Logistik und Geometrie vollständig umgekehrt (?). Die bisherige Logistik ist als Wissenschaft verpönt, die geometrischen Schlüsse sind die wahren Vorbilder exakter Beweisführung. Bei Euklid ist die Algebra vollends aus dem Bereich der offiziellen Geometrie verbannt und darf nur in geometrischem Gewande, als Flächenrechnung oder *geometrische Algebra* ihr Dasein fristen.“ — Es muss

kaum gefragt: *warum eigentlich Archytas die Geometrie so sehr herunterschätzte?* Und doch ist diese Frage von entscheidender Wichtigkeit.

Denn wir besitzen ja auch andere Belege dafür, dass man in alter Zeit die Geometrie scheinbar kaum als eine mathematische Disziplin anerkennen wollte. Es heisst z.B. in der *Vita Pythagorica* des Jamblichos, dass das älteste Lehrbuch der Geometrie — die sog. „Geometrie des Pythagoras“ (ἡ γεωμετρία πρὸς Πυθαγόρου) —, auf Grund dessen man zum ersten Male geometrische Vorlesungen hielt (25), den Namen *ΙΣΤΟΡΙΑ* trug (26). Nun überlegt man sich aber, dass einerseits die Pythagoreer ihre wissenschaftliche Tätigkeit, und besonders ihre Lehre von den Zahlen mit dem stolzen Namen der *μαθήματα* bezeichneten (27), und dass andererseits das Wort *ιστορίη* nur ein empirisches, bloss durch Sehen gewonnenes Wissen bezeichnen kann (28), so lässt sich der eben erwähnte Bericht des Jamblichos gar nicht anders auslegen,

allerdings zu diesem letzteren Zitat noch bemerkt werden, dass es — an der Stelle, wo ich das Zeichen (?) einschaltete — nicht eindeutig genug ist. Denn in der Tat wird bei Platon eigentlich nur die *praktische* Logistik — wie übrigens auch die *praktische* Geometrie — verpönt. Sonst aber behielt die Arithmetik als theoretische Wissenschaft auch weiterhin ihren Vorrang der theoretischen Geometrie gegenüber. Wohl war dabei — wie man später sehen wird — dieser „Vorrang der Arithmetik“ nur noch ein *Prinzip*, das man nach der Entdeckung der Irrationalität kaum mehr verwirklichen konnte.

(25) Vgl. B. L. van der Waerden, *Erwachende Wissenschaft*, 191.

(26) Jamblichos, *Vita Pythagorica*, 89: ἐκαλεῖτο δὲ ἡ γεωμετρία πρὸς Πυθαγόρου *ιστορίη*. Zu der Erklärung der Stelle vgl. meinen Aufsatz „Deiknymi als mathematischer Terminus für *beweisen*“.

(27) B. L. van der Waerden, „Die Arithmetik der Pythagoreer I“, *Math. Ann.*, 120, 1947/49, 127: „Die Pythagoreer verstanden unter *μαθήματα* ein geordnetes System von Sätzen und Beweisen, und die grösste und erste von diesen Wissenschaften war ihnen die Lehre von den Zahlen (vgl. Platon, *Epinomis*, 990 C)“. — Nach dem ausdrücklichen Zeugnis des Aristoteles (*Metaphysik*, Buch A, Kapitel 5) waren es die Pythagoreer, die sich als erste mit *μαθήματα* befassten. Vgl. K. Reide-meister, *Das exakte Denken der Griechen*, Hamburg 1949, 52.

(28) B. Snell, *Die Ausdrücke für den Begriff des Wissens in der vorplatonischen Philosophie* (Philologische Untersuchungen, herausg. von A. Kiessling und U. v. Wilamowitz-Moellendorf, 29. Heft, Berlin 1924) 59-71. — Neben den Ausführungen von B. Snell muss ich an dieser Stelle mit besonderem Nachdruck auch noch auf die Arbeit von A. Frenkian, *Revue des Études Indo-européennes*, Bucarest-Paris 1938, 468-474 hinweisen. Frenkian betont mit Recht, dass *ιστορίη* = „*science empirique appuyée sur l'autopsie*“ und „*science empirique, résultat d'une recherche faite par exploration ou par la vue*“ ist; ausserdem bemerkt er noch: „*ce sens a persisté aussi longtemps qu'on a parlé et écrit le grec ancien.*“

als dass man zu jener Zeit, in der die Geometrie noch *ιστορίη* hiess, in ihr nur ein praktisches, erfahrungsmässiges Wissen und kein echtes *μάθημα* erblicken wollte. — Selbst der späte Kommentator der euklidischen „Elemente“, Proklos scheint noch davon zu wissen, dass man wohl erst verhältnismässig später die Geometrie als ein Teilgebiet der Mathematik anerkannte; und auch dann hat man ihr nur den zweiten Platz nach der Arithmetik zugewiesen. Man ersieht das z.B. aus den folgenden Worten des Proklos: „Dass nun die Geometrie ein Teil der ganzen Mathematik ist, und dass *sie den zweiten Platz nach der Arithmetik einnimmt*..., das wurde durch die Alten begründet, und es braucht hier nicht ausführlicher erörtert zu werden“ (29). Besonders lehrreich sind diese Worte darum, weil sie zeigen, dass man die Geometrie — mindestens theoretisch — selbst in jener Zeit noch als eine „zweit-rangige Wissenschaft“ ansah, in der die ganze griechische Mathematik schon längst geometrisiert war.

Ich will an dieser Stelle die Frage, warum man eigentlich das gegenseitige Verhältnis von Arithmetik und Geometrie in der antiken Wissenschaft so auffallend widerspruchsvoll beurteilte — man hat nämlich einerseits zu einer gut bestimmbarer Zeit die ganze griechische Mathematik geometrisiert, weil man die Vorteile dieser Behandlungsart erkannte, und in dieser „geometrisierten Mathematik“ konnte die Arithmetik selbstverständlich nur eine untergeordnete Rolle spielen, andererseits hielt man aber auch weiterhin an dem alten Gedanken zäh fest, dass dennoch die Arithmetik diejenige Wissenschaft sei, der der Vorrang der Geometrie gegenüber gebührte —, ich will also diese Frage einstweilen nicht eingehender erörtern. Statt dessen möchte ich hier eher darauf hinweisen, dass man im Sinne der obigen Beobachtungen bis zu einem gewissen Grade auch jenen Weg bestimmen kann, der in der Erforschung dessen, wie die Grundlagen der griechischen Mathematik entstanden, zu verfolgen ist. Galt in einer Zeit die Geometrie nur für ein praktisches, empirisches Wissen (*ιστορίη*), während man zu derselben Zeit die Arithmetik schon als *μάθημα* bezeichnete, so liegt auch die Vermutung nahe, dass man in dieser alten Zeit nur die Arithmetik als irgendwie „wohlfundiert“ ansah; man hatte damals jene Grundlagen vielleicht noch gar nicht gefunden,

(29) Proclus (ed. F) S. 48, 9 ff. — Man findet dieselbe Rangordnung — Arithmetik-Geometrie — auch bei Platon, *Epinomis*, 990 C D.

die später doch ermöglichten, dass auch die Geometrie mindestens als ein „Teilgebiet der Mathematik“ (30) erscheine. Mit anderen Worten heisst es auch so viel : will man die Entstehungsgeschichte der mathematischen Prinzipien in der griechischen Wissenschaft rekonstruieren, so muss man vor allem die Grundlagen der Arithmetik im VII. Buch der euklidischen „Elemente“, und erst danach die Grundlagen der Geometrie am Anfang des I. Buches prüfen, denn diese letzteren sind wohl verhältnismässig späteren Ursprungs. Anfangs galt nur die Arithmetik als *μάθημα*, und sie wurde erst später infolge der nachträglichen „Geometrisierung“ so verdrängt, dass sie in Euklids Zusammenstellung mit ihren Grundlagen zusammen nur von dem VII. Buch der „Elemente“ ab einen Platz fand.

Wir wollen also im nächsten Kapitel vorerst die Grundlagen der griechischen Arithmetik, d.h. die Definitionen am Anfang des VII. Buches der euklidischen „Elemente“ genauer ins Auge fassen.

3. — DIE EINHEIT UND DIE ZAHLEN

Die Prüfung der Definitionen der griechischen Arithmetik am Anfang des VII. Buches der „Elemente“ wird durch einen glücklichen Umstand sehr erleichtert. Wie bekannt, stellt nämlich die sog. Lehre vom Geraden und Ungeraden am Ende des IX. Buches (IX 21-36) für uns das älteste bekannte Beispiel eines deduktiven Lehrstücks der griechischen Mathematik dar, das wohl nur aus historischem Interesse in die „Elemente“ anhangsweise aufgenommen wurde. O. Becker, der diese Lehre im Jahre 1936 wiederentdeckte (31), setzte ihre Entstehungszeit auf die Mitte, oder gar in die erste Hälfte des 5. Jahrhunderts (32). Nun ist aber diese Lehre ohne die Definitionen 6-9 und 12 im VII. Buch der „Elemente“ gar nicht denkbar. Selbstverständlich muss man zuerst wissen, was eine „gerade“ und „ungerade“ Zahl heisst, um eine

(30) Bei Proclus (S. 48, 9 ff.) heisst es : *ἡ γεωμετρία τῆς ὅλης ἐστὶ μαθηματικῆς μέρος*.

(31) O. Becker, *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik etc.*, Abt. B, Bd. 3, 1936, 533-553.

(32) O. Becker, *Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung*, Freiburg-München 1954, 38.

solche Lehre aufbauen zu können. Dieselbe Zeitbestimmung, die für die ganze Lehre gilt, muss also auch für die genannten Definitionen gelten. Das hat wohl auch schon O. Becker richtig erkannt, ohne dass er diese Tatsache besonders hervorgehoben hätte (33). Man kann jedoch in dieser Beziehung mindestens einige Schritte auch noch über Beckers Feststellungen hinauskommen. Es gehören nämlich nicht allein die genannten Definitionen des VII. Buches (6-9 und 12) zu den Voraussetzungen der erwähnten Lehre. Denn man wird gerade und ungerade Zahlen kaum unterscheiden können, ohne sich gleichzeitig auch über die *Zahl* selbst Gedanken zu machen. Es gehört also auch die Definition der „Zahl“ (VII def. 2) zu den Voraussetzungen dieser Lehre. Nachdem aber diese Definition heisst: „Zahl ist die aus *Einheiten* zusammengesetzte Menge“ (34), wird man auch die Definition der „Einheit“ selbst (VII def. 1) als einen organischen Bestandteil der Lehre vom Geraden und Ungeraden ansehen müssen. In der Tat wird der Begriff der „Einheit“ auch in der Definition der „ungeraden Zahl“ (VII def. 7) und sehr oft in den Sätzen bzw. in den Beweisen dieser Lehre gebraucht. Ich vermute also, dass sowohl die Definition der „Einheit“ als auch diejenige der „Zahl“ organische Bestandteile der durch O. Becker wiederhergestellten alten Lehre sind; auch diese mussten schon zu jener Zeit vorhanden gewesen sein, als man das ursprüngliche Lehrstück aufbaute.

Wohl könnte man gegen diese Vermutung den Verdacht geltend machen, dass die euklidischen Definitionen der „Einheit“ und der „Zahl“ erst später, nachträglich, auf Grund solcher philosophischer Spekulationen erschafft worden wären, die man sich in jener alten Zeit, als die eigentliche Lehre des Geraden und Ungeraden entstand, noch überhaupt nicht gemacht hätte; denn in der Tat sind die meisten Sätze dieser Lehre sehr einfach, um nicht zu sagen trivial. Brauchte man in der Tat exakte Definitionen darüber, was „Einheit“ und „Zahl“ heisst, um solche Sätze zusammenstellen zu können, die auch ohne Beweis jedem Rechner sofort

(33) Allerdings schrieb er (*Grundlagen der Mathematik a.a.O.*): „Den Sätzen Elementa IX 21-34 sind die Definitionen 6-9, 12 aus dem VII. Buch voranzustellen.“

(34) Ἀριθμός ἐστὶν τὸ ἐκ μονάδων συγκεῖμενον πλῆθος. — Die Übersetzung der Euklid-Stellen sowohl hier wie auch im folgenden immer nach C. Thaer, *Die Elemente von Euklid*, Leipzig 1935 (Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften).

einleuchtend und selbstverständlich sein mussten? — Überlegt man sich diese Frage ernstlich, so wird man einsehen müssen, dass der scheinbare „Einwand“ nicht gegen, eher *für* die Vermutung spricht, dass auch die Definitionen der „Einheit“ und der „Zahl“ zu den historischen Voraussetzungen der genannten Lehre gehörten. Denn es wurde ja schon bemerkt, dass diese Lehre von Satz zu Satz peinlich exakt bewiesen wird, wie es nach unseren heutigen Kenntnissen auch sonst in der ganzen frühgriechischen Mathematik üblich war (35). Es lag also dem antiken Verfasser offenbar gar nicht so sehr an dem blossen Inhalt als eher an der Form dieser Lehre; es musste gezeigt werden, wie eben auch in solchen einfachen Fällen der Beweis lückenlos geführt wird. Lückenlos ist jedoch die Lehre vom Geraden und Ungeraden nur dann, wenn man auch die Definitionen der „Einheit“ und der „Zahl“ zu ihr rechnet. — Aber es lässt sich auch mit anderen Mitteln zeigen, dass diese beiden Definitionen wirklich sehr alt sein müssen.

Die erste Definition des VII. Buches der „Elemente“ heisst : „Einheit ist das, wonach jedes Ding eines genannt wird“ (36). Die Formulierung ist so bündig, dass man auf den ersten Blick kaum denken würde, was alles dahinter steckt. Nachdem jedoch Platon einmal von der sog. „Lehre von der Eins“ spricht (37), wird man versuchen, mindestens einiges von dieser alten „Lehre“ wiederherzustellen und näher ins Auge zu fassen. Platon selber lässt einmal in seinem „Staat“ folgendes sagen : (38)

„Du weisst doch, dass die Mathematiker lachen würden, wenn man versuchte die Einheit zu zerlegen, und sie liessen es nicht gelten. Wolltest du nämlich die Einheit zerlegen, so würden sie dieselbe statt dessen vervielfältigen. Denn sie wollten es ja vermeiden, dass die Einheit jemals etwas anderes als sie selbst, das heisst also, dass sie als eine Vielheit erscheine. Wenn sie dann jemand fragte : Ihr Wunderlichen, von was für Zahlen sprecht ihr eigentlich? Wo ist denn die Einheit, wie ihr sie definiert (39),

(35) Vgl. B. L. van der Waerden, *Math. Ann.*, 120, 1947/49, 139.

(36) *Eucl. Elem.*, VII, def. 1 : Μονάς ἐστίν, καθ' ἣν ἕκαστον τῶν ὄντων ἐν λέγεται.

(37) Platon, *Resp.*, VII, 525 : ἡ περὶ τὸ ἐν μάθησις.

(38) Platon, *Resp.*, VII, 525 D-526 A.

(39) Platon, *Resp.*, VII, 526 : *Ω θαυμάσιοι, περὶ ποίων ἀριθμῶν διαλέγεσθε, ἐν οἷς τὸ ἐν οἷον ὑμεῖς ἀξιούτέ ἐστιν. — Das vorletzte Wort des Zitates wird gewöhnlich „wie ihr fordert“ übersetzt. Ich zweifle jedoch nicht daran, dass man an dieser Stelle richtig mit dem Zeitwort „definieren“ übersetzen wird. Es ist ja

nämlich etwas in sich völlig Gleiches, Unterschiedsloses, keine Teile enthaltendes? — was würden sie darauf wohl antworten? — Ich glaube, sie würden sagen, dass sie lediglich von gedachten Zahlen sprechen, die man nur erschliessen und nicht auch sinnlich wahrnehmen kann.“

Die Einheit ist also im Sinne dieses Zitates unteilbar. Wohl kann man im praktischen Leben jede Einheit zerlegen, und selbstverständlich rechneten die griechischen Händler und Ingenieure seit undenklichen Zeiten auch mit Brüchen, aber nicht so war es in dieser alten Wissenschaft. Brüche kamen in der offiziellen griechischen Arithmetik vor Archimedes überhaupt nicht vor. Wie das Platon-Zitat besagt: statt des Zerlegens der Einheit vervielfältigten die Arithmetiker dieselbe. Theon von Smyrna erklärt auch genauer, wie man diese Worte zu verstehen hat: „Wenn die Einheit im Gebiet der sichtbaren Dinge geteilt wird, wird sie wohl als Körper verkleinert und in Teile zerlegt, die kleiner als der Körper selbst sind, aber der Zahl nach wird sie vergrössert, denn an die Stelle der Eins treten viele Dinge.“ (40) Diese Worte beleuchten nicht nur den Sinn der ersten Sätze von unserem Platon-Zitat, sondern — was diesmal viel wichtiger ist — gleichzeitig auch den Sinn der euklidischen Definition: „Einheit ist das, wonach jedes Ding eines genannt wird“. Und diese Tatsache ist schon in sich allein ein sehr wichtiger Stützpunkt auch für die Datierung der euklidischen Definition. Sie muss unbedingt *vorplatonisch* sein, wenn schon Platon in demselben Sinne über die Einheit sprechen konnte, wie diese Definition. — Dieselbe provisorische Datierung wird auch durch die folgende Beobachtung erhärtet. B. L. van der Waerden konnte feststellen, dass das VII. Buch der euklidischen „Elemente“ aller Wahrscheinlichkeit nach noch aus der Zeit vor 400 stammt (41). Nun sind aber die mathematischen Probleme, die in diesem Buch behandelt werden, eigentlich alle durch jenes Bestreben hervorgerufen worden, dass

klar, dass an der angeführten Platon-Stelle gerade von der Definition der Einheit die Rede ist. Zu der Frage der Terminologie vgl. man einstweilen meine Arbeit, „Die Grundlagen in der frühgriechischen Mathematik“ (Studi italiani di Filologia Classica 1958).

(40) S. 18, Hiller; zitiert nach B. L. van der Waerden, *Erwachende Wissenschaft*, 189.

(41) B. L. van der Waerden, „Die Arithmetik der Pythagoreer I“, *Math. Ann.*, 120, 1947/49, 127-153.

man die Brüche aus der Zahlenlehre verbannen wollte, und der Grund dafür war eben die theoretische *Unteilbarkeit der Einheit* (42). Die euklidische Definition der Einheit war also schon in jener alten Zeit, im 5. Jahrhundert v.u.Z. wirksam. Dass sie noch älter, ja dass sie überhaupt auf den allerersten Anfang der deduktiven Mathematik zu datieren ist, wird sich im folgenden ergeben.

