

Die Wiederkehr der Proportion

Orgel und Heil – Auf der Suche nach *Harmonia*

(II. Teil einer Studie von gwm)

I. Grundlagen Akustik – der physikalische Aspekt in Stichworten

Die nachfolgenden Stichworte sind notwendig zum Verstehen der harmonikalen Zusammenhänge. Diese sind leider sehr umfangreich ausgefallen, können aber von geschulten Leuten in der vorliegenden Form schnell überlesen werden. Nach den Grundlagen Akustik folgen II. Berechnungen der Intervalle, was das eigentliche Ziel dieser Abhandlung ist, und was Grundlage für die harmonikale Behandlung der klanglichen Substanz der Orgel ist.

a) Grundbegriffe Akustik

Eine **Periode** nennt man einen Hin- und Hergang des schwingenden Körpers. Die **Amplitude** ist der größte Ausschlag aus der Ruhelage. Die **Periodendauer** T ist die Zeit, die ein schwingender Körper für einen Hin- und Hergang benötigt.

Die **Frequenz** f ist der Quotient aus der Anzahl der **Perioden** n und der dazu benötigten **Zeit** t .

$$f = \frac{n}{t} \quad f = \frac{1}{T}$$

$$f = 440 \text{ Hz} = 440 \text{ Schwingungen /sec}$$

b) Wellen

Die Gesamtheit der sich ausbreitenden Schwingungszustände in einem elastischen Wellenträger heißt *Welle*. Ihre Ausbreitungsgeschwindigkeit c ist der Quotient aus der Wellenlänge λ und der Periodendauer T . Eine Welle kann man sich als Sinuskurve vorstellen in der Hin- und Herbewegung stattfindet.

$$c = \frac{\lambda}{T}; c = \lambda * f; c = \lambda * f;$$

c) Schwingungsverhältnis

Eine Bewegung, die periodisch um eine Gleichgewichtslage erfolgt, heißt Schwingung. Die Proportionen der Schwingungen können rechnerisch behandelt werden.

Pfeifenton a schwingt mit 528 Hz

Pfeifenton b schwingt mit 264 Hz

$$528 \text{ Hz} : 264 \text{ Hz} = 2:1 = \text{Oktavabstand}$$

Das Schwingungsverhältnis ist reziprok zur Saitenlänge oder Körperlänge von Pfeifen. Eine Saite mit Verhältnis 1:2 oder $\frac{1}{2}$ schwingt doppelt so schnell, also 2:1.

d) Ausbreitung des Schalls

erfolgt kugelwellenartig, die Oberfläche der Kugel wächst mit dem Quadrat des Radius

Radius der Kugelausdehnung	2m	3m	4m
Oberfläche der Kugel nimmt zu	2^2m	3^2m	4^2m
	4m	9m	16m
Schallenergie nimmt ab	$1/2^2$	$1/3^2$	$1/4^2$

e) Schallgeschwindigkeit

In der Luft bei 18°C pflanzt sich Schall mit einer Geschwindigkeit von rund 340m/sec fort. Mit sinkender Temperatur nimmt die Geschwindigkeit ab, so dass sie bei 0°C nur noch 332m/sec beträgt. Bei den Blasinstrumenten ist die Wellenlänge des Tones durch die wirksame Rohrlänge (Pfeifenlänge) gegeben, daher spielt dieser Umstand eine große Rolle, denn sinkt die Schallgeschwindigkeit, so muss entsprechend der Formel

$$c = f \cdot \lambda$$

mit tieferen Tönen gerechnet werden. (siehe Beispielrechnungen)

f) Beispielrechnungen zur Wellenlänge

Die Wellenlänge λ und die daraus resultierende Pfeifenlänge der Pfeife C Prinzipal 8' sind gesucht, bekannt sind Frequenz ($f = 65,4 \text{ Hz}$) und Schallgeschwindigkeit ($c=340\text{m/sec}$).

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{340 \frac{\text{m}}{\text{sec}}}{65,4 \frac{\text{sw}}{\text{sec}}} = \underline{\underline{5,230\text{m}}}; \text{PFEIFENLÄNGE}_{\text{offene}} = \frac{\lambda}{2} = \frac{5,230\text{m}}{2} = \underline{\underline{2615,38\text{mm}}}$$

$$\text{PFEIFENLÄNGE}_{\text{gedackt}} = \frac{\lambda}{4} = \frac{5230\text{mm}}{4} = \underline{\underline{1307,5\text{mm}}}$$

Bei den beiden Pfeifenberechnungen handelt es sich um die theoretischen Pfeifenlängen ohne Berücksichtigung der Mündungskorrektur.