Es ist nämlich sehr lehrreich, wie das vorige Platon-Zitat die Auffassung begründet, warum eigentlich die Einheit in der Arithmetik als unteilbar gilt. Die Mathematiker wollen — wie Platon sagt — vermeiden, dass die Eins jemals etwas anderes als sie selbst, das heisst also, dass sie als eine Vielheit erscheine (*εὐλαβούμενοι μή ποτε φανῇ τὸ ἓν μὴ ἓν ἀλλὰ πολλὰ μέρη*). Wäre die Eins der Mathematiker teilbar, so wäre sie auch gar keine Eins mehr, sondern etwas, was mehrere Teile in sich enthält, also eine Vielheit, und somit wäre der Begriff „Einheit“ nicht nur sie selbst, sondern gleichzeitig auch ihr eigenes Gegenteil. Man kam also auf dem Wege zu dem Gedanken von der Unteilbarkeit der Eins, dass man den anderen Gedanken, „die Einheit ist teilbar“, als eine sich selbst widersprechende Behauptung ablehnte; dieser letztere Gedanke widerspricht sich selbst, darum kann er auch unmöglich wahr sein, das Gegenteil dieser Behauptung („die Einheit ist unteilbar“) muss als Wahrheit gelten.

Die eben angedeutete Interpretation der Platon-Stelle legt also die folgenden Schlüsse nahe :

1. Man ersieht daraus, was eigentlich hinter der euklidischen Definition der „Einheit“ steckt. Denn man würde auf den ersten Anblick diese Definition — „Einheit ist das, wonach jedes Ding eines genannt wird“ — als eine beinahe leere, nichtssagende und bloss beschreibende Aussage auffassen. Nun ist es aber gar nicht so! In diesen Worten steckt verhüllt auch die theoretische Begründung dessen, warum die frühgriechische Arithmetik die Brüche aus der Wissenschaft verbannen musste. Die scheinbar nichtssagende Beschreibung dessen, was die Einheit ist, stellt eigentlich den wohlüberlegten Schluss einer ziemlich langen Gedankenkette dar, denn in dieser Aussage wird auch die Wahl zwischen den beiden Gedanken — *ob die Eins teilbar oder ob die Eins unteilbar wäre* — stillschweigend getroffen.

(42) B. L. van der Waerden, *Erwachende Wissenschaft*, 188 f.

2. Es ist aus der Platon-Stelle auch noch zu ersehen, auf welchem Wege man eigentlich zu dem Gedanken von der Unteilbarkeit der Eins, und das heisst diesmal : auf welchem Wege man zu der euklidischen Definition der „Einheit“ kam. Man entdeckte die innere *Widersprüchlichkeit* der Behauptung „die Eins ist teilbar“, und diese Entdeckung war das Zeichen dafür, dass das Gegenteil derselben Behauptung („die Eins ist unteilbar“) wahr sein muss. — Lehrreich ist dieser Entstehungsweg der behandelten Definition darum, weil ich schon nachgewiesen zu haben glaube, dass der übliche Beweisvorgang in der frühgriechischen Mathematik sehr oft derselbe war (43). Auch der sog. indirekte Beweis der Pythagoreer verläuft immer so, dass man im Laufe einer Gedankenkette auf die Widersprüchlichkeit irgendeiner Behauptung hinweist, die infolgedessen nicht wahr sein kann, und eben darum das Gegenteil derselben Behauptung — das heisst also der widerspruchsfreie Gedanke — wahr sein muss. Man sieht also, dass derselbe Weg, dieselbe Methode, wie in der Beweisführung der mathematischen Sätze, auch in der Aufstellung der Definition befolgt wurde. Die euklidische Definition der „Einheit“ stellt eigentlich den wohlüberlegten Schluss einer indirekten Beweisführung dar. Diese Tatsache lässt jedoch jene Vermutung, die gelegentlich ausgesprochen wurde, dass nämlich in der griechischen Mathematik die Entwicklung strenger Schlussmethoden *früher* begonnen hätte, als die axiomatische Grundlegung selbst (44), sehr unwahrscheinlich vorkommen. Unser Beispiel legt eher den anderen Gedanken nahe, dass nämlich das Auftreten der deduktiven Beweistechnik und der erste Versuch einer definitorischen Grundlegung der Mathematik irgendwie auch historisch zu gleicher Zeit erfolgt sein müssen.

Noch weitere Schlüsse erlaubt die genauere Prüfung dessen, wie die „Einheit“ der Arithmetiker in dem vorigen Platon-Zitat geschildert wird. Es heisst nämlich in diesem Zitat, dass die Eins „unteilbar“ und „nur im Gedanken existierend“ sei, da sie etwas „in sich völlig Gleiches, Unterschiedsloses und keine Teile Ent-

(43) Á. Szabó, „Wie ist die Mathematik zu einer deduktiven Wissenschaft geworden?“ (*Acta Antiqua Acad. Scient. Hung.*, IV., Budapest 1956, 109-152) und „Deiknymi als mathematischer Terminus für *beweisen*“ (Maia, *Rivista di letteratura classica*, X, 1958).

(44) K. v. Fritz, *a.a.O.*, 90 f.

haltendes“ wäre. Überlegt man sich das alles, und liest man dazu noch besonders die letzten Worte auf griechisch (*ἴσον τε ἕκαστον πᾶν παντὶ καὶ οὐδὲ σμικρὸν διαφέρον, μῶριον τε ἔχον ἐν ἑαυτῷ οὐδέν*), so wird man unumgänglich an Parmenides denken müssen. Auch das „Seiende“ der Eleaten wird ja mit haargenau denselben Zügen charakterisiert. Ich zitiere nur aufs Geratewohl aus dem Lehrgedicht des Parmenides das folgende: „Auch teilbar ist es nicht (nämlich das *Seiende*), weil es ganz gleichartig ist. Und es gibt nirgend etwa ein stärkeres Sein, das seinen Zusammenhang hindern könnte, noch ein geringeres; es ist vielmehr ganz von Seiendem erfüllt. Darum ist es ganz zusammenhängend, denn Seiendes stösst dicht an Seiendes.“ (45) — Es ist auch kein Zufall, dass in der Terminologie der Eleaten *das Seiende* (τὸ ὄν) und *die Eins* (τὸ ἓν) sehr oft untereinander vertauschbare Begriffe waren.

Man hat also den Eindruck, als ob die euklidische Definition der „Einheit“ (El. VII def. 1) eigentlich nur eine bündige Zusammenfassung der eleatischen Lehre von dem „Seienden“ darstellte. Man kam auch zu dieser Definition auf demselben Wege — durch die Anwendung eines indirekten Schlusses —, wie Parmenides zu seiner Lehre von dem „Seienden“ gelangte (46). Das wäre also auch jene „Lehre von der Eins“ (ἡ περὶ τὸ ἐν μάθησις), die gelegentlich auch Platon erwähnt (47).

Die Vermutung, dass die allererste Definition der arithmetischen Bücher von Euklid im Grunde die parmenideische Lehre wiederholt, darf eigentlich gar nicht mehr wundernehmen, nachdem man schon weiss, dass auch die sog. indirekte Beweisführung der pythagoreischen Arithmetik, das allerwichtigste Werkzeug der frühgriechischen deduktiven Mathematik, aus der Philosophie der Eleaten übernommen wurde. Ich glaube auch nachgewiesen zu haben, dass es keineswegs umgekehrt geschehen konnte: nicht die Mathematiker haben die Methode der indirekten Beweisführung in ihrer eigenen Praxis entwickelt und diese später den Philosophen von Elea sozusagen zur Verfügung gestellt, sondern diese

(45) H. Diels-W. Kranz, *Fragmente der Vorsokratiker*⁵, I, 28 Parmenides, B fr. 8, 22 ff.

(46) Auch Parmenides bewies ja seine These (die Existenz des Seienden) bloss durch die Widerlegung ihres Gegenteils. Vgl. O. Gigon, *Der Ursprung der griechischen Philosophie*, Basel 1945, 250.

(47) Platon, *Resp.*, VII, 525.

Methode musste ursprünglich eben in der Philosophie der Eleaten zu Hause sein und von dorthier wurde sie durch die ersten Vertreter der deduktiven Mathematik übernommen (48). Es schien also auch bisher schon so gut wie gesichert zu sein, dass sich die älteste deduktive Mathematik der Griechen auf die Philosophie der Eleaten baut. Nun bestätigt sich jetzt dieselbe Erkenntnis erneut auch von einer anderen Seite her. Es scheint, dass auch der erste Versuch der definitorischen Grundlegung der Arithmetik einer Anregung seitens der Philosophie der Eleaten her zu verdanken sei. Darum wiederholt die Definition der arithmetischen „Einheit“ die Lehre des Parmenides von dem „Seienden“ ($\tau\acute{o} \acute{o}\nu$), das eins, unteilbar und nur auf gedanklichem Wege zugänglich ist.

*
* *

Die Prüfung der euklidischen Definition der „Einheit“ führt also in die unmittelbare Nähe der eleatischen Philosophie. Nachdem man jedoch weiss, dass nicht allein die eben behandelte Definition — die in der Überlieferung auf Pythagoras selbst zurückgeführt wird (49) — sozusagen eine Wiederholung der eleatischen Lehre darstellt, sondern dass es sich auch sonst noch manche Züge der frühgriechischen Mathematik namhaft machen liessen, die einen eleatischen Einfluss zu verraten scheinen (50), könnte man sehr leicht auf den Gedanken verfallen, dass die älteste deduktive Mathematik der Griechen im Grunde auch gar nichts anderes als eine Weiterbildung der eleatischen Lehre sei. — In der Tat hoffe ich im folgenden zeigen zu können, dass diese Vermutung zutreffend ist. Bevor ich jedoch diese Ansicht näher begründe, muss ich einen ziemlich verbreiteten Irrtum der früheren Forschung berichtigen.

(48) Vgl. dazu meine in Anm. 43 genannten Arbeiten, besonders den Aufsatz „Deiknymi, als mathematischer Terminus für *beweisen*“.

(49) Vgl. *Sext. Emp. adv. math.*, X, 260-261 : $\acute{o}$ Πυθαγόρας ἀρχὴν ἔφησεν εἶναι τῶν ὄντων τὴν μονάδα, ἧς κατὰ μετοχὴν ἕκαστον τῶν ὄντων ἐν λέγεται. Der letzte Teil des Zitates ist beinahe eine wörtliche Wiederholung der euklidischen Definition der „Einheit“.

(50) Man könnte sich ausser der häufig angewendeten indirekten Beweisführung besonders noch auf die antiempirische und anschauungswidrige Tendenz der griechischen Mathematik berufen. Vgl. dazu meinen Aufsatz „Deiknymi als mathematischer Terminus für *beweisen*“.

In der wissenschaftlichen Literatur wird das gegenseitige Verhältnis von Eleaten und Pythagoreern häufig nicht in dem ange deuteten sondern in einem etwas anderen Sinne erklärt. Man wollte nämlich in der pythagoreischen Arithmetik nicht eine Weiterbildung der eleatischen Philosophie erblicken, sondern statt dessen konstruierte man eine „Gegnerschaft“ zwischen Eleaten und Pythagoreern. Diese Auffassung, die im Grunde noch auf P. Tannery zurückgeht (51), vertritt meistens die folgenden Gedanken :

1. Die Lehre des Parmenides sollte zwar aus der Prüfung pythagoreischer Ansichten hervorgegangen sein(?), aber sich dennoch gegen die *pluralistische Auffassung* der Pythagoreer richten.

2. Die Pythagoreer, die an der Annahme der Vielheit festhielten, wären die schärfsten und gefährlichsten Gegner der Parmenideischen Lehre gewesen.

3. Die Argumente des Eleaten Zenon, des Schülers von Parmenides, hätten sich gegen die Pythagoreer, genauer : gegen die Annahme der Vielheit gerichtet; sie widerlegten die Möglichkeit der Bewegung unter jeder pluralistischen Annahme.

Von diesen Gedanken fand besonders der letzte in der früheren Forschung auch namhafte Anhänger (52). Heutzutage scheint man die ganze Konstruktion, die sich kaum mit ernsthaften Argumenten und Belegen unterstützen lässt, schon etwas skeptischer zu beurteilen (53). Aber es wird sich dennoch lohnen, mindestens den

(51) „Pour l'histoire de la science hellène, Paris 1887“ 249-250 : Parménide avait écrit son poème dans un milieu où, comme penseurs, les pythagoriens seuls étaient en honneur; il avait reproduit plus ou moins exactement leur enseignement exotérique ... mais en tout cas, il avait nié la vérité de leur thèse dualiste. — p. 250 : les attaques contre son poème durent donc venir surtout de pythagoriens, et c'est eux que Zénon prit à partie. — p. 248-249 : Zénon n'a nullement nié le mouvement ... il a seulement affirmé son incompatibilité avec la croyance à la pluralité.

(52) Vgl. dazu die Literaturangaben bei C. Thaer, „Antike Mathematik 1906-1930“, in *Bursians Jahresberichte über die Fortschritte der klass. Altertumswissenschaft*, 1943, Bd. 283 S., 44 ff., besonders die Arbeiten von F. Cajori (*Isis*, 3, 1920-1921, 7-20), R. Mondolfo (*Riv. Fil.*, 5, 1927, 433-452) und Ph. B. E. Jourdain (*Mind.*, 25, 1916, 42-55 und 28, 1919, 123-124). — Gegen diese Auffassung der Zenonschen Argumente jedoch : B. L. van der Waerden, *Math. Ann.*, 117, 1940, 143 f.

(53) G. Vlastos zitiert z.B. in der Besprechung des Buches von J. E. Raven (*Pythagoreans and Eleatics. An account of the interaction between the two opposed schools during the fifth and early fourth centuries B.C.*, Cambridge 1948), *Gnomon* 1953, 31, die Feststellung von W. A. Heidel (*The Pythagoreans and Greek Mathe-*

Grundgedanken dieser Konzeption einer genaueren Prüfung zu unterziehen. Es fragt sich nämlich, in welchem Sinne man überhaupt von einer „Gegnerschaft“ zwischen Eleaten und Pythagoreern (= Arithmetikern) reden kann?

Wie bekannt, wollten die Eleaten nur die Existenz des „Seienden“, der Eins zulassen, und sie leugneten, dass es eine *Vielheit* gäbe, denn sie meinten den Selbstwiderspruch des Gedankens auch im Begriffe der Vielheit nachweisen zu können (54). Nun leugnet man aber die Vielheit, so ist eine Arithmetik überhaupt nicht möglich. Wohl konnten also die Arithmetiker den Begriff der „Einheit“ von den Eleaten übernehmen, aber in der Ablehnung der Vielheit konnten sie ihnen nicht mehr folgen; sie mussten irgendwie auch an der Vielheit festhalten, denn ohne Vielheit gibt es ja gar keine Arithmetik. In der Tat rettet die zweite Definition der Arithmetik bei Euklid (El. VII def. 2) eben den Begriff der Vielheit dadurch, dass sie besagt: „Zahl (*ἀριθμός*) ist die aus *Einheiten* zusammengesetzte Menge“.

Nun sieht man, dass ein Unterschied zwischen Eleaten und Arithmetikern in der Behandlung der „Vielheit“ allerdings zu bestehen scheint. Aber es wäre dennoch verkehrt, von ihrer „Gegnerschaft“ zu sprechen; denn die Arithmetiker haben ja die eleatische Lehre von der „Eins“ gar nicht bestritten, sie haben sie nur weitergebildet, wie Platon sagt: „sie vervielfältigten die Einheit“ (55). Und dass diese „Vervielfältigung der Eins“ in der Tat nur eine Weiterbildung der eleatischen Lehre war, das ersieht man besonders aus den folgenden Tatsachen.

1. Die Arithmetiker behandelten die „Zahlen“ genau so, wie die Eleaten ihr „Seiendes“. Nach einer Platon-Stelle duldet die Arithmetik ganz und gar nicht, dass man ihr Zahlen mit sichtbarem und tastbarem Körper zugrunde lege (56); die Zahlen wären bloss gedankliche Elemente, denen man anders als auf dem Wege

matics, AJPh, 61, 1940, 21): „there is not, so far as I know, a single hint in our sources that the Greeks were aware of the purpose of Zeno to criticize the fundamental doctrines of the Pythagoreans.“

(54) Statt die Belege im einzelnen anzuführen, verweise ich diesmal nur auf W. Capelle, *Die Vorsokratiker*, Leipzig 1935, 173 ff.: „Zenons Beweise gegen die Annahme der Vielheit der Dinge“.

(55) Platon, *Resp.*, VII, 525 E.

(56) *Ebd.*, 525 D: οὐδαμῇ ἀποδεχόμενον εἰάν τις αὐτῇ ὁρατὰ ἢ ἀπὰ σώματα ἔχοντας ἀριθμοὺς προτεινόμενος διαλέγεται.

des reinen Denkens auch gar nicht näher kommen könnte (57). Ebenso warnte auch schon Parmenides seine Jünger, das „Seiende“ anders als auf dem Wege des blossen Denkens, also etwa mit den Mitteln des Sehens, Hörens oder im allgemeinen des sinnlichen Wahrnehmens erfassen zu wollen: „Lass dich nicht durch die vielerfahrene Gewohnheit auf diesen Weg zwingen: deinen Blick den ziellosen, dein Gehör das brausende, oder deine Zunge walten zu lassen. Nein, *mit dem Verstande* bringe die vielumstrittene Prüfung, die ich dir riet, zur Entscheidung.“ (58) — Nachdem jedoch die „Zahlen“, ebenso wie auch das „Seiende“ der Eleaten, als bloss *gedankliche Elemente* aufgefasst wurden, war diese neue Art von „Vielheit“ auch gar nicht mehr so leicht zu bestreiten. Wohl konnte mit den Methoden der Eleaten die „Vielheit der Dinge“ geleugnet werden, man konnte den Selbstwiderspruch des Denkens in der *praktischen Vielheit* nachweisen, aber mit dem Begriff der „Zahl“, mit der bloss gedanklichen Vervielfältigung der abstrakten „Eins“ verhielt es sich nicht mehr so einfach.

2. Man bekommt ein noch wichtigeres Argument dafür, dass die euklidische Definition der „Zahl“ in der Tat nur eine Weiterbildung der eleatischen Lehre von der „Eins“ (dem „Seienden“) ist, wenn man die Frage stellt: warum eigentlich die Arithmetiker die Eins der Eleaten vervielfältigten? — Platon sagt ausdrücklich, dass sie auf diesem Wege eben die „Teilbarkeit der Einheit“ umgehen wollten (59). Die pythagoreische Arithmetik umwandelte wirklich die Brüche in *Zahlenverhältnisse*, d.h. man führte ein mathematisches Äquivalent für den Begriff „Bruch“ ein (60). Der neue Begriff von „Zahl“, der durch die Definition (El. VII, def. 2) geschaffen wurde, ermöglichte also, dass man an dem eleatischen Unteilbarkeitsdogma auch weiterhin festhalte.

Man darf dabei selbstverständlich mit Recht von einem „neuen Begriff der Zahl“ sprechen, denn jener, der in der Definition gegeben wird, ist keineswegs der naive, alte und traditionelle Zahl-Begriff. Nicht nur darin unterscheidet sich die pythagoreische „Zahl“ von der gewöhnlichen, dass sie die Brüche beiseite

(57) *Ebd.* 526: ὣν διανοηθῆναι μόνον ἐγχαρεῖ, ἄλλως δ' οὐδαμῶς μεταχειρίζεσθαι δυνατόν.

(58) Fr. 1, 34 ff. (Diels).

(59) Platon, *Resp.*, VII, 525 D-E. Vgl. Anm. 38. Das Zitat auch oben im Text.

(60) B.L. van der Waerden, *Erwachende Wissenschaft*, 189.

schiebt — wenn die Zahl aus Einheiten zusammengesetzte Menge ist, dann sind die Brüche gar keine Zahlen. Vielleicht noch interessanter ist es, dass selbst die Einheit aus dem Bereiche der Zahlen herausgehoben wurde. Man beginnt das Zählen selbstverständlich mit der *Eins*, und nach alltäglicher Auffassung ist auch die Eins eine Zahl, ja die allererste überhaupt. Das liess sich jedoch im Sinne der eleatisch-pythagoreischen Denkweise nicht rechtfertigen. Denn die Zahlen waren als „aus Einheiten zusammengesetzte Mengen“ immer auf Einheiten zerlegbar, während ihre letzten Bestandteile, die Einheiten, als unzerlegbar galten. Man musste also mit Rücksicht darauf die „Einheit“ selbst aus der Reihe der Zahlen ausschliessen. Das führte zu solchen umständlichen Formulierungen, wie : „Wenn a eine Zahl oder die Eins ist...“ (61). — Es ist auch interessant zu beobachten, wie schwer es den ersten griechischen Mathematikern, den Pythagoreern fiel, die „Eins“ konsequent *nicht* als eine Zahl zu behandeln. Um nur ein Beispiel dafür zu nennen, erinnere ich an zwei Sätze aus dem VII. Buch der euklidischen „Elemente“, dessen pythagoreischer Ursprung aus dem 5. Jahrhundert v.u.Z. durch B. L. van der Waerden nachgewiesen wurde (62). Der eine von diesen Sätzen (VII 9) heisst in Thaers Übersetzung :

„Wenn eine Zahl von einer Zahl ein Teil ist, und eine weitere Zahl von einer weiteren derselbe Teil, dann muss, vertauscht, derselbe Teil oder dieselbe Menge von Teilen, wie die erste Zahl von der dritten, auch die zweite von der vierten sein.“

Der Satz besagt also, dass wenn $a : b = c : d$, dann auch $a : c = b : d$. Nun musste aber dieser Satz auch für den Fall $a = 1$ aufgestellt werden, weil die Einheit nicht als Zahl galt. Darum heisst der Satz *El. VII 15*:

„Wenn die Einheit irgendeine Zahl misst und eine *weitere Zahl* irgendeine andere Zahl gleichoft misst, dann muss auch vertauscht die Einheit die *dritte Zahl* gleichoft messen, wie die zweite die *vierte*.“

Kein Zweifel, dass dieser Satz dem vorigen gleichwertig ist, und dass er nur deswegen auch selbständig formuliert und für sich bewiesen wurde, weil nach der griechischen Arithmetik die Einheit keine Zahl ist. Man achte aber auf die ungeschickten

(61) B.L. van der Waerden, *ebd.*, 180, Anm. 1.

(62) *Math. Ann.*, 120, 1947/49, 127 ff.

Ausdrücke in der Formulierung : „weitere Zahl“, „dritte Zahl“, „vierte Zahl“. Ist die Einheit wirklich „keine Zahl“, so gibt es in der Formel $1 : b = c : d$ überhaupt nur drei Zahlen : b , c und d , und es hat gar keinen Sinn von einer „vierten Zahl“ zu sprechen. Der Verfasser des Satzes *El. VIII 15* hat sich also durch seine ungeschickten Ausdrücke verraten : obwohl er den Satz nur deswegen aufstellen musste, weil die Einheit seiner Meinung nach „keine Zahl“ ist, so konnte er sich von der alltäglichen Auffassung doch nicht völlig befreien und er sprach in dem Satz selbst über die Einheit, als ob auch diese eine Zahl wäre.

*
* * *

Zusammenfassend darf man also behaupten, dass die beiden ersten Definitionen der arithmetischen Bücher von Euklids „Elementen“, die Definition der „Eins“ und diejenige der „Zahl“, deutlich den eleatischen Einfluss zu verraten scheinen. Der ausschlaggebende Faktor war bei der Abfassung dieser Aussagen (VII def. 1 und 2) : das Problem der Teilbarkeit, bzw. das Unteilbarkeitsdogma der Eleaten. — Dieselbe Schlussfolgerung wird durch die Überlegungen im nächsten Kapitel nur noch weiter erhärtet.

4. — DIE TEILBARKEIT DER ZAHLEN

Man konnte an der eleatischen Lehre von der Unteilbarkeit der Eins nur deswegen festhalten, weil man die Einheit zu Zahlen vervielfältigte. Es liess sich auf diesem Wege in der Tat ein mathematisches Äquivalent für die „Brüche“ in der Form von *Zahlenverhältnissen* einführen. Aber dadurch wurde das Problem, das man widerspruchsfrei lösen wollte, noch lange nicht vollständig erledigt. Man konnte zwar die Eins jetzt schon für unteilbar halten, aber eben infolge der „Vervielfältigung der Eins“ bekam das alte Problem des Teilens einen neuen Sinn. Denn man sagte, dass die Zahl „aus Einheiten zusammengesetzte Menge“ sei, und im Sinne dieser Aussage musste die Zahl auch *zerlegbar* sein; alles was zusammengesetzt ist, lässt sich auch zerlegen. Man sieht also, dass die Arithmetiker sich — eben infolge der Vervielfältigung der

Eins — vor ein neues Problem gestellt sehen mussten. Wohl konnte man nämlich die „Teilbarkeit“, solange es sich bloss um die praktische Vielheit der Dinge handelte, mit dieser Vielheit zusammen, leugnen; die Eleaten vermochten den Selbstwiderspruch des Gedankens in dieser Art „Teilbarkeit“ — trotz aller praktischer Erfahrung — glänzend nachzuweisen, und eben darum galt ihr „Seiendes“ als eins und unteilbar. Es gab für sie gar keine Vielheit und gar keine Teilbarkeit. Aber völlig anders wurde die Lage, als man die eleatische Eins, die nur im Gedanken existierte, ebenso im Gedanken vervielfältigte, und auf diese Weise einen neuen abstrakten Zahl-Begriff schuf. Jetzt musste man auch das Problem der Teilbarkeit erneut einer ernstlichen Prüfung unterziehen. — Man wird in der Tat sehen, dass das zentrale und grundlegende Problem der ältesten griechischen Arithmetik eben in dieser Prüfung bestand.

Auch die bisherige Forschung hat die Tatsache, dass die Teilbarkeit ein wichtiges Problem der pythagoreischen Arithmetik war, bis zu einem gewissen Grade schon erkannt. B. L. van der Waerden vermutete z.B., dass der Anlass zur Aufstellung jener alten, pythagoreischen Zahlentheorie, die im VII. Buch der euklidischen „Elemente“ entwickelt wird, wahrscheinlich in der *Bruchrechnung* lag. Nur es musste im Zusammenhang mit dieser Vermutung noch betont werden, dass das Augenmerk im VII. Buch der „Elemente“ nicht so sehr auf die Teilbarkeitseigenschaften der Zahlen, als vielmehr auf die Lehre von den Zahlenverhältnissen bzw. auf die Reduktion eines Zahlenverhältnisses auf kleinste Grössen gerichtet sei (63). Offenbar entstammt also dieses Stück der alten Zahlenlehre noch aus der Zeit, in der das wichtigste Problem „die Unteilbarkeit der Eins“ war; zunächst musste für die Bruchrechnung ein mathematisches Äquivalent in den Zahlenverhältnissen gefunden werden. Darum verschob sich das Interesse in dieser Richtung, anstatt die Teilbarkeitseigenschaften der Zahlen in den Vordergrund zu stellen. Dass aber zu gleicher Zeit auch das Problem der Teilbarkeit der Zahlen eine höchstwichtige Frage war, das ersieht man aus einer Reihe wichtiger Definitionen am Anfang des VII. Buches der „Elemente“. Ja man ist in der glücklichen Lage bis zu einem gewissen Grade auch die Genesis dieser Definitionen beleuchten zu können.

(63) *Erwachende Wissenschaft*, 188.

Das älteste deduktive Lehrstück der Griechen, die sog. Lehre vom Geraden und Ungeraden ist eben aus dem Problem des Teilens, bzw. aus demjenigen des Zu-Zwei-Teilens hervorgegangen (64). Die einfachste Art des Teilens ist natürlich das Zu-Zwei-Teilen, das *Halbieren*. Das griechische Wort, womit man in der Arithmetik das „Halbieren“ bezeichnet, *διαρᾶν*, war in der älteren philosophischen Terminologie der Eleaten noch im allgemeinen für den Begriff des „Zerlegens“, „Teilens“ überhaupt benutzt; οὐδὲ διαρετόν ἐστιν, „auch teilbar (zerlegbar) ist es nicht“ (nämlich das *Seiende*) — hiess es im Lehrgedicht des Parmenides (65). Kein Zweifel, dass die ältere Bedeutung des Wortes *διαρᾶν* einfach nur „zerlegen, teilen“ hiess; in dieser Bedeutung war es noch bei Parmenides benutzt. Erst *später* konnte sich aus dieser allgemeinen Bedeutung des Wortes der spezifische arithmetische Sinn („halbieren“) entwickeln (66). Auch die Wortgeschichte zeugt also eindeutig dafür, dass sich das Problem der Teilbarkeit, das bei den Eleaten im allgemeinen nur die Teilbarkeit (bzw. Unteilbarkeit) des Seienden, der Eins war, erst später zu der „Halbierbarkeit der Zahlen“ differenzierte. — In der pythagoreischen Lehre vom Geraden und Ungeraden wurden die Zahlen — wie die beiden Definitionen (VII def. 6 und 7) zeigen — dichotomisch als „halbierbare“ d.h. „gerade“ und als „nicht-halbierbare“ d.h. „ungerade“ unterschieden. Das war historisch wohl der erste Schritt in dem Versuch die Teilbarkeit der Zahlen genauer zu prüfen — nachdem die Unteilbarkeit der Eins infolge ihrer Vervielfältigung gesichert zu sein schien. Die Unterscheidung der geraden und ungeraden Zahlen führte dann zu der Lehre über dieselben.

Nachdem jedoch der eleatische Terminus des „Teilens“

(64) Vgl. Á. Szabó, „Eleatica“ (*Acta Antiqua Acad. Scient. Hung.*, III, 1955, 78 ff.).

(65) H. Diels-W. Kranz, *Fragmente der Vorsokratiker*⁵, I, 28 B fr. 8, 22.

(66) Es ist bezeichnend, dass in den euklidischen Definitionen (*Elem.*, VII, def. 6 und 7) das Zeitwort *διαρᾶν* nur noch mit dem ungenauen Adverb *δίχα* („zweifach“) ergänzt wird. Dagegen hiess die genaue Definition der geraden Zahl bei Platon (*Leg.* 895 E) noch : ἄριστος ἀριθμὸς ὁ διαιρούμενος εἰς ἴσα δύο μέρη („auf zwei gleiche Teile zerlegbar“). Der ältere, platonische Wortgebrauch zeigt, wie man den eleatischen Sinn des Terminus in der Arithmetik anfangs genauer einschränken musste. Später konnte man sich auch mit dem weniger genauen Adverb (*δίχα*) begnügen, da das Zeitwort *διαρᾶν* in der Arithmetik — ausser der Lehre vom Geraden und Ungeraden — gar nicht mehr gebraucht war.

(διαμεῖν) in der Arithmetik für das „Halbieren“ in Anspruch genommen wurde, mussten für die übrigen Arten des arithmetischen Teilens neue Termini eingeführt werden. Lehrreich ist das Prüfen dieser Termini darum, weil es manches Licht auf die Frühgeschichte der Arithmetik zu werfen vermag.

Auffallend ist zunächst, wie oft in den arithmetischen Definitionen des VII. Buches der „Elemente“ das Zeitwort *μετρεῖν* oder *καταμετρεῖν*, „messen“ benutzt wird. So heisst z.B. die 11. Definition: „Primzahl ist diejenige, die sich nur durch die Einheit *messen* lässt“ (*πρῶτος ἀριθμός ἐστιν ὁ μονάδι μόνῃ μετρούμενος*). Überraschend ist der Gebrauch dieses Ausdruckes darum, weil das Zeitwort „messen“ vielmehr für die Geometrie, als für die Kunst des Zählens oder Rechnens charakteristisch zu sein scheint. Wohl kann man in der Geometrie allerlei „Messungen“ durchführen, aber wie wird man Zahlen „messen“ wollen? — Selbstverständlich ist eine solche Operation am leichtesten dann möglich, wenn die Zahlen — wie es bei Euklid immer der Fall ist — als *Strecken* dargestellt werden. Eine beliebige Strecke wurde als die Darstellung der *Eins* angesehen, und die Mehrfachen derselben Strecke galten als Darstellungen von *Zahlen*. Nachdem jedoch die Zahl als „aus Einheiten zusammengesetzte Menge“ definiert wurde, konnten nur solche Strecken für Darstellungen irgendwelcher Zahlen gelten, die die Mehrfachen einer beliebigen Einheitsstrecke waren. (Man wird übrigens bald sehen, dass diese ganze Darstellungsart der Zahlen mittels Strecken noch *vor* der Entdeckung der geometrischen Inkommensurabilität aufkommen musste.) — Nun ist aber diese Darstellungsart — Zahlen als Strecken zu veranschaulichen — gar nicht etwas anfängliches. In der anfänglichen griechischen Arithmetik und Logistik — wohl auch noch in der Zeit, als die älteste Form der Lehre vom Geraden und Ungeraden entstand — hat man die Zahlen mit Rechensteinen (*ψῆφοι*) veranschaulicht (67). Das Aufgeben dieser anfänglichen Darstellungsart und das Hinübergehen zu der Veranschaulichung der Zahlen mittels Strecken muss in der Entwicklung der griechischen Arithmetik ein bedeutender Schritt gewesen sein (68). Man

(67) Vgl. O. Becker, *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik etc.*, Abt. B, Bd. 3, 1936, 536 ff.

(68) Zum folgenden vgl. meinen Aufsatz „Deiknymi als mathematischer Terminus für *beweisen*“ a.a.O.

ersieht besonders aus der Beweisführung einiger Sätze der Lehre vom Geraden und Ungeraden (z.B. El. IX 21, 22 u.a.m.), dass man den Beweisvorgang bei der Darstellungsart der Zahlen mittels Strecken oft gar nicht mehr in dem ursprünglichen Sinne des Wortes zeigen (veranschaulichen) konnte. Man hat aber die neue Darstellungsart — Zahlen als Strecken — dennoch überall konsequent durchgeführt, weil man zum Teil eben auch dadurch die Umwendung vom Konkret-Einzeln zum Abstrakt-Allgemeinen vollzogen hatte. Die Darstellung der Zahlen als Strecken ist also in der Arithmetik ein Zeichen sowohl der schon bekannten „anschauungswidrigen Tendenz“ der griechischen Wissenschaft, als auch dessen, dass man zu dieser Zeit den Beweis gar nicht mehr auf dem Wege des konkreten Sichtbarmachens, sondern auf dem Wege abstrakt-logischer Überlegungen führte. — Nun scheint das Zeitwort $\mu\epsilon\tau\rho\epsilon\acute{\iota}\nu$, „messen“ in den arithmetischen Definitionen eindeutig für die neue Darstellungsart der Zahlen mittels Strecken zu sprechen. Diejenigen Definitionen der Arithmetik, die diesen Ausdruck gebrauchen, scheinen also aus einer solchen Zeit zu entstammen, in der schon gang und gäbe war, die Zahlen als Strecken zu veranschaulichen; mit anderen Worten: diese Definitionen sind eindeutig neue Schöpfungen der schon deduktiven Arithmetik. Es gab jene Begriffe, die in diesen Definitionen beschrieben werden, *vor* der deduktiven Wissenschaft überhaupt nicht (69).

Noch lehrreicher sind die beiden Ausdrücke $\mu\acute{\epsilon}\rho\omicron\varsigma$ und $\mu\acute{\epsilon}\rho\eta$ (wörtlich: „Teil“ bzw. „Teile“) in den Definitionen 3. und 4. des VII. Buches der „Elemente“. Die 3. Definition besagt nämlich: „Teil einer Zahl ($\mu\acute{\epsilon}\rho\omicron\varsigma$) ist eine andere Zahl, die kleinere von der grösseren, wenn sie die andere (genau) misst.“ Diese Definition bestimmt also eigentlich das Verhältnis der *Teilbarkeit* zwischen zwei Zahlen. Wir würden heute dasselbe Verhältnis etwa so formulieren: teilbar ist eine Zahl durch eine andere, die grössere durch die kleinere, wenn die kleinere restlos in der anderen aufgeht. Es wäre an und für sich noch gar nicht auffallend, dass unsere Begriffe in dem antiken Text ein wenig anders ausgedrückt werden. Anstatt unseres Wortes „aufgehen“ gebraucht man hier das Wort

(69) Im Gegensatz etwa zu den Begriffen wie „Eins“ und „Zahl“, die es auch vor den Definitionen der deduktiven Wissenschaft, wenn auch nicht im späteren Sinne, aber doch gab.