Fällt die Temperatur auf 0°C so ändert sich die Wellenlänge und damit die Pfeifenlänge wie folgt:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{332 \frac{\text{m}}{\text{sec}}}{65,4 \frac{\text{sw}}{\text{sec}}} = \underline{\underline{5076,45\text{mm}}};$$

$$\text{PFEIFENLÄNGE}_{\text{offene}} = \frac{\lambda}{2} = \frac{5076,45\text{mm}}{2} = \underline{\underline{2538,33\text{mm}}}$$

Was mit Worten heißt, die offene Pfeife C benötigt bei 0°C exakt 77,05mm weniger Länge als bei 18°C Raumtemperatur.

g) Wellenlehre

Schwingungen gehören zur Wellenlehre. Definitionsgemäß handelt es sich um das Auslenken von Teilchen aus der Ruhelage in festen, flüssigen oder gasförmigen Stoffen. Derartige Auslenkungen breiten sich als Welle in dem ganzen Stoff aus. In Gasen handelt es sich um **Längswellen** in Form elastischer Kompressionen und Expansionen. Sie werden vom menschlichen Ohr als Klang wahrgenommen, wenn sie im Frequenzbereich von 16 bis 20.000 Hz liegen. Oberhalb dieser Grenze spricht man von Ultraschall, unterhalb von Infraschall.

Schallwellen schwingen nicht nur in der Frequenz, sondern auch in der Intensität mit großen Unterschieden, die vom Hörsinn außerordentlich fein unterschieden werden. Die größte Empfindlichkeit liegt etwa bei 1000 bis 2000 Hz.

Bei Längswellen schwingen die Teilchen in der Ausbreitungsrichtung hin und zurück. Beim Schwingen in Ausbreitungsrichtung herrscht Überdruck (Verdichtung), entgegen

der Ausbreitungsrichtung herrscht Unterdruck, Verdünnung. Verdichtung und Verdünnung wechseln sich gegenseitig ab.

h) Physiologischer Aspekt

Das menschliche Ohr ist sehr empfindlich und kann z.B. bei 1000 Hz eine Schallintensität von bis zu 10^{-12} W/m^2 wahrnehmen. Eine Schallintensität von mehr als 1 W/m^2 beginnen Schmerzempfindungen.

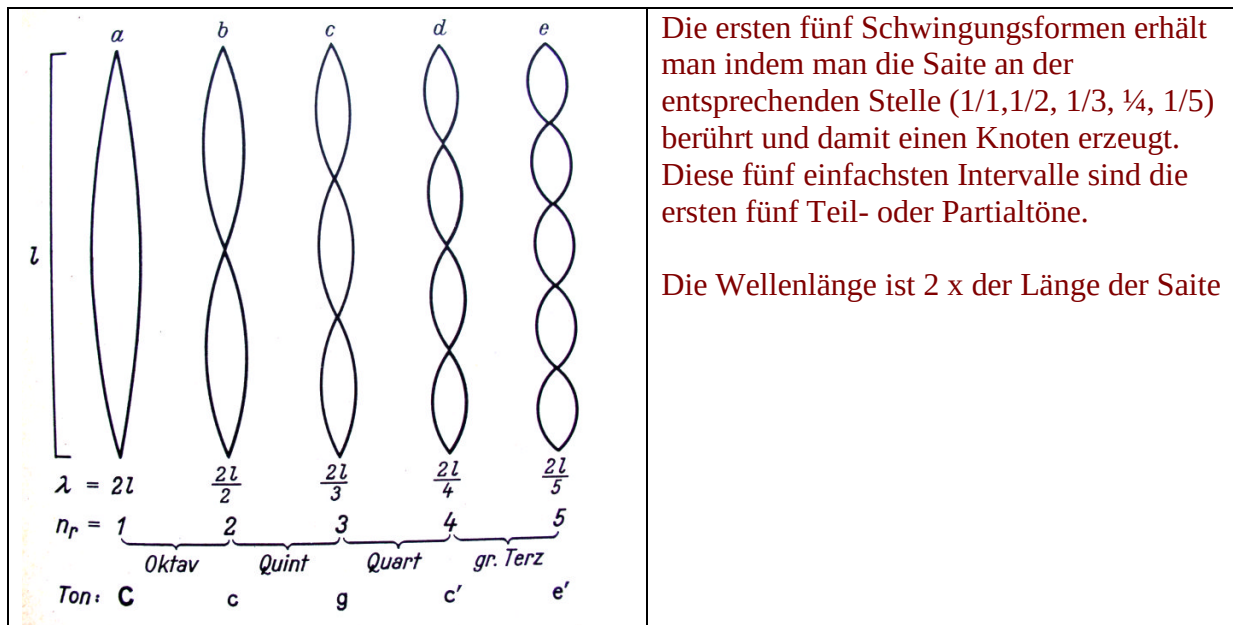
i) Lautstärke

Während man den Schallpegel in **Dezibel** angibt, ist das Maß für die Lautstärke **Phon**.