„messen“, und die kleinere Zahl, die in unserer Ausdrucksweise „Teiler“ heisst, wird hier als „Teil“ bezeichnet. Das wäre also noch kaum der Rede wert. Umso interessanter ist jedoch, wie man in der alten Fachsprache das Gegenteil desselben Verhältnisses — also die *Nicht-Teilbarkeit* einer Zahl durch eine andere — zum Ausdruck brachte. Die 4. Definition heisst nämlich: „Menge von Teilen einer Zahl ($\mu\acute{\epsilon}\rho\eta$) ist eine andere Zahl — die kleinere von der grösseren — wenn sie nicht (genau) misst“. Diese Definition besagt also, dass in solchen Zahlenverhältnissen, wie z.B. 7:3 oder 10:4, die 3 und die 4 keine Teiler der 7 bzw. der 10 sind; „Menge von Teilen“ ist in diesen Fällen die kleinere Zahl der grösseren, weil sie *nur eine bestimmte Menge derjenigen Einheiten* (also: „Teile“) in sich enthält, die die grössere Zahl ausmachen. — Der Begriff der „Nicht-Teilbarkeit“ wird also durch die Mehrzahl desselben Wortes ($\mu\acute{\epsilon}\rho\eta$) zum Ausdruck gebracht, dessen Einzahl ($\mu\acute{\epsilon}\rho\omicron$) die „Teilbarkeit“ bezeichnet. Aus dieser merkwürdigen Bezeichnungsart der beiden antithetischen Begriffe ersieht man gleich auch: aus welcher Zeit wohl diese Terminologie entstammen mag? — Wir haben ja schon gesehen: das Wort „messen“ spricht in beiden Definitionen eindeutig dafür, dass man zu der Entstehungszeit dieser Formulierungen die Zahlen als Strecken veranschaulichte. Jede beliebige Zahl konnte als eine Strecke dargestellt werden. Natürlich musste man anfänglich glauben, dass dieselbe Darstellungsart auch umgekehrt gültig wäre: auch jede beliebige Strecke könnte als Darstellung irgendeiner bestimmbarer Zahl gelten. In der Tat wird das Verhältnis zweier Zahlen zueinander in den beiden eben behandelten Definitionen dahin erklärt, dass die kleinere Zahl entweder $\mu\acute{\epsilon}\rho\omicron$ der grösseren ist — wenn sie nämlich restlos in ihr aufgeht —, oder sie heisst $\mu\acute{\epsilon}\rho\eta$, wenn sie nicht restlos in ihr aufgeht, nur eine bestimmte Menge jener Einheiten in sich enthält, die die grössere Zahl ausmachen. Wohl sprechen zwar beide Definitionen (3. und 4.) nur von *Zahlen*, die in antikem Sinne aus Einheiten zusammengesetzte Mengen sind, aber die Tatsache, dass man in beiden Fällen hemmungslos auch das Zeitwort „messen“ gebracht, spricht dafür, dass man zu dieser Zeit wohl noch gar nichts von inkommensurablen Strecken wusste. Im Falle von inkommensurablen Strecken — wie z.B. Seite und Diagonale desselben Quadrats — ist ja die kleinere Strecke weder $\mu\acute{\epsilon}\rho\omicron$ noch $\mu\acute{\epsilon}\rho\eta$ der grösseren —

in dem Sinne, wie diese Worte in den beiden zahlentheoretischen Definitionen benutzt werden; denn in diesen Fällen gibt es ja gar keine gemeinsame Einheit, die die beiden Strecken messen würde. Ich vermute also, dass man noch gar nichts von geometrischer Inkommensurabilität zu jener Zeit wusste, als die neue Darstellungsart der Zahlen mittels Strecken und damit zusammen auch das Zeitwort „messen“ als *arithmetischer* Terminus eingeführt wurden.

Woher mögen aber die beiden Termini *μέρος* und *μέρη* stammen? — Ich glaube, auch diese lassen sich aus der eleatischen Philosophie ableiten, in der der Begriff des Teiles (*μέρος*) eine interessante Rolle spielte. Es gab nämlich für die Eleaten gar kein *μέρος*, da die Zerlegbarkeit des Seienden, der Eins geleugnet wurde; es konnten also weder die „Vielheit“ noch die „Teile“ zugelassen werden. Anders wurde es jedoch in der Arithmetik der Pythagoreer, in der man die Zahlen als aus Einheiten zusammengesetzte Mengen auffasste. Hier hätte man die Einheiten ruhig als „Teile“ der Zahlen bezeichnen können. Nachdem man jedoch diesen Tatbestand — dass nämlich die Eins in jeder Zahl ohne Rest aufgeht — auch anders auszudrücken vermochte (70), bezeichnete man *im allgemeinen* die Bestandteile einer Zahl (die Einheiten) nicht als *μέρη*. Nur in jenem *speziellen* Fall bekam die Gesamtheit der Einheiten von irgendeiner Zahl diesen Namen (*μέρη*), in dem eine kleinere Zahl zwar eine bestimmte Menge aus den Einheiten einer grösseren Zahl in sich fasste, aber sie selber doch nicht restlos in ihr aufging, kein Teil von ihr war. — Die ungewöhnliche Gegenüberstellung der Termini — *μέρος* und *μέρη*, Singular und Plural desselben Wortes — kommt also wohl daher, dass man bei der Begriffsbildung gar nicht von der Einzahl des Wortes (*μέρος*) ausgegangen war. Ursprünglich, als man die eleatische Eins zu Zahlen vervielfältigte — d.h. also: als man den neuen Begriff der abstrakten Vielheit einführte —, betrachtete man eben die Einheiten als „Teile“ (*μέρη*) der Zahl. Der Singular desselben Wortes hätte in dieser terminologischen Beziehung noch kaum einen Sinn gehabt, da nach der Definition keine Zahl aus einem einzigen Teil besteht. Der Singular (*μέρος*) wurde erst dann zu arithmetischem Terminus, als man zum Ausdruck bringen

(70) Man sagte nämlich entweder, dass die Zahl aus Einheiten zusammengesetzte Menge sei, oder, dass sich jede Zahl durch die Einheit messen lässt.

wollte, dass — ebenso wie die Einheit durch Vervielfältigung zur Zahl führt — auch eine kleinere Zahl durch Vervielfältigung zu einer grösseren Zahl führen kann. In einem solchen Fall bekam die kleinere Zahl im Verhältnis zu dem grösseren den Namen : μέρος. Und nachdem sich dieser abgeleitete Terminus (μέρος) festsetzte, wurde auch der ursprünglichere Plural (μέρη) spezialisiert : von nun an hiessen nicht im allgemeinen die Einheiten einer Zahl μέρη, sondern nur jene kleinere Zahl, die eine bestimmte Menge von den Einheiten einer grösseren Zahl in sich enthielt, aber nicht restlos in der grösseren aufging. — Die beiden Termini μέρος und μέρη, ohne die man die pythagoreische Lehre von den Zahlenverhältnissen im VII. Buch der euklidischen „Elemente“ gar nicht hätte aufbauen können, sind also wahrscheinlich ebenso organische und selbständige Weiterbildungen des noch einfacheren eleatischen Terminus (μέρος = „Teil des Seienden, der Eins“), wie auch das Zeitwort διαρπείν („halbieren“) in den beiden Definitionen der geraden und ungeraden Zahl ein weitergebildeter Terminus der eleatischen Philosophie war.

Zum Schluss sei noch daran erinnert, dass man auch zu der grundlegenden Unterscheidung von „Primzahlen“ und „zusammengesetzten Zahlen“ durch das Prüfen der Teilbarkeitseigenschaften geführt wurde. Nachdem man nämlich feststellte, dass sich jede Zahl durch die Einheit messen lässt, empfahl sich die folgende dichotomische Unterscheidung : diejenigen Zahlen, die sich *nur* durch die Einheit messen lassen, wurden als „Primzahlen“ (VII def. 11), und diejenigen, die sich *nicht nur* durch die Einheit (also auch durch irgendeine andere Zahl) messen lassen, als „Nicht-Primzahlen“ („zusammengesetzte Zahlen“, VII def. 13) bezeichnet.

*
* * *

Überblickt man nun die Ergebnisse der beiden letzten Kapitel, so wird man zugeben müssen, dass die wichtigsten Definitionen am Anfang des VII. Buches der euklidischen „Elemente“ — wie „Eins“, „Zahl“, „gerade Zahl“, „ungerade Zahl“, „Teil einer Zahl“, „Menge von Teilen einer Zahl“, „Primzahl“ und „Nicht-Primzahl“ — sich leicht als organische Weiterbildungen der eleatischen Philosophie erklären lassen. In einigen von diesen Fällen verrät selbst die Terminologie (διαρπείν, μέρος, μέρη usw.)

eindeutig den eleatischen Einfluss. Darum ist die pythagoreische Arithmetik auch gar nichts anderes als eine Weiterbildung der eleatischen Lehre. Diese Weiterbildung ergab sich daraus, dass man an dem eleatischen Unteilbarkeitsdogma — im Sinne des eleatischen Prinzips von der Widerspruchsfreiheit (71) — festhalten wollte. Darum vervielfältigte man die Eins mittels einer Definition zur Zahl, und man schuf — um die sich daraus ergebenden Probleme lösen zu können — wieder nach eleatischem Vorbild weitere, dichotomische Definitionen. So kam unter den Griechen die älteste definitorische Grundlegung der Arithmetik, wahrscheinlich noch in der ersten Hälfte des 5. Jahrhunderts v.u.Z., zustande.

5. — DIE TEILBARKEIT UND DIE GEOMETRIE

Gelegentlich habe ich schon darauf hingewiesen, dass sich die Grundsätze der Eleaten in der Geometrie keineswegs so leicht als in der Arithmetik anwenden liessen (72). Als man z.B. versuchte, dem eleatischen Prinzip gemäss nicht mehr empirisch und durch sinnliche Wahrnehmungen sondern bloss auf dem Wege des widerspruchsfreien Denkens zur Erkenntnis zu gelangen, und als man damit im Zusammenhang auch den mathematischen Beweis nicht mehr konkret-anschaulich für den einzelnen Fall, sondern auf logischem Wege abstrakt-allgemeingültig für alle möglichen Fälle führen wollte, konnte man in der Arithmetik die Zahlen ohne jede grössere Schwierigkeit als bloss gedankliche Elemente behandeln. Man musste sich dabei nur von den konkret-gegebenen Zahlen irgendwie befreien; man veranschaulichte also die einzelnen Zahlen nicht mehr mit Rechensteinen, sondern man liess eine beliebige Strecke als eine beliebige Zahl gelten. Diese neue Art

(71) Ich kann in diesem Zusammenhang meine wichtigste These, dass nämlich die grösste Errungenschaft der eleatischen Philosophie eben in der *Aufstellung des Prinzips von der Widerspruchsfreiheit* bestand, nicht wieder erörtern. Statt dessen verweise ich einstweilen nur auf meine früheren Untersuchungen: „Beiträge zur Geschichte der griechischen Dialektik“ (*Acta Antiqua Acad. Scient. Hung.*, I, 1953, 377-410), „Zur Geschichte der Dialektik des Denkens“ (*ebd.*, II, 1954, 17-62), „Zum Verständnis der Eleaten“ (*ebd.*, II, 1954, 245-289) und „Eleatica“ (*ebd.*, III, 1955, 67-103).

(72) Zu dem folgenden vgl. meinen schon oft zitierten Aufsatz: „Deiknymi, als mathematischer Terminus für *beweisen*“ a.a.O.

von „Veranschaulichung“ hatte den grossen Vorteil, dass man dabei auch immer fühlte: redet man von irgendwelchen Zahlen, so handelt es sich eigentlich gar nicht um jene Strecken, die in dem gegebenen Fall die behandelten Zahlen vertreten, denn man kann ja dieselben Strecken immer nach Belieben auch für Darstellungen völlig anderer Zahlen gelten lassen. Das Mittel der Darstellung (die Strecke) und das Dargestellte (die Zahl) liessen sich auf diese Weise meistens ziemlich leicht und sauber auseinanderhalten. — Nicht so einfach war es in der Geometrie. Hier vermochte man den eleatischen Grundsatz, dass man nämlich nicht durch sinnliche Erfahrung, sondern auf dem Wege des blossen Denkens zur Erkenntnis gelangen soll, kaum mehr so leicht zur Geltung zu bringen. Die geometrischen Gebilde waren weniger abstrakt, weniger bloss gedachte Elemente, als die Zahlen. Man hätte auch umsonst gesagt, dass man das bloss gedachte Dreieck mit dem gezeichneten nicht verwechseln dürfte. Die Grenzen zwischen dem blossen Mittel der Darstellung und dem Dargestellten selbst blieben auf diesem Gebiete natürlicherweise immer verschwommener als in der Arithmetik. Es war auch nicht so leicht möglich jene antiempirische und anschauungswidrige Tendenz, die für die deduktive Mathematik der Griechen so bezeichnend war, in der Geometrie geltend zu machen. (Euklid gab sich zwar die grösste Mühe, um die ursprüngliche Anschaulichkeit seiner geometrischen Sätze und Beweisführungen möglichst zu verhüllen, aber beinahe umsonst: die Anschaulichkeit blieb an seinen Figuren mehr oder weniger doch immer haften.)

Auf noch grössere Schwierigkeiten stiess man, als man versuchte, das eleatische Problem der „Teilbarkeit“, das sich im Aufbau der Arithmetik so fruchtbar und anregend erwies, auch in der Geometrie zu prüfen. Es gibt auch innerhalb der pythagoreischen Arithmetik selbst Spuren davon, dass man diese geometrischen Schwierigkeiten schon sehr früh wahrnehmen musste. Es wird sich lohnen — als Einleitung zu den folgenden Betrachtungen — mindestens ein Beispiel dafür genauer ins Auge zu fassen, wie man in der pythagoreischen Arithmetik manchmal an die Schwierigkeiten der Geometrie streifte. Wir wollen also zunächst einen arithmetischen Satz bei Euklid (*El. VII 31*) näher prüfen.

Dieser Satz besagt: *Jede zusammengesetzte Zahl wird von*

irgendeiner Primzahl gemessen“. Nun verläuft der Beweis dieses Satzes folgendermassen.

Sei a jene zusammengesetzte Zahl, von der wir beweisen wollen, dass sie von irgendeiner Primzahl gemessen wird. Nachdem a eine zusammengesetzte Zahl ist, wird sie im Sinne der Definition VII 13 von irgendeiner anderen Zahl b gemessen, denn eine zusammengesetzte Zahl ist eben diejenige, die von irgendeiner anderen Zahl gemessen wird. Nun kann aber der Teiler von a , die Zahl b , entweder nur eine Primzahl oder eine zusammengesetzte Zahl sein. Ist b eine Primzahl, so haben wir den Satz bewiesen, denn die Zahl a wird von der Primzahl b gemessen. Ist jedoch b eine zusammengesetzte Zahl, so wird sie wieder im Sinne der Definition VII 13 von irgendeiner Zahl c gemessen, die ihrerseits selbstverständlich auch a misst. Nun kann c wieder entweder eine Primzahl oder eine zusammengesetzte Zahl sein. Im ersten Fall (c ist eine Primzahl) haben wir den Satz bewiesen, denn wir haben jene Primzahl (c) gefunden, die b und dadurch auch a misst. Ist jedoch c eine zusammengesetzte Zahl, so prüft man weiter ihren Teiler d usw. — Der Beweis betont, dass man auf diese Weise schliesslich eine Primzahl finden wird, die die zusammengesetzte Zahl a misst. Sollte man nämlich die gesuchte Primzahl nie finden, und wären die Teiler von a lauter zusammengesetzte Zahlen, so hiesse es, dass die Zahl a unendlich viele, immer kleiner werdende Teiler besitzt, was jedoch im Bereiche der Zahlen unmöglich ist (*ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον ἐν ἀριθμοῖς*).

Auffallend ist der letzte, auch griechisch zitierte Satz der Beweisführung, der besagt, dass unendlich viele und immer kleiner werdende Teiler *im Bereiche der Zahlen* nicht möglich sind. Diese Formulierung erweckt nämlich den Verdacht, ob der Betreffende, der „den Bereich der Zahlen“ so behutsam umgrenzte, nicht auch jenes andere Gebiet kannte, wo die unendlich vielen und immer kleiner werdenden Teiler doch möglich sind? — Es lässt sich in der Tat sehr leicht zeigen, dass im 5. Jahrhundert v.u.Z. — also eben damals, als nach B. L. van der Waerdens Vermutung das VII. Buch der euklidischen „Elemente“ entstehen musste — die „unendlich vielen und immer kleiner werdenden Teiler einer Grösse“ ein vielerörtertes Problem waren. Es genügt nämlich an die bekannte paradoxe Beweisführung des Eleaten Zenon zu erinnern: die Bewegung wäre nicht möglich, da der

bewegte Körper zuerst die Hälfte seiner Laufbahn hinter sich legen müsste; bevor er jedoch diesen Halbierungspunkt erreichte, müsste er die Hälfte der halben Strecke hinter sich legen, und so bekäme man durch fortgesetzte Halbierungen unendlich viele immer kleiner werdende Teilstrecken (73). Einerlei, wie man den angeblichen Trugschluss von Zenon beurteilen mag, es besteht doch kein Zweifel darüber, dass einen wesentlichen Teil seiner eben angedeuteten Beweisführung der Gedanke von den „unendlich vielen und immer kleiner werdenden Bestandteilen“ einer Strecke bildete (74). Jede Strecke kann in der Tat als eine Grösse aufgefasst werden, die unendlich viele, immer kleiner werdende Teiler besitzt.

Offenbar hat also der Verfasser des euklidischen Beweises (El. VII 31) den Bereich der Zahlen gegen den Bereich der Strecken, d.h. also gegen die *Geometrie* abgegrenzt. In der Tat bestand nach antiker Auffassung der grosse Vorteil der Arithmetik eben darin, dass es hier gelungen ist, das eleatische Problem der Teilbarkeit zu lösen. Es gab im Bereiche der Zahlen — nachdem man die Zahl als aus Einheiten zusammengesetzte Menge definierte — gar keine unendliche Teilbarkeit. Dadurch hat man auch das Widerspruchsvolle — wie man sagte das *ἄρρητον*, das Unsagbare oder Irrationale (75) — aus der Zahlenlehre behoben.

Nicht so einfach war es, als man versuchte, die Gedanken der Eleaten auch in der Geometrie anzuwenden. Die grösste Schwierigkeit entstand nämlich dadurch, dass sowohl die Materie als auch der Raum selbst für das menschliche Denken zunächst als *unendlich teilbar* vorkamen. Infolgedessen musste man auch zu der Ansicht kommen, dass es in der Materie und in dem Raum,

(73) Siehe dazu Aristoteles, *Phys. Z.*, 9.239 b 9 und 2.233 a 21.

(74) Vgl. dazu auch A. A. Fraenkel, *Abstract Set Theory*, Amsterdam 1953, 10 f., wo jedoch die beiden Beweise des Zenon, derjenige, der in der vorigen Anmerkung genannt wurde, und der sog. „Achilles“ (Aristoteles, *Phys. Z.*, 9.239 b 14) in eins zusammengezogen wurden; darum kann es zusammenfassend heissen: „an apparently intuitive instance of an infinite aggregate is given by the set of all the segments that Achilles has to cover until he can overtake the tortoise.“

(75) Vgl. Proclus (ed. F) S. 60, 7 ff. — Zu dem eleatischen Ursprung dieser Termini vgl. man meine Bemerkung in dem Aufsatz „Eleatica“ (*Acta Antiqua Acad. Scient. Hung.*, III, 1955, 96 ff.). Hier sei kurz nur so viel gesagt, dass die beiden Worte *ἄρρητον* und *ἄλογον* nur Neubildungen dafür sind, was Parmenides als *οὐ φαρὸν οὐδὲ νοητόν* (fr. 8, 8-9) bezeichnete.

d.h. also auch in der Geometrie gar kein „Kleinstes“ gäbe (76). Wohl konnte man unter den Zahlen solche letzten und kleinsten Bestandteile — die bloss gedachten Einheiten — angeben, die als nicht weiter zerlegbar galten. Aber in der Geometrie fand man nichts ähnliches. Wie Proklos einmal sagt : „in der Geometrie gibt es überhaupt gar kein *Kleinstes* ... und wo das Teilen in das Unendliche fortgesetzt werden kann, da ist auch das Irrationale (= das Sinnwidrige, τὸ ἄλογον) vorhanden.“ (77) Leicht war es in der Arithmetik von der Eins und von den Zahlen auszugehen, denn diese waren als rein gedankliche Gebilde widerspruchsfrei und stofflos, aber in der Geometrie gab es keine solchen einfachen Anfänge. „Dass die Zahlen stoffloser und sauberer als die geometrischen Grössen, und dass die Grundlage der Zahlen (ihre ἀρχή) einfacher als diejenige der geometrischen Grössen ist, leuchtet einem jeden ein“ — liest man wieder bei Proklos (78).

Sollte aber jemand nach den letzten Zitaten evtl. den Verdacht schöpfen, dass es nicht völlig beruhigend wäre, für solche Gedanken den späten Kommentator Proklos anzuführen — der ja doch ein Neuplatoniker war, und beinahe acht Jahrhunderte später sein Werk schrieb, als dass Euklid die „Elemente“ zusammengestellt hatte, um von jenen Eleaten gar nicht zu sprechen, die noch im 6. Jahrhundert und in der ersten Hälfte des 5. v.u.Z. lebten —, so sei es hier mit allem Nachdruck betont, dass ein solcher Einwand völlig unbegründet wäre. Denn im Gegenteil, alles spricht dafür, dass der Kommentator Proklos ein sehr zuverlässiger Zeuge ist; man merkt in jener Beziehung, die wir in diesem Zusammenhang prüfen, nicht den mindesten Unterschied zwischen seiner Auffassung und derjenigen, die sich als die Gedankenwelt der alten Pythagoreer und Eleaten rekonstruieren lässt. Um bei dem untersuchten Problem zu bleiben : man weiss ja, dass dieselben Schwierigkeiten der Geometrie, die Proklos mit der unendlichen Teilbarkeit in Zusammenhang bringt, zum ersten Male durch die Eleaten als Probleme des Raumes entdeckt wurden. Auch der

(76) Es handelt sich lediglich um die Ansichten der Alten, und man verliert dabei die behutsame Bemerkung von A. A. Fraenkel (o.c., 9 : „it seems that the external world can afford us nothing but finite sets“) nicht aus den Augen!

(77) Proclus (ed. F) S. 60, 11 ff. : ἐν γεωμετρίας γὰρ τὸ ἐλάχιστον ὅλως οὐκ ἔστιν... ὅπου γὰρ ἐπ' ἀπειρον ἡ διαίρεσις, ἐκεῖ καὶ τὸ ἄλογον.

(78) S. 95, 23 ff. : ὅτι μὲν οὖν οἱ ἀριθμοὶ τῶν μεγεθῶν ἀυλότεροι καὶ καθαρώτεροι, καὶ ὅτι τῶν ἀριθμῶν ἡ ἀρχὴ τῆς τῶν μεγεθῶν ἐστὶν ἀπλουστέρα, παντὶ καταφανές.

Eleate Zenon vermochte die Widersprüchlichkeit des Begriffes „Raum“ mit zahlreichen Argumenten nachzuweisen (79), und oft berief er sich dabei eben auf die unendliche — oder mindestens im Gedanken unendliche — Teilbarkeit jeder räumlichen Ausdehnung. Die Eleaten scheuten sich auch nicht, die Konsequenz aus ihrer Erkenntnis zu ziehen: was so widerspruchsvoll ist, wie der Begriff des „Raumes“, das kann auch ebensowenig eine Existenz besitzen, wie die übrigen widerspruchsvollen Begriffe, z.B. „Bewegung“, „Entstehen“ oder „Zeit“. Sie haben also die Existenz des Raumes rundweg geleugnet (80).

Nun leugnet man aber den Raum, so ist auch die Wissenschaft von dem Raum, die Geometrie gar nicht möglich. Ist der Raum etwas widerspruchsvolles, so gehört er in die Reihe jener Dinge, die nach eleatischer Auffassung wohl durch sinnliche Wahrnehmungen zu erfahren, aber nicht durch reines, widerspruchsfreies Denken zu begreifen sind. Als ein solches Ding betrachteten die Eleaten z.B. die „Bewegung“. Denn selbstverständlich mussten auch die Eleaten zugeben, dass die „Bewegung“ *praktisch* stattfinden kann; durch sinnliche Wahrnehmungen kann man sie auf Schritt und Tritt erleben. Das eleatische *Leugnen* der Bewegung hiess eigentlich nur so viel, dass sie meinten: wohl wäre die Bewegung sinnlich wahrnehmbar, aber nicht durch logisches, widerspruchsfreies Denken zu begreifen. Ähnlich muss man auch den eleatischen Satz — „es gäbe keinen Raum“ — verstehen. In diesem Satz kommt wohl nur der Gedanke zum Ausdruck, dass es über den „Raum“ kein widerspruchsfreies Denken möglich sei. Mit anderen Worten heisst es auch so viel, dass nach eleatischer Auffassung das „Wissen von dem Raum“ wohl ähnlich zu beurteilen wäre, wie das „Wissen von der Bewegung“; diese beiden Dinge wären bloss *Ergebnisse sinnlicher Wahrnehmungen*.

Es scheint nun, dass die alten Pythagoreer, die nach unseren bisherigen Betrachtungen in der Arithmetik treue Anhänger der eleatischen Grundsätze sein mussten, ursprünglich wohl auch diese eleatische Beurteilung des „Wissens von Raum“ übernahmen. Für diese Vermutung scheint allerdings die Tatsache zu sprechen, dass nach einem oben erwähnten Bericht die Pythagoreer das älteste

(79) Vgl. W. Capelle, *Die Vorsokratiker*, Leipzig 1935, 172 f.

(80) Platon, *Theait.*, 180 E: Μέλισσοι τε καὶ Παρμενίδαι ... δισχυρίζονται, ὡς ἐν τε πάντα καὶ ἔστηκεν αὐτὸ ἐν αὐτῷ οὐκ ἔχον χώραν, ἐν ᾗ κινεῖται.

Lehrbuch der Geometrie, die sog. „Geometrie des Pythagoras“ als *ιστορίη* bezeichneten (81). Das Wort *ιστορίη* kann nach seiner ursprünglichen Bedeutung nur Bezeichnung eines bloss empirischen Wissens sein, das man vorwiegend eben durch *Sehen* erhielt.

Aber man konnte bei einer solchen Beurteilung der Geometrie doch nicht lange stehen bleiben. Denn die Geometrie war schon in der Zeit vor den Pythagoreern ein ziemlich entwickeltes Wissensgebiet. Wohl war sie noch keine deduktive Wissenschaft, aber auch nicht mehr bloss eine Sammlung praktischer Kenntnisse über das Feldmessen, wie der ionische Name *γεωμετρία* es zu besagen scheint. Der Milesier Thales hat ja schon über Winkel gesprochen, Sätze aufgestellt und wohl auch anschauliche Beweise geführt. Man musste sich also — schon wegen dieser Vorgeschichte der Geometrie — dazu veranlasst fühlen, irgendwie auch diesen Bereich der Kenntnisse ähnlich wie die Lehre von den Zahlen theoretisch zu begründen. Es empfahl sich als eine Begründung zunächst dem Beispiel der Arithmetik zu folgen. Wir besitzen in der Tat eindeutige Zeugnisse dafür, dass man ursprünglich versuchte, die Arithmetik selbst ohne weitere Umstände der Geometrie zugrunde zu legen. Darum konnte auch Proklos behaupten, dass die Geometrie „den zweiten Platz nach der Arithmetik einnähme, da sie von dieser Wissenschaft her *ihre Vollendung und Begrenzung* erhielte“ (82). Wie eigentlich dieser merkwürdige Ausdruck zu verstehen sei, das geht erst aus einer näheren Prüfung der euklidischen Definition des „Punktes“ hervor.

Die allererste Definition am Anfang der „Elemente“ heisst: „Punkt ist das, was keine Teile hat.“ (83) Wie vor den arithmetischen Büchern die erste Definition jenen kleinsten Bestandteil, die „Eins“ namhaft machte, aus dessen Vervielfältigung sich die Zahlen herstellen lassen, so steht hier vor den geometrischen Büchern das „Kleinste“ (*ἐλάχιστον*) der Geometrie, der „Punkt“. Die beiden Definitionen, diejenige der Einheit und die des Punktes, lassen sich in der Tat bis zu einem gewissen Grade vergleichen. Denn es handelt sich ja in den arithmetischen Büchern um Zahlen, und darum wird vor diesen Büchern das kleinste Element der

(81) Siehe oben das Kapitel „Der Vorrang der Arithmetik“.

(82) Proclus (ed. F) S. 48, 9 ff.: *ἡ γεωμετρία ... δευτέραν ἔχει τάξιν μετὰ τὴν ἀριθμητικὴν ὡς ἐκ ταύτης τελειούμενη καὶ ἀφοριζομένη.*

(83) *Elem.* I, def. 1: *Σημεῖόν ἐστιν, οὐ μέρος οὐθέν.*

Zahlen, die Eins genannt, die selber zwar — nach griechischer Auffassung — „keine Zahl“ ist, aber ohne die die Zahlen doch nicht möglich wären. Ebenso handelt es sich in den geometrischen Büchern um geometrische Grössen (*μεγέθη*), und darum wird vor diesen jenes kleinste Element der Geometrie, der Punkt genannt, der selber zwar keine geometrische Grösse, aber irgendwie doch zum Verständnis dieser Grössen notwendig ist. — Nun ist ein solcher Vergleich allerdings möglich, auf den ersten Anblick vielleicht sogar auch noch ansprechend. Auch die alten Pythagoreer haben diesen Vergleich wohl in dem angedeuteten Sinne angestellt, denn es ist bekannt, dass sie einen Unterschied zwischen der „Einheit“ der Arithmetik und dem „Punkt“ der Geometrie nur insofern gelten lassen wollten, dass sie sagten: die „Eins“ wäre etwas „nicht gesetztes“ (*μονὰς ἄθετός ἐστιν*), während der Punkt“ auch eine „Setzung“ hätte (*στιγμὴ θέσιν ἔχουσα*) (84). — Aber man muss sich dennoch ehrlich gestehen, dass im Grunde sowohl der vorige Vergleich als auch die interessant klingenden Worte über „Setzung“ und „Nicht-Setzung“ nur darum ausgeklügelt worden sind, um mit ihnen die grundlegende Schwierigkeit mindestens zu verschleiern. Denn fasse man nur genauer ins Auge, was die Definition des „Punktes“ besagt.

„Punkt ist das, was keine Teile hat.“ Man muss im Sinne dieser Aussage den „Punkt“ der Geometrie als eine „Grösse ohne Teil“ (*μέγεθος ἀμερές*) bezeichnen. Nun was ist aber eine Grösse, die gar keinen Teil besitzt? — Natürlich nur eine „*contradictio in adjecto*“, ein Selbstwiderspruch. Man weiss in der Tat, dass der Eleate Zenon diesen griechischen Ausdruck, *μέγεθος ἀμερές* („Grösse ohne Teil“) in seinen Argumentationen gebrauchte (85), und es kann gar kein Zweifel darüber bestehen, in welchem Sinne er diese sonderbare Bezeichnung benutzte. Die „Grösse ohne Teil“ war in seiner Sprache dasselbe für den Raum, was für die Zeit in seiner Ausdrucksweise das „Jetzt“ (*νῦν*) bedeutete. Es ist kein Zufall, dass auch Proklos den Punkt der Geometrie als etwas teilloses — mindestens in der Form der Frage — mit dem „Jetzt“ der Zeit (*τὸ νῦν*) vergleicht (86). Zenon löste nämlich die Zeit als

(84) Proclus (ed. F) S. 59, 17 f.

(85) Pseudo-Aristoteles, *De lin. insec.*, 968 a 18 : κατὰ τὸν τοῦ Ζήνωνος λόγον ἀνάγκη τι μέγεθος ἀμερές εἶναι.

(86) Proclus (ed. F) S. 93, 6 ff.

Dauer in lauter unendlich kleine *dauerlose* Zeitpunkte („Jetzt“ = *νῦν*) auf, und dadurch konnte er die Undenkbarkeit, d.h. die Widersprüchlichkeit der Begriffe „Zeit“ und „Bewegung“ nachweisen (87). Allerdings konnte Aristoteles ihm gegenüber darauf hinweisen, dass die Zeit keineswegs aus lauter „Jetzt“, aus dauerlosen Zeitpunkten bestünde, das wäre nur eine falsche Annahme von Zenon (88). — Man kann in der Tat zwischen den beiden Möglichkeiten wählen: entweder gibt man — der sinnlichen Erfahrung gemäss — die Existenz der Zeit zu, und man kümmert sich gar nicht darum, dass dieser Begriff, „Zeit“, widerspruchsvoll ist; in diesem Fall ist Zenons dauerloser Zeitpunkt, das „Jetzt“ natürlich nur ein Hirngespinnst. Man kann aber auch umgekehrt sich an die Forderung der Widerspruchsfreiheit klammern und die sinnlichen Erfahrungen für trügerisch erklären; aber in diesem anderen Fall gibt es überhaupt *nur* das „Jetzt“ von Zenon und gar keine Zeit, weil dieser Begriff widerspruchsvoll ist. Wie bekannt haben sich die Eleaten für diese zweite Möglichkeit entschieden. — Kein Zweifel, dass dieselbe Alternative auch für die „Grösse ohne Teil“, d.h. also auch für den „Punkt“ der Geometrie besteht. Entweder gibt man nämlich die Existenz des Raumes — den Erfahrungen gemäss — ohne Voraussetzungen zu, und dann gibt es gar keine „Grösse ohne Teil“; in der Tat sagt einmal auch Proklos, dass es in der Geometrie gar kein Kleinstes gäbe (89). Oder will man in seinen Aussagen um jeden Preis widerspruchsfrei bleiben, und dann wird man nur die Existenz der „Grösse ohne Teil“ zugeben und die Existenz des Raumes leugnen müssen, da dieser letztere Begriff widerspruchsvoll ist. Leugnet man aber den Raum, so gibt es auch keine Wissenschaft vom Raum, also keine Geometrie.

Man sieht also, dass die alten Pythagoreer mit ihrem Bestreben, die Geometrie ebenso widerspruchsfrei wie die Arithmetik aufzubauen, eigentlich in eine Sackgasse gekommen sind. Denn es war in der Tat so, wie K. Reidemeister schreibt: „Punkte und Strecken sind weder dem Anschauenden noch dem Denkenden

(87) Darüber ausführlicher: Á. Szabó, „Zur Geschichte der Dialektik des Denkens“ (*Acta Antiqua Acad. Scient. Hung.*, II, 1954, 17-62).

(88) Aristoteles, *Phys. Z.*, 9.239 b 30 (über Zenons Paradoxie „der fliegende Pfeil ruht“): *συμβαίνει δὲ παρὰ τὸ λαμβάνειν τὸν χρόνον συγκεῖσθαι ἐκ τῶν νῦν: μὴ δεδομένου γὰρ τούτου οὐκ ἔσται ὁ συλλογισμός.*

(89) S. 60, 11 f.: *ἐν γεωμετρίᾳ γὰρ τὸ ἐλάχιστον ὅλως οὐκ ἔστιν.*

gegeben. Einige geometrische Begriffe leuchten ein, die Idee, dieselben zu einer widerspruchsfreien Theorie zu vereinigen, leuchtet ein. Die einfachen Anfänge aber, aus denen sich diese geplante Theorie entwickeln liesse, werden *nur* gesucht als widerspruchsfreie Ergänzungen des Einsichtigen.“ (90) — Es sollte nur hinzugefügt werden, dass es den Pythagoreern eigentlich *nicht gelungen ist*, jene einfachen und widerspruchsfreien Anfänge zu finden, aus denen sich die Geometrie ebenso widerspruchsfrei entwickeln liesse, wie ihre Arithmetik. Ja sie haben mit ihrer Definition des Punktes — und selbstverständlich auch mit derjenigen der breitenlosen Linie (Eucl. El., I def. 2) — mindestens unter dem Gesichtspunkt der streng eleatischen Denkweise — eigentlich etwas *Falsches* ihrer Wissenschaft, der Geometrie zugrunde gelegt. Denn im Sinne der Eleaten hätten sie eben infolge dieser Aussagen — „Punkt ist das, was keine Teile hat“ und „Linie ist eine Länge ohne Breite“ — den Raum und damit zusammen auch die Geometrie leugnen müssen.

Man weiss in der Tat, dass man den Geometern in der Antike vorgeworfen hatte: sie würden ihren Untersuchungen etwas Falsches zugrunde legen (91). Es lebte wohl die Erinnerung an diesen alten Vorwurf auch noch bei dem Neuplatoniker Proklos weiter, der den Gedanken vertrat, dass man die Geometrie — wie er sich bildlich ausdrückte — „aus den Armen der Kalypso“ befreien, und dass man sie in eine vollkommenere, geistigere Erkenntnisweise emporheben müsste; ja er forderte sogar die

(90) K. Reidemeister, *Das exakte Denken der Griechen*, Hamburg 1949, 12. Es sei bemerkt, dass das unterstrichene Wort des Zitates (*nur*) meine eigene Ergänzung ist. Ursprünglich hiess die Fortsetzung des Zitates: „Das ist die dialektische Situation des mathematischen Denkens, als deren Auflösung und Frucht die Euklidische Geometrie bekannt und berühmt ist.“

(91) Gegen einen solchen Vorwurf nimmt auch Aristoteles die Geometer in seinen Schutz: „Es ist auch nicht wahr, was gewisse Leute sagen, dass der Geometer etwas Falsches zugrunde legt. Denn sie geben vor, man dürfe nichts Falsches verwenden, der Geometer behaupte aber Falsches, indem er eine Linie, die nicht einen Fuss lang ist, einen Fuss lang sein und die gezeichnete Linie, obwohl sie nicht gerade ist, gerade sein lässt. Aber der Geometer schliesst nicht darauf hin, dass es eine Linie ist, was er dafür ausgibt, sondern darauf hin, dass es das ist, was er damit meint“ (*Analytica post.*, I, 10; die Übersetzung der Stelle nach O. Becker, *Grundlagen der Mathematik*, 98). Man hat allerdings auf Grund dieser Worte den Eindruck, dass Aristoteles ebensowenig zu verstehen vermochte, was man eigentlich den Geometern vorwarf, wie auch der wahre Sinn der sog. Trugschlüsse von Zenon vor ihm verborgen blieb.

Mathematiker dazu auf (92). Wie bekannt, glaubte N. Hartmann diese Stelle von Proklos dahin erklären zu dürfen, dass hier eigentlich eine neue Behandlungsart der Geometrie, die analytische vorausgesagt werde, die erst durch Descartes verwirklicht wurde (93).

6. — „DAS GANZE IST GRÖßER ALS DER TEIL“

Im Laufe der bisherigen Untersuchung habe ich Vermutungen darüber aufgestellt, wie man wohl einst in die Nähe des Gedankens kommen musste, dass die Mathematik als deduktive Wissenschaft einer Grundlegung bedarf. Es hat sich gezeigt, dass die Vorbereitung dieser Grundlegung in der Arithmetik eigentlich aus zwei deutlich zu unterscheidenden Schritten bestand. Einerseits hat man nämlich die eleatischen Grundsätze — sowohl die Lehre von der Eins und ihrer Unteilbarkeit, als auch das Prinzip der Widerspruchsfreiheit im allgemeinen — unverändert übernommen; das war der erste Schritt. Andererseits hat man aber gleichzeitig auch eine neue Definition — diejenige der Zahl — eingeführt; dadurch wurde es möglich, dass man an dem eleatischen Prinzip der Widerspruchsfreiheit innerhalb der Arithmetik auch weiterhin festhalte; das war der zweite Schritt. — Man wird also eigentlich nur den zweiten Schritt — die Einführung der genannten Definition „Zahl“ — zu der selbständigen Grundlegung der Arithmetik rechnen dürfen, denn erst infolge dieser Definition sind die Umrisse jenes Bereiches (d.h. des Bereiches der Zahlen) klarer geworden, innerhalb dessen man widerspruchsfreie Behauptungen, Sätze, aufstellen konnte. Diese Definition war also in der Tat schon eine *Grundlage der Arithmetik*. Besonders deutlich versteht man diese Rolle der arithmetischen Definition im allgemeinen, wenn man sich den oben schon behandelten Beweis des Satzes *Eucl. El. VII 31* (siehe das vorige Kapitel) noch einmal vergegenwärtigt. Der Verfasser dieses Beweises wollte nämlich Zenons Behauptung von der Möglichkeit der „unendlich vielen und immer kleiner werdenden

(92) Proclus (ed. F) S. 54-55.

(93) N. Hartmann, *Des Proklus Diadochus philosophische Anfangsgründe der Mathematik*, Giessen 1909, S. 44. Vgl. auch A. Speiser, *Die mathematische Denkweise*, Basel-Stuttgart, 1952, 64 f.

Teiler“ gar nicht bestreiten; er betonte nur, dass das Auffinden unendlich vieler und immer kleiner werdender Teiler einer Grösse im Bereiche der Zahlen unmöglich ist, *weil es im Widerspruch mit der Definition der Zahl steht*. Offenbar hat man also die Definition der Zahl so formuliert, dass sie Grundlage für die Widerspruchsfreiheit jener Behauptungen (Sätze) sei, die man auf sie baute.

Man hat also den Eindruck, dass eben die Definitionen die sozusagen „ältesten mathematischen Grundlagen“ sind; d.h. also: man hat im Laufe der historischen Entwicklung die Grundlegung der Mathematik zu allererst wohl mit Definitionen versucht. In der Tat findet man bei Euklid am Anfang der arithmetischen Bücher nur Definitionen und gar keine mathematischen Grundlagen anderer Art — zum Zeichen dafür, dass sich die Arithmetik nur auf Definitionen baut. Damit soll selbstverständlich nicht gesagt werden, dass die Griechen in ihrer Zahlenlehre ausser jenen Definitionen, die sie am Anfang des Werkes selber zusammenstellten, gar keine sonstigen Grundsätze benutzt hätten. Es ist ja schon längst bekannt, dass Euklid in seinen geometrischen Ausführungen oft auch solche unbewiesenen Voraussetzungen gebraucht, die man umsonst unter seinen aufgezählten Prinzipien sucht (94). Es ist ihm offenbar unbewusst geblieben, dass er in solchen Fällen ein nicht genanntes Prinzip benutzte. Wohl könnte man also auch in Euklids Arithmetik solche unbewusst gebrauchten Grundsätze namhaft machen. Wenn wir dennoch behaupten, dass sich die pythagoreische Arithmetik im VII. Buch der „Elemente“ einzig und allein auf Definitionen baut, so verstehen wir darunter nur so viel, dass die Pythagoreer die Sätze dieser Lehre — soweit es ihnen bewusst war — nur aus den vorausgeschickten Definitionen ableiteten. Zu der Arithmetik brauchten sie nur Definitionen.

Wichtig ist diese Beobachtung darum, weil sie uns auf die Spur dessen zu leiten vermag, wie man wohl einst auch die übrigen mathematischen Grundsätze fand. Es wurde schon im ersten Kapitel erwähnt, dass bei Euklid die mathematischen Prinzipien

(94) Es wird z.B. gleich in der allerersten Konstruktionsaufgabe (*Elem.*, I, 1) angenommen, dass die beiden Kreise, die man zeichnen soll, sich auf alle Fälle schneiden würden. Darum konnte schon P. Tannery („Sur l'authenticité des axiomes d'Euclide“, *Mém. scient.*, II, 48-63) schreiben: „Il ne faut pas croire que les postulats et les notions communes représentent tout ce qu'Euclide admet de fait dans ses démonstrations“.

gleich am allerersten Anfang der „Elemente“ in einer dreifachen Gruppe aufgezählt werden; die lateinischen Namen der einzelnen Bestandteile dieser Gruppe heissen: *Definitiones*, *Postulata* und *Communes animi conceptiones*. Versuchte man nun Vermutungen darüber aufzustellen, wie diese dreifache Gruppe zustande kam, so liesse sich im Sinne des bisher Entwickelten folgendes sagen.

Die Definitionen der Geometrie sind wohl einfach den Definitionen der Arithmetik nachgebildet worden. Man hat schon gesehen, dass die Definition des „Punktes“ eigentlich nur einen Versuch darstellt, den Begriff der arithmetischen „Eins“ in etwas veränderter Form auf das Gebiet der Geometrie hinüberzutragen. Der „Punkt“ der Geometrie, der „keine Teile hat“, soll offenbar ebenso *unteilbar* sein, wie die „Eins“ der Arithmetik. Auch die Aufeinanderfolge der beiden ersten Definitionen der Geometrie — „Punkt ist das, was keine Teile hat“ und „Linie ist eine Länge ohne Breite“ — erinnert an das Nacheinander der beiden arithmetischen Definitionen: „Eins“ und „Zahl“. Man fragt sich nur, warum eigentlich das Beispiel der Arithmetik auch in der Definition der „Linie“ nicht in noch höherem Masse befolgt wurde? Hätte man nicht auch die Linie, diese „Länge ohne Breite“, ähnlich definieren können, wie die Zahl in der Arithmetik bestimmt wurde? Wenn die Zahl aus Einheiten zusammengesetzte Menge ist, dürfte man dann nicht die Linie als eine „Summe von Punkten“ auffassen? — Dieser Gedanke wäre allerdings naheliegend gewesen; schliesslich erhielt ja die Geometrie nach den Worten des Proklos ihre „Vollendung und Begrenzung“ von der Arithmetik her. Und doch hat man es vermieden, die Linie oder die Strecke klar und eindeutig als eine „Summe von Punkten“ zu bezeichnen. Man wird im folgenden sehen, dass dies in der Tat eine bewusste Voraussicht war. Dadurch hätte man nämlich die sowieso empfundene Widersprüchlichkeit in der Grundlegung der Geometrie nur noch mehr hervorgehoben. Aber vorläufig sei nur daran erinnert, dass es schon im vorigen Kapitel gezeigt wurde: die Definition des Punktes durfte auch die alten Pythagoreer kaum befriedigen. Auch sie selber mussten sich darüber im klaren sein, dass diese Definition kaum auf derselben Stufe steht, wie ihre arithmetischen Definitionen. Durch sie und ähnliche Aussagen ist es keineswegs gelungen, die Geometrie ebenso widerspruchsfrei wie die Arithmetik zu begründen.

Wohl eben durch die Tatsache, dass man in der Grundlegung der Geometrie mit blossen Definitionen nicht auskam, ist man veranlasst worden, die sog. *Postulata* und *Communes animi conceptiones* zusammenzustellen. — Der rein geometrische Ursprung der euklidischen Postulate liegt klar zu Tage; man kann diese Sätze in der Tat nur in der Geometrie gebrauchen. Nicht so einfach ist das Beurteilen der sog. *Communes animi conceptiones*. Wohl gibt es auch unter diesen solche, die eindeutig geometrischen Charakters sind, wie z.B. besonders das sog. Axiom der Kongruenz (7 : „Was sich deckt, ist gleich“); aber die meisten dieser unbewiesenen Grundlagen (*Communes animi conceptiones*) sind doch derart formuliert, dass ihre Gültigkeit auch von der Geometrie abgesehen ganz allgemein zu sein scheint, wie z.B. : „Wenn Gleiches von Gleichem abgezogen wird, sind die Reste gleich“. Dass aber dennoch die euklidischen *Communes animi conceptiones* rein geometrischen Ursprungs sind — das heisst : man wurde ursprünglich durch rein geometrische Probleme veranlasst, um diese Aussagen ohne Beweis den mathematischen Erörterungen vorzuschicken —, wird sich erst im folgenden ergeben. Ich will nämlich jetzt versuchen, näher zu beleuchten, wie man wohl einst zu der Aufstellung dieser Art Grundsätze (*Communes animi conceptiones*) gezwungen wurde.

Vor allem sei daran erinnert, wie man das Entstehen der *Communes animi conceptiones* in der früheren Forschung erklärte. P. Tannery hat zweifellos richtig feststellen können, dass jene griechische Bezeichnung dieser Grundlagen, die in unserem Euklid-Text vorliegt (*κοινὰ ἔννοιαι*), erst späteren, stoischen Ursprungs ist (95). Ja, es scheint aus einer beiläufigen Bemerkung von Tannery auch noch hervorzugehen, dass er nahe bei der Ansicht war : man hätte den älteren, ursprünglicheren griechischen Terminus für die *Communes animi conceptiones* eben unter stoischem Einfluss erst nachträglich in den Euklid-Texten verändert (96). Aber diesen letzteren, und meiner Meinung nach

(95) *Mém. scient.*, II, 60 : „Ce terme d'*ἔννοια* n'est nullement de la langue philosophique de l'époque; on le chercherait vainement avec une signification technique (von mir unterstrichen — Ä. SZ.) dans l'œuvre de Platon ou dans celle d'Aristote; il appartient aux stoiciens dont l'école commençait seulement au temps d'Euclide etc.“

(96) *Mém. scient.*, II, 62-63 : „il est à remarquer, que les stoiciens changèrent complètement le sens du mot *ἄλτωμα*, et appelèrent de ce nom une proposition

richtigen Gedanken (97) liess Tannery — vielleicht auch nicht völlig bewusst — eigentlich dennoch fallen, als er zu gleicher Zeit auch den anderen Gedanken vertrat, dass man nämlich die ganze Gruppe der *Communes animi conceptiones* erst in nacheuklidischer Zeit zusammengestellt hätte; man wäre erst infolge der Tätigkeit jenes Apollonios von Perge auf diese Art Grundlagen aufmerksam gemacht worden, der vergebliche Versuche unternahm, um diese Sätze zu beweisen (98). — Nun ist die Ansicht von dem späten, nacheuklidischen Ursprung der *Communes animi conceptiones* auch darum schon sehr unwahrscheinlich, weil man weiss, dass die ältere Bezeichnung für diese Art Grundsätze, das Wort *ἀξίωμα*, als mathematischer Terminus schon in der Zeit des Aristoteles allgemein gebräuchlich war; ja Aristoteles selber zitiert sogar öfters und eben als „Axiom“ einen solchen unbeweisbaren Satz, der bei Euklid unter den *Communes animi conceptiones* (Nr. 3) überliefert wurde: (99) „Wenn Gleiches von Gleichem abgezogen wird, sind die Reste gleich.“ Diese Tatsache spricht schon in sich allein dafür, dass wohl auch die euklidischen *Communes animi conceptiones* — mindestens im allgemeinen — ebenso ein aus alter Zeit überliefertes Gedankengut darstellen, wie die meisten Definitionen bei Euklid. — In der Tat lässt sich diese Vermutung auch mit anderen Argumenten näher begründen. Ich will den nächsten Abschnitt der Untersuchung mit der Prüfung des sog. 8. Axioms bei Euklid beginnen.

*
* *

quelconque, vraie ou fausse; *c'est là qu'il faut chercher la raison de l'adoption d'une autre désignation dans nos textes d'Euclide* (von mir unterstrichen — Á. SZ.).

(97) Über die Fragen der Terminologie siehe ausführlicher einstweilen: Á. Szabó, „Die Grundlagen in der frühgriechischen Mathematik“, *Studi italiani di Filologia Classica*, 1958.

(98) *Mém. scient.*, II, 56: „Quant aux *notions communes*, elles ne seraient pas de lui (= Euclide); il les aurait employées comme allant de soi ou comme supposées par les définitions; l'attention ne se serait portée sur cette question qu'à l'époque d'Apollonius, qui essaya de démontrer ces propositions et reconnut leur liaison avec la définition de l'égalité et des opérations de l'addition et de la soustraction géométrique. Les éditeurs successifs d'Euclide auraient pris depuis lors l'habitude d'insérer un recueil plus ou moins complet de ces notions suivant le point de vue auquel ils se plaçaient, et la tradition serait restée longtemps assez flottante à cet égard.“

(99) Interessant, dass diese Tatsache auch P. Tannery nicht unbekannt blieb (vgl. *Mém. scient.*, II, 62), und doch hat er aus ihr keine richtige Konsequenz ziehen können. Zur Kritik über diesen Punkt siehe meinen eben zitierten Aufsatz „Die Grundlagen in der frühgriechischen Mathematik“ a.a.O.

Das 8. Axiom von Euklid heisst: „Das Ganze ist grösser als der Teil“ (100). Interessant ist diese mathematische Grundlage auch schon darum, weil sie in Euklids „Elementen“ — mindestens in der angeführten Form — eigentlich nur selten (z.B. in dem Beweis des Satzes Elem. I 16) gebraucht wird. Aber statt dessen begegnet man in Euklids indirekten Beweisführungen ziemlich häufig einer stereotypen Schlussformel, die mit dem genannten Axiom irgendwie verwandt ist. So heisst z.B. am Ende der indirekten Beweisführung von Satz *Eucl. El. I 6*: wenn jene falsche Annahme, die widerlegt werden soll, bestünde, „so wäre das Kleinere dem Grösseren gleich, was unmöglich ist“. Nun war diese Schlussformel — „das Kleinere wäre dem Grösseren gleich, was unmöglich ist“ — zu jener Zeit, als Euklid lebte, allem Anschein nach schon ein längst bekanntes, gewöhnliches Gemeingut der geometrischen Beweisführungen. Nicht nur Euklid gebraucht diese Formel auf Schritt und Tritt, sondern man begegnet ihr in haargenau derselben Formulierung auch schon bei dem etwas älteren Autolykos von Pitane (101). Der moderne Herausgeber des Euklid-Textes, J. L. Heiberg verweist in solchen Fällen in seiner lateinischen Übersetzung jedesmal auf das 8. Axiom (102). Selbstverständlich ist dieser Hinweis völlig am Platze. Das 8. Axiom und die genannte stereotype Formel sind voneinander sowohl inhaltlich als auch genetisch untrennbar. Es fragt sich nur, worin eigentlich genauer ihr Zusammenhang besteht? P. Tannery, der zum ersten Male auf diese merkwürdige Erscheinung aufmerksam machte — dass nämlich das 8. Axiom und die mit ihm verwandte stereotype Formel lange nicht völlig identisch sind — versuchte im Grunde gar keine Erklärung dafür. Er scheint nur der Ansicht gewesen zu sein, dass man das 8. Axiom erst nachträglich und ziemlich unglücklich aus Euklids oft gebrauchter stereotyper Formel abstrahiert hätte (103).

Nun muss man vor allem eine relative Chronologie der beiden, des Axioms und der mit ihm verwandten Formel, versuchen. Es

(100) *Eucl. Elem.*, I. Communes animi conceptiones VIII: τὸ ὅλον τοῦ μέρους μείζον ἐστίν.

(101) *Z.B.* „Die sphaera quae movetur“ (ed. Hultsch) im 3. Satz: ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΗ (Strecke) τῇ ΔΖ (Strecke), ἢ ἐλάσσων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

(102) *Z.B.*, Vol. I, p. 25 et passim.

(103) *Mém. scient.*, II, 54.

fragt sich nämlich, ob man in der Tat früher die stereotype Formel gefunden und daraus erst später das 8. Axiom abstrahiert hätte — wie Tannery es glaubte, oder ob man doch nicht eben umgekehrt die spätere stereotype Formel aus dem früher erkannten Axiom abgeleitet hätte? — Ich glaube, dass sich diese Frage mit grosser Wahrscheinlichkeit beantworten lässt. Man muss sich nur die beiden Möglichkeiten ernstlich ins Auge fassen, und man wird gleich sehen, dass die eine von ihnen viel wahrscheinlicher als die andere ist.

Es werden in dem Axiom („das Ganze ist grösser als der Teil“) zwei Begriffe „das Ganze“ und „der Teil“ kontrastiert. Degegen werden in der euklidischen Formel („das Kleinere wäre dem Grösseren gleich etc.“) gar nicht dieselben Begriffe benutzt. Die Formel sagt anstatt „das Ganze“ das *Grössere*, und anstatt „Teil“ das *Kleinere*. Nun ist diese Ersetzung der Begriffe — wenn man dabei von dem Axiom als der ursprünglichen Form ausgeht! — im Grunde gar nicht schwer zu verstehen. Denn man ist in der Tat aus der Praxis daran gewohnt, dass das Ganze von einem Ding immer das Grössere, und der Teil von demselben immer das Kleinere ist. Es ist also sehr wohl möglich, dass eine ursprüngliche Formel, in der die engeren Begriffe „das Ganze“ und „der Teil“ benutzt wurden, mit der Zeit in eine spätere Formel hinübergeht, in der schon die entsprechenden allgemeineren Begriffe „das Grössere“ und „das Kleinere“ einander gegenübergestellt werden. Das Entstehen der stereotypen Formel aus dem Axiom ist also allerdings verständlich.

Dagegen versuche man jetzt den umgekehrten Weg der Entwicklung! Nehmen wir an, dass man die stereotype Formel („das Kleinere wäre dem Grösseren gleich, was unmöglich ist“) auf irgendeinem noch nicht geklärten Wege *früher* gefunden, und dass man erst später daraus das Axiom selbst gemacht hätte. Aber wäre es nicht willkürlich gewesen, die Begriffe „das Grössere“ und „das Kleinere“ mit solchen Begriffen, wie „das Ganze“ und „der Teil“ zu ersetzen? Ist etwa „das Grössere“ immer auch mit dem „Ganzen“, und das „Kleinere“ immer mit einem „Teil“ gleichbedeutend? — Ich glaube, man muss sich nur diese Fragen stellen, und gleich sieht man, dass der Weg der Entwicklung viel leichter zu verstehen ist, wenn man von dem Axiom als dem ursprünglich Gegebenen ausgeht. Aus dem Axiom („das Ganze ist grösser als

der Teil“) lässt sich eine solche Formel („das Kleinere wäre dem Grösseren gleich etc.“) ohne Schwierigkeiten ableiten. Dagegen wäre der umgekehrte Weg der Entwicklung — von der Formel aus zu dem Axiom — kaum denkbar.

Die kurze Betrachtung über die relative Chronologie scheint also allerdings den Gedanken naheulegen, dass früher das behandelte Axiom konzipiert war, und dass sich erst später daraus jene stereotype Formel entwickelt hatte, die schon in der Zeit vor Euklid ein oft gebrauchter Gemeinplatz der geometrischen Beweisführungen war. Die Frage ist nur : warum man eigentlich und zu welcher Zeit das Axiom selbst aufgestellt haben mag?

Die Aussage — „das Ganze ist grösser als der Teil“ — kommt zunächst dem gesunden Menschenverstand so selbstverständlich vor, dass man sich beinahe wundert, warum eigentlich eine so einfache „Wahrheit“ als Axiom ausgesprochen werden musste? Diese Frage ist umso berechtigter, da dies Axiom selbst von Euklid eigentlich nur ziemlich selten benutzt wird. Jene oft gebrauchte Wendung Euklids, deren Entstehen aus dem 8. Axiom eben erklärt werden konnte, ist mit der Aussage des Axioms gar nicht identisch. Ja man fragt sich : warum Euklid nicht eher die Begriffe „Grösseres“ und „Kleineres“ in je einer Definition erklärt hatte? Das wäre für sein Werk allerdings nützlicher gewesen, als das nur selten gebrauchte 8. Axiom, woraus man nur mit Mühe erklügeln kann, wie es sich eigentlich im Laufe der alltäglichen Beweispraxis der Geometrie zu jener stereotypen Formel entwickelte, die in der Tat oft gebraucht wird. Die Tatsache, dass Euklid dennoch nur das 8. Axiom unter seinen Grundlagen aufzählt, ohne es auch mit zwei Definitionen („Grösseres“ und „Kleineres“) zu ergänzen, zeugt eigentlich dafür, wie wenig er mathematisch selbständig war. Das meiste, was er leisten konnte, bestand darin, dass er das altüberlieferte Gedankengut seiner Vorgänger schlecht und recht zusammenstellte.

Nun was mag aber der Grund und Anlass gewesen sein, dass man eine solche Aussage als Axiom aufstelle : „das Ganze ist grösser als der Teil“? — Ich glaube, man muss einmal versucht haben, die Wahrheit dieser scheinbar selbstverständlichen Behauptung zu bestreiten, und als man sah, zu welchen Konsequenzen ein solcher Versuch führt, musste man die gegenteilige Behauptung in einer zwar einleuchtenden aber nicht beweisbaren Aussage

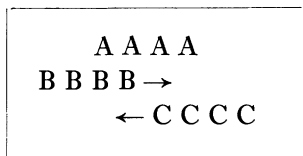
festlegen. Das war wohl der Ursprung des merkwürdigen 8. Axioms. Ja, wir sind in der glücklichen Lage, auch mit Namen angeben zu können, wer jene selbstverständliche Wahrheit bestritt, die eben erst *nach* diesem Angriff als 8. Axiom ausgesprochen werden musste.

Aristoteles berichtet einmal (104) über eine merkwürdige Argumentation des Eleaten Zenon, deren Konklusion darin bestand, „dass die halbe Zeit gleich der doppelten sei“ (ἴσον εἶναι χρόνον τῷ διπλάσι τὸν ἡμισυν). Leider, kennen wir Zenons eigene Ausdrücke überhaupt nicht; wir wissen auch von dem blossen Inhalt seiner Argumentation nur aus dem Text des Aristoteles, der ihn widerlegen wollte. Man muss also in der Interpretation sehr umsichtig sein. Nun ist aber Zenons paradoxe Konklusion doch sehr auffallend. „Die halbe Zeit wäre dem doppelten gleich“ — diese merkwürdige Behauptung will einen solchen Zusammenhang zwischen den Begriffen „die Hälfte“ und „das Doppelte“ feststellen, der jeder nüchternen Erfahrung widerspricht. Noch interessanter wird das Paradoxon, wenn man bedenkt, dass sich die Begriffe „die Hälfte“ und „das Doppelte“ in dem gegebenen Zusammenhang ohne jede Schwierigkeit durch die anderen : „Teil“ und „Ganzes“ ersetzen lassen. Wenn Zenon behauptet, „dass die halbe Zeit gleich der doppelten sei“, so setzt er offenbar einen gewissen *Teil* irgendeiner Zeit dem *Ganzen* derselben Zeit gleich. Seine Paradoxie besagt also gerade das Gegenteil dessen, was das 8. Axiom bei Euklid dahin formuliert, dass das Ganze grösser als der Teil sei. — Man dürfte sich also eigentlich schon auf Grund dieser einfachen Feststellung fragen : ob Euklids 8. Axiom nicht eben deswegen aufgestellt worden sei, weil man die „Wahrheit“, die in ihm ausgesprochen wird, in einer Zeit wohl durch solche paradoxen Konklusionen, wie Zenons erwähnte Argumentation, angezweifelt hatte? In der Tat stünde einer solchen Vermutung einstweilen nur noch die Tatsache im Wege, dass Zenons Paradox nach dem Wortlaut des Aristoteles eine Behauptung über die *Zeit* enthielt, während das 8. euklidische Axiom offenbar ein *mathematischer* Grundsatz ist. Man sieht also noch nicht klar genug, ob Zenons paradoxe Argumentation die Mathematiker (oder die Geometer) in der Tat unmittelbar zur

(104) Aristoteles, *Phys. Z.*, 9.239 b 33.

Aufstellung des 8. Axioms veranlasst, oder ob sie diese in ihrer Tätigkeit nur von weitem her irgendwie beeinflusst haben mag. Darum will ich vor allem eine Interpretation der Zenonschen Paradoxie — mindestens in grossen Zügen — versuchen.

Der Text des Aristoteles, der über Zenons genannte Argumentation berichtet, bietet zwar einige noch keineswegs beruhigend gelöste philologische Schwierigkeiten (105), aber man kann daraus Zenons Gedankengang doch einwandfrei rekonstruieren. Diese Rekonstruktion wird besonders dadurch erleichtert, dass der Aristoteles-Kommentator, Simplicius auch eine erläuternde Figur zu der Textstelle nach einem älteren Erklärer (Alexander von Aphrodisias) aufbewahrt hatte (106). Auch ich werde dieselbe Figur in der Erklärung benutzen.



Zenon argumentierte also nach Aristoteles folgendermassen: Es seien in einem Stadion drei Körpergruppen — wie die Figur veranschaulicht — in je einer Reihe aufgestellt gegeben. Die je vier Buchstaben (A A A A,

B B B B und C C C C) bezeichnen also je vier Körper. Die Körper der ersten Reihe (A A A A) sollen sich in Ruhe befinden. Dagegen sollen sich die Körper der beiden anderen Reihen (B und C) mit gleicher Geschwindigkeit zwar, aber — wie auch die Pfeile zeigen — in entgegengesetzter Richtung bewegen. Beginnen nun die bewegten Körper ihre Bewegung zu gleicher Zeit und gerade dort, wo man sie an der Figur sieht, so werden die beiden Reihen offenbar zu gleicher Zeit die entgegengesetzten Endpunkte ihrer Laufbahn erreichen; das heisst: bei gleicher Geschwindigkeit wird der erste Körper B in demselben Zeitpunkt bei dem letzten Körper A (rechts) ankommen, in dem der erste Körper C bei dem ersten A (links) ankommt. — Wollte man nun —

(105) Ich glaube, dass jene noch ungelösten (aber nicht unlösbaren) Textprobleme, die ich hier gar nicht behandeln will, wohl noch die Aristoteles-Interpretation beeinflussen können, aber sie berühren kaum jenen Gedankengang des Zenon, den ich in dieser Arbeit entwickle. Allerdings sei es hier auf den wenig beachteten Erklärungsversuch von J. Lachelier („Note sur les deux derniers arguments de Zénon d'Élée contre l'existence du mouvement“, *Revue de Métaphysique et de Morale*, 18, 1910, 345-355) aufmerksam gemacht.

(106) Simplicius 1016 ff.; vgl. auch 1019, 27. Die Textstelle und die Figur sind auch bei H. Diels, *Vorsokratiker*⁴, I, 19, Zenon A 28 abgedruckt.

nach Zenons Argumentation — den gemachten Weg der bewegten Körper, oder was damit in diesem Fall gleichbedeutend ist : die *Zeitdauer* ihrer Bewegung graphisch messen, so liesse sich diese Grösse mit zwei A-Buchstaben (A A) bezeichnen, denn in der Tat ist der je erste bewegte Körper beider Reihen an zwei ruhenden A-Körpern vorbeigegangen. Man könnte aber nach Zenons Denkweise dieselbe Zeitdauer der Bewegung nicht nur an der Gruppe der ruhenden Körper (A A A A), sondern mit ebensoviel Recht auch an denjenigen Körpern messen, die sich mit gleicher Geschwindigkeit in entgegengesetzter Richtung bewegen. In diesem letzteren Fall würde man jedoch die Zeitdauer der Bewegung mit vier Buchstaben (B B B B bzw. C C C C) bezeichnen müssen, denn der erste bewegte B-Körper geht an vier bewegten C-Körpern vorbei, und natürlich auch umgekehrt geht der erste bewegte C-Körper an vier bewegten B-Körpern vorbei. Das paradoxe Ergebnis der beiden Messungen bestünde also darin, dass dieselbe Zeitdauer sowohl mit zwei Buchstaben (A A) als auch mit vieren (B B B B bzw. C C C C) gemessen werden könnte. Darum sei nach Zenons Konklusion „die halbe Zeit mit der doppelten gleich“.

Ehe wir die eingehendere Interpretation versuchten, sei hier auf einen solchen merkwürdigen Zug des Gedankenganges aufmerksam gemacht, der bisher ausser acht gelassen wurde. Wie gesagt, bezeichnen alle Buchstaben der beigegebenen Figur zunächst *Körper*, die sich bewegen bzw. in Ruhe befinden. Dieselben Buchstaben bezeichnen aber in dem Augenblick, als man die erwähnten Messungen durchführt, nicht mehr nur die vorigen Körper, sondern auch gewisse *Strecken*. Denn es ist ja klar, dass wenn man die Zeitdauer der Bewegung graphisch mit zwei A-Buchstaben misst — weil in dieser Zeit der bewegte Körper (B oder C) an zwei A-Körpern vorbeigegangen war —, so bezeichnen die beiden A-Buchstaben (A A) nicht mehr einfach nur jene ruhenden Körper, sondern auch jene *Strecke* des Weges, die durch den bewegten Körper (B oder C) während der Zeit des Vorbeigehens hinter sich gelegt wurde.

Die Beobachtung, dass die Buchstaben im Sinne des Gedankenganges nicht nur einfach Körper sondern gleichzeitig auch *Strecken* bezeichnen, ist darum wichtig, weil sie die Datierung der beigegebenen erläuternden Figur ermöglicht, bzw. eine naheliegende

Vermutung erhärtet. Es wurde ja schon gesagt, dass die bei Simplicius überlieferte erläuternde Figur unmittelbar von dem alten Aristoteles-Erklärer, Alexander von Aphrodisias (Ende des 2. Jahrhunderts u.Z.) stammt. Dass aber dieselbe Figur über Aristoteles hinaus weit in die erste Hälfte des 5. Jahrhunderts v.u.Z. selbst auf den Eleaten Zenon zurückgehen muss, dafür bürgt die altertümliche Bezeichnungsart: Strecken und Summen von Streckenteilen (A A A A) konnten nur im 5. Jahrhundert v.u.Z. auf diese Weise bezeichnet werden (107).

Ein anderer Schluss, der sich aus derselben Beobachtung über die Bezeichnungsart ergibt, ist das folgende. Zenon sprach über „halbe Zeit“ und über „das Doppelte der halben Zeit“. Dabei bezeichnete er die „halbe Zeit“ mit zwei Buchstaben (A A), während das Zeichen für das „Doppelte“ vier Buchstaben (B B B B oder C C C C) waren. Nun vertreten aber die Buchstaben in dieser Beziehung offenbar Strecken; die „halbe Zeit“ wird als eine „halbe Strecke“ (A A) und das Doppelte derselben als eine „ganze Strecke“ (B B B B oder C C C C) versinnbildlicht. — Man ersieht also aus dieser Beobachtung, dass Zenons Paradox doch etwas auch mit der Geometrie zu tun haben musste, denn man arbeitet ja mit Strecken gewöhnlich eben in der Geometrie. Jene Vermutung also, dass man das 8. euklidische Axiom wohl darum aufstellen musste, weil Zenons Paradox die selbstverständliche „Wahrheit“ des Axioms bestritt, gewinnt infolge der vorigen Beobachtung an Wahrscheinlichkeit.

Nun wollen wir aber jetzt auch den sog. „Trugschluss“ von Zenon näher besehen. Es geht aus dem Bericht eindeutig hervor, dass Aristoteles fest davon überzeugt war: die ganze Argumentation wäre falsch. Seine Schüler waren noch eifriger in der Widerlegung. Vielleicht ging eben Eudemos, der erste Historiker der Mathematik, in dieser Beziehung am weitesten. „Diese Beweisführung des Zenon ist unglaublich töricht, wie Eudemos sagt, weil sie den in ihr enthaltenen Trugschluss offenkundig zur Schau trägt“ — liest man bei Simplicius (108). Zenon scheint also mit

(107) Man vgl. dazu die Bezeichnungsart des Archytas (bei Boetius, *De institutione musica*, ed. G. Friedlein, Lipsiae 1867, p. 285): die Summe der Strecken $D + E$ wird als $D E$ bezeichnet; dazu die Bemerkung von B. L. van der Waerden, *Math. Ann.*, 120, 1947/49, 134 und Á. Szabó, *MAIA*, 1958, 120 f.

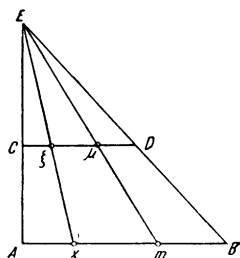
(108) Simplicius zu Aristoteles, *Physik*, 1019, 32 ff.

seiner Paradoxie in der Antike kein grosses Glück gehabt zu haben. Ja, auch heute noch wird er oft ähnlich, wie einst im Kreise der Aristoteles-Schüler, beurteilt. Auch darum wird es sich schon lohnen, einmal sowohl den Trugschluss als auch den genialen Gedanken, der dahinter steckt, genauer zu prüfen.

Man könnte also den „Trugschluss“ von Zenon etwa in dem folgenden entdecken. Er hatte zwar Recht, als er dachte, dass im Falle unveränderlicher Geschwindigkeit (c) sowohl die Zeit (t) als auch der gemachte Weg (s) sich als eine und dieselbe Strecke darstellen lassen; einem jeden Zeitabschnitt der Bewegung entspricht ein Abschnitt des gemachten Weges, bzw. ein Abschnitt der Strecke. Aber Zenon hätte dennoch einen Fehler begangen, als er ausser acht liess, dass auch während derselben Zeitspanne (t) der gemachte Weg das Doppelte wird ($2s$), wenn man die Geschwindigkeit (c) verdoppelt. Denn es ist ja klar, dass die (relative) Geschwindigkeit der beiden Körpergruppen eigentlich „verdoppelt“ wird, wenn die Körpergruppen B und C mit „unveränderlicher Geschwindigkeit“ zwar, aber in entgegengesetzter Richtung aneinander vorbeigehen. Dadurch wird aber nur der gemachte Weg der beiden Körpergruppen (ihre Entfernung voneinander) und nicht auch die Zeitspanne der Bewegung verdoppelt ($2s = 2c \cdot t$). Jene „halbe Strecke“ von Zenon (d.h. die zwei Buchstaben A A der ruhenden Körpergruppe in der Zeichnung) veranschaulicht also sowohl die Zeitspanne der Bewegung als auch den gemachten Weg, während die „ganze Strecke“ (die vier Buchstaben B B B B oder C C C C der einen bewegten Körpergruppe) *nur* den gemachten Weg und nicht auch die Zeitspanne veranschaulicht. — Der Trugschluss bestünde also einerseits darin, dass die Verdoppelung der „unveränderlichen“ Geschwindigkeit verschwiegen wird, und andererseits darin, dass die „ganze Strecke“ als eine Veranschaulichung sowohl des gemachten Weges als auch der Zeitspanne der Bewegung angesehen wird, wo sie in der Tat — eben infolge der Verdoppelung der Geschwindigkeit — nur noch eine Veranschaulichung des gemachten Weges aber nicht mehr auch diejenige der Zeitspanne der Bewegung darstellt.

Nun habe ich dadurch den „Trugschluss“ von Zenon im Sinne der treuen Aristoteles-Schüler wohl enthüllt, aber ich glaube gar nicht, dass diese Interpretation dem genialen Gedanken des Eleaten gerecht wäre. Irreführend sind nämlich in dieser Inter-

pretation die Begriffe „Geschwindigkeit“ (c) und „Verdoppelung der Geschwindigkeit“ ($2c$). Man versteht unter „Geschwindigkeit“ natürlich das Verhältnis des gemachten Weges zu der Zeit der Bewegung. „Geschwindigkeit“ ist also nach unserer Denkweise eine *Strecke* des Weges, diejenige nämlich, die der bewegte Körper während einer bestimmten *Zeitspanne* hinter sich legt. Wir lösen also sowohl den Weg des Körpers als auch die Zeit der Bewegung in solche kleinere Einheiten auf, die mit irgendeinem Längenmass (der Weg) bzw. mit irgendeiner Dauer (die Zeit) gemessen werden können. Dagegen löste Zenon die Zeit der Bewegung in lauter *dauerlose* Zeitpunkte („Jetzt“) auf (109), und die Strecke dementsprechend in solche Streckenpunkte, die gar kein Ausmass mehr hatten (110). Es besteht also nach ihm sowohl die „halbe Strecke“ als auch die „ganze Strecke“ (das Doppelte der „halben Strecke“) aus unendlich vielen Punkten; sie sind zwei Mengen von unendlich vielen Punkten. Und könnten diese Mengen doch nicht irgendwie „gleich“ sein, wie Zenon es behauptete?



Sei die Strecke AB das Doppelte von der Strecke CD, und man fasse beide Strecken als unendliche Punktmengen auf, so lässt sich eine umkehrbar eindeutige Abbildung beider Mengen aufeinander folgendermassen herstellen. Verbinde man die Punkte A und C auf der einen, und B und D auf der anderen Seite durch gerade Linien miteinander, und verlängere man diese bis zu ihrem Schnittpunkt in E. Wählt man nun einen beliebigen Punkt x auf der Strecke AB und verbindet man diesen durch eine gerade Linie mit E, so bekommt man den Schnittpunkt ξ auf der Strecke CD; ξ ist die Abbildung des Punktes x . Umgekehrt: verbindet man einen beliebigen Punkt μ auf der Strecke CD mit E, so liefert die Verlängerung derselben geraden Linie den Schnittpunkt m auf der Strecke AB; der Punkt m ist die Abbildung des Punktes μ .

(109) Vgl. Aristoteles, *Phys. Z.*, 239 b 30.

(110) Dass Zenon auch die Strecke in unendlich viele Punkte ohne Ausmass auflöste, geht aus den beiden Aristoteles-Stellen, *Phys. Z.*, 9.239 b 9 und 2.233 a 21 hervor.

(111) Eine solche umkehrbar eindeutige Abbildung zweier Mengen aufeinander — der Zeitspanne der Bewegung und des gemachten Weges — wird in der Tat durch die *Bewegung* selbst vollzogen.

Auf diese Weise lassen sich alle Punkte der Strecke CD auf die Punkte der Strecke AB und auch umgekehrt abbilden. Nicht nur einem jeden Punkt der Strecke CD entspricht ein einziger Punkt der Strecke AB, sondern was noch paradoxer klingt : auch jedem einzelnen Punkt der grösseren Strecke AB entspricht ein und nur ein Punkt der kleineren Strecke CD. — Das heisst aber in der Sprache der Mengenlehre, dass die beiden Mengen *äquivalent* sind; auch die Teilmenge kann der ganzen Menge — natürlich nur im Falle von unendlichen Mengen — äquivalent sein.

Zenon hatte also, nachdem er die Zeit in unendlich viele dauerlose Zeitpunkte („Jetzt“) auflöste, mit seiner paradoxen Behauptung, dass „die halbe Zeit ihrer Doppelten *gleich* (= äquivalent) sei“, im Sinne der Mengenlehre selbstverständlich Recht. Sein Paradox besagt ja — wie man sieht — bloss die Äquivalenz zweier unendlicher Mengen. Natürlich sind in dieser Gedankenführung unsere Begriffe „Geschwindigkeit“ und „Verdoppelung der Geschwindigkeit“ unbrauchbar. Zu jedem einzigen *dauerlosen* Zeitpunkt der Bewegung gehört nur ein einziger solcher Streckenpunkt des gemachten Weges, der gar kein Ausmass hat. Die „Verdoppelung der Geschwindigkeit“ wäre im Sinne dieser Gedanken auch schon deswegen undenkbar, weil es hiesse, dass der Körper auf einmal (in demselben dauerlosen Zeitpunkt) zwei verschiedene Streckenpunkte einnähme, also eigentlich an zwei verschiedenen Stellen wäre — wobei selbst der Ausdruck „Stelle“ kaum noch einen Sinn hätte, da der Streckenpunkt kein Ausmass hat, also auch kaum mehr als „Raum“ gedacht werden kann.

Natürlich wollte Zenon auch mit dieser Paradoxie nur die Undenkbarkeit (= Widersprüchlichkeit) der Begriffe „Bewegung“, „Zeit“ und „Raum“ nachweisen. Aber er hat in diesem Fall mit seiner paradoxen Beweisführung auch die richtige Lösung solcher Probleme sozusagen vorweggenommen, die erst die moderne Mengenlehre auf einer höheren Stufe behandeln konnte. Er zeigte nämlich, dass unsere Begriffe „der Teil“, „das Ganze“ und „gleich“ eigentlich *nur im Falle von endlichen Mengen gültig sind*. Im Falle von unendlichen Mengen kann auch der Teil dem Ganzen *äquivalent* sein. — Der Fehler seiner Beweisführung besteht also eigentlich gar nicht darin, dass er die „Verdoppelung der Geschwindigkeit“ ausser acht liess; es war für ihn gar nicht nötig, dass er diese Tatsache einer anderen, ihm fremden Begriffsbildung

berücksichtige. Ein Fehler war eher der Umstand, dass er die Begriffe „gleich“ und „äquivalent“ nicht unterschied; er bezeichnete auch die Äquivalenz mit demselben griechischen Wort (*ἴσον*), das sonst nur „gleich“ hiess. Aber ich glaube, dass auch wir selber erst seit G. Cantor, dem Begründer der Mengenlehre, diese Unterscheidung konsequent durchzuführen gelernt haben.

Man sieht dabei auch, dass Zenon eigentlich nicht nur so viel nachgewiesen hatte, was Aristoteles über ihn berichtet, dass nämlich „die halbe Zeit der doppelten *gleich* (= äquivalent) sei“. Er musste in derselben Argumentation auch nachweisen, dass die „halbe Strecke“ (der Teil einer Strecke) der „ganzen Strecke“ *gleich* (= äquivalent) wäre. Diese Gedanken stellten nur die konsequente Weiterführung jener Definition dar, mit der die Eleaten — oder die Pythagoreer im Sinne der Eleaten — den *Punkt* bestimmten. Wenn der Punkt gar keine Teile hat, dann kann man sich die Strecke nur als eine Menge von *unendlich vielen* Punkten denken, und in diesem Fall ist jede beliebige Strecke einer anderen, ja auch der Teil einer Strecke der ganzen Strecke äquivalent. Deswegen konnte man also in der Geometrie die „Linie“ oder die „Strecke“ nicht nach Analogie der arithmetischen Definition der „Zahl“ als eine „Summe von Punkten“ bestimmen. Und erst in diesem Zusammenhang wird auch verständlich, warum man das 8. euklidische Axiom — *das Ganze ist grösser als der Teil* — aufstellen musste.

7. — WIE KAM MAN ZU DER AXIOMATISCHEN GRUNDLEGUNG DER GEOMETRIE?

Es hat sich im vorigen Kapitel gezeigt, dass der historische Anlass zur Aufstellung des 8. euklidischen Axioms wohl Zenons behandelte paradoxe Konklusion sein musste. Zenon behauptete nämlich — wenn man den aristotelischen Bericht über seine Argumentation im Sinne dessen, was oben dargestellt wurde, etwas allgemeingültiger formulieren darf —, dass „der Teil dem Ganzen *gleich* (= äquivalent) sei.“ Gerade gegen diese Behauptung legt das 8. Axiom die empirische Wahrheit fest: „das Ganze ist grösser als der Teil.“

Nun vermag die Klärung des historischen Ursprungs zunächst

gleich auch jene Vermutung zu bekräftigen, dass das 8. Axiom und jene stereotypische Formel, die bei Euklid so oft gebraucht wird („das Kleinere wäre dem Grösseren gleich, was unmöglich ist“), in der Tat sehr eng miteinander zusammenhängen. Rein formalistisch betrachtet redet nämlich das 8. Axiom mit keinem Wort über „Gleichheit“, und man könnte beinahe denken, dass der Begriff der „Gleichheit“ erst in der abgeleiteten Form, in der stereotypen Wendung auftrete. Nachdem man jedoch weiss, dass das 8. Axiom gerade gegen eine „falsche“ Behauptung über die Gleichheit aufgestellt werden musste, kann man keinen Augenblick mehr darüber zweifeln, dass sich eigentlich auch diese Aussage — das 8. Axiom — mit dem Begriff der „Gleichheit“ beschäftigt; sie ist eine negative Feststellung darüber, was gleich ist: das Ganze und der Teil sind nicht gleich, das Ganze ist grösser als der Teil.

In dieser Beleuchtung versteht man auch den engen Zusammenhang des 8. Axioms mit den übrigen euklidischen Axiomen. Es sind bei Euklid insgesamt neun Axiome überliefert worden. Von diesen hält man das letzte, das 9. Axiom einstimmig für unecht (112). Nun enthalten aber alle übrigen Axiome Aussagen darüber, was gleich und was ungleich ist. — Nachdem es gelungen ist, mindestens von einem dieser Axiome den Ursprung zu klären, wird man wohl vermuten dürfen, dass wahrscheinlich auch die übrigen Gleichheitsaxiome aus demselben Anlass aufgestellt wurden. Der Begriff der „Gleichheit“ ist allem Anschein nach in der eleatischen Philosophie so problematisch geworden, dass man empirische Aussagen als Axiome darüber aufstellen musste, was in der Geometrie gleich und was ungleich ist. (Darum halte ich die euklidischen *Communes animi conceptiones* für Axiome geometrischen Ursprungs.) In diesen Fällen war jedoch die Gültigkeit der Aussage nicht mehr durch die Widerspruchsfreiheit des Gedankens (d.h. also eigentlich durch die nachgewiesene Widerspruchlichkeit der gegenteiligen Meinung), wie im Falle der

(112) Siehe z.B. A. Frenkian, *Le postulat chez Euclide et chez les modernes*, Paris 1940, 20 A 3: „Cet axiome n'a rien de commun avec les autres. Par son caractère spécial, il ne peut pas appartenir ici. Donc, sûrement il n'est pas authentique etc.“ — Die spätere Forschung wird einmal die Frage klären müssen: warum und wieso eigentlich dieses unechte 9. Axiom der Gruppe der Gleichheitsaxiome angeschlossen wurde.

Definitionen der Arithmetik, sondern — ohne Rücksicht auf die eleatische Forderung — bloss *durch praktische, sinnliche Erfahrung an endlichen Mengen* garantiert.

Die Behauptung des 8. Axioms — dass das Ganze grösser als der Teil wäre — ist allerdings einleuchtend und einem jeden sofort verständlich, aber mit der Methode der Eleaten kann sie nicht bewiesen werden. Ja, man konnte mit den Methoden der Eleaten gerade das Gegenteil dieses Axioms beweisen; und doch musste die empirische Wahrheit, die nur im Bereiche der endlichen Mengen gültig ist, der Geometrie zugrunde gelegt werden, weil man ohne diese keine geometrische Wissenschaft hätte aufbauen können. — Erst in diesem Zusammenhang versteht man also auch den tieferen Sinn jenes aristotelischen Gedankens, über den wir im ersten Kapitel dieser Arbeit sprachen, dass nämlich die geometrischen Wissenschaft aus ersten unbeweisbaren aber nichtsdestoweniger wahren und gesicherten Prinzipien (Grundlagen) ausgehen muss. Eine solche unbeweisbare aber doch mindestens empirisch gesicherte und einleuchtend wahre Grundlage ist z.B. das 8. Axiom.

Die Betrachtungen des vorigen Kapitels vermögen auch das Problem genauere zu klären: wie man einst wohl auf den Gedanken kam, dass die Mathematik als deduktive Wissenschaft einer definitorisch-axiomatischen Grundlegung bedarf. Es lässt sich im Sinne dessen, was in dieser Arbeit entwickelt wurde, mit grosser Wahrscheinlichkeit feststellen, dass die definitorisch-axiomatische Grundlegung der mathematischen Wissenschaft wohl erst in der Geometrie völlig bewusst wurde. Man ersah nämlich aus dieser Arbeit, dass wohl auch die Arithmetik schon eine *selbständige Weiterbildung* der eleatischen Philosophie darstellte; aber auf diesem Gebiete konnten jene Rahmen, die durch die Philosophie der Eleaten geboten waren, im grossen und ganzen doch beibehalten werden. Wohl musste man auch in der Arithmetik schon die grundlegende neue Definition „Zahl“ einführen, aber dadurch geriet man eigentlich noch in keinen Konflikt mit der Philosophie des Parmenides und Zenon. Im Gegenteil, die neue Definition erwies sich so fruchtbar, dass man danach eben mit den Methoden der Eleaten ein völlig neues widerspruchsfreies Gebiet der Gedanken, die Arithmetik, aufbauen konnte, die wie eine selbständige Provinz der Eleaten-Philosophie aussah. Die pythagoreische

Arithmetik war vielleicht der grösste und bleibendste Triumph der eleatischen Philosophie.

Aber völlig anders wurde es, als man die bewährte Methode auch in der Geometrie anwenden wollte. Hier liessen sich die eleatischen Grundsätze nicht mehr so restlos zur Geltung bringen. Ja, wollte man die Geometrie als Wissenschaft retten, so musste man sich gerade den Eleaten gegenüber scharf abgrenzen. (In der Geometrie konnte man jene Logik der Eleaten, die hemmungslos auch mit unendlichen Mengen operierte, nicht mehr gebrauchen.) Und das Mittel der Abgrenzung war eben das Axiom, d.h. eine solche empirische Wahrheit, die zwar nicht bewiesen, ja manchmal sogar bestritten werden konnte, die aber doch der weiteren Beweisführung zugrunde gelegt wurde. Die Grundlegung der Geometrie war also nicht mehr bloss eine Weiterbildung der eleatischen Philosophie, sondern schon eine *Auseinandersetzung* mit ihr.

Zum Schluss möchte ich noch darauf hinweisen, dass jene Auseinandersetzung mit der eleatischen Philosophie, die für uns als die Grundlegung der griechischen Geometrie greifbar ist, allem Anschein nach auch die weitere Entwicklung der Logik entscheidend beeinflusste. Wie bekannt, hat L. E. J. Brouwer, der Begründer des mathematischen Intuitionismus, die These aufgestellt, dass die aristotelische Logik aus der Lehre von den *endlichen* Mengen abstrahiert sei, und daher für die Mathematik, sofern sich diese mit *unendlichen* Mannigfaltigkeiten befasst, keine bindende Geltung besitze (113). Den historischen Teil dieser Brouwerschen These hat später O. Becker an einigen aristotelischen Schriften nachgeprüft, und er konnte feststellen, dass von einzelnen kaum nennenswerten „Ausnahmefällen“ abgesehen in den geprüften Schriften so gut wie keine sog. transfiniten Schlüsse vorkommen (114). Beckers Prüfung wollte zwar nur eine vorläufige Orientation in dieser Frage ermöglichen, aber es darf vielleicht auch daran erinnert werden, dass Aristoteles in der Tat den Begriff des „Unendlichen“ gewöhnlich nur in jenem klassischen Sinne gebrauchte, der bis G. Cantor auch in der Mathematik einzig erlaubt war, d.h. er wollte darunter immer nur etwas *Potentielles* verstehen.

(113) L. E. J. Brouwer, „Intuitionistische Mengenlehre (1919)“, *Jahresber. d. Deutsch. Math. Vereingg.*, Bd. 28, 203 ff.

(114) O. Becker, „Eudoxos-Studien IV. Anhang“, *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik etc.*, Abt. B, Bd. 3, 1936, S. 380 ff.

— Nun glaube ich jetzt vermuten zu dürfen, dass sowohl in der Logik die Beschränkung auf endliche Mengen, als auch in der Mathematik der beschränkte Sinn des Unendlichen (potentielles Unendliche) sich erst von dem Aufstellen des 8. euklidischen Axioms datieren. Vor dieser Zeit operierten die Eleaten auch mit unendlichen Mengen und sie kamen auch dem Begriff des *aktuellen* Unendlichen mindestens nahe.

Á. SZABÓ.