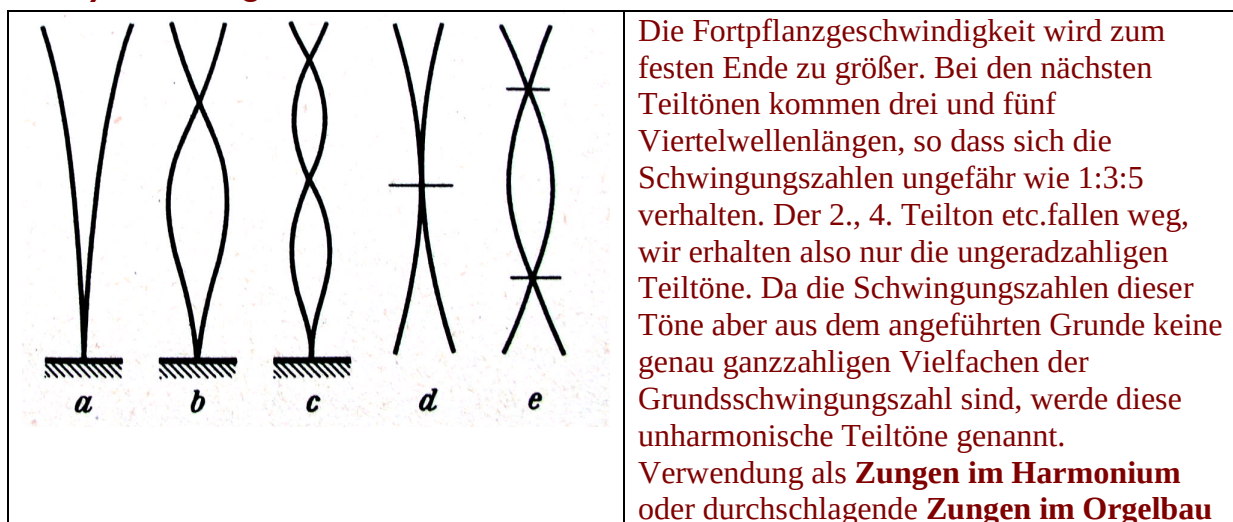
Tonempfinden ist sowohl von Frequenz wie von Intensität abhängig. Die größte Intensitätsempfindlichkeit für das menschliche Ohr liegt bei 1kHz.

Die Lautstärke ist so definiert, dass bei einer Frequenz von 1000 Hz die Werte der Lautstärke in Phon mit den Werten des Schallpegels in dB übereinstimmen.

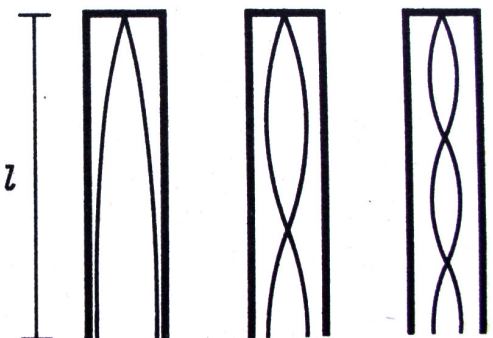
j) Schwingende Saiten



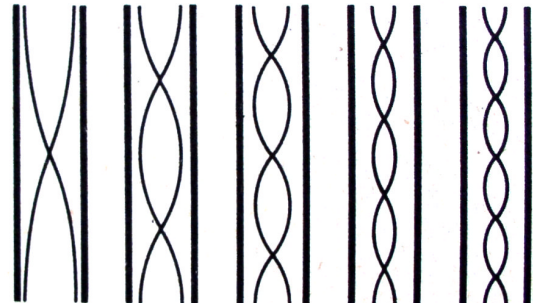
k) Schwingende Stäbe



I) Die gedackte Pfeife

 $l = \frac{1}{4} \lambda$ $n_r = 1$ Ton: C $\frac{3}{4} \lambda$ 3 g $\frac{5}{4} \lambda$ 5 e'	Durch Überlagerung der hin- und zurücklaufenden Wellen bilden sich nun in der vom rohrumschlossenen Luftsäule stehende Wellen. An den Stellen, woein Luftteilchen im gleichen Augenblick von der einen Welle einen Antrieb vorwärts, von der anderen einen gleich großen rückwärts erfährt, bleibt es in Ruhe. Hier bilden sich also Knoten. Am geschlossenen Ende einer Pfeife muß stets ein Knoten sein, weil die abschliessende Wand keine Längsbewegung der Luftteilchen zulässt. Am offenen Ende dagegen bildet sich ein Bauch, weil hier die Teilchen frei schwingen können. Die Schwingungsformen der Gedackten Pfeifen entsprechen im Prinzip denen des „schwingenden Stabes“ (man muss nur die Schwingungsgrafik von oben umdrehen, um das sofort zu sehen) Auch hier sind nur die ungeradzahligen Teiltöne enthalten.
Wellenlänge ist 4 x Pfeifenlänge	

m) Die offene Pfeife

 $l = \frac{1}{2} \lambda$ $n_r = 1$ Ton: C $\frac{2}{2} \lambda$ 2 c $\frac{3}{2} \lambda$ 3 g $\frac{4}{2} \lambda$ 4 c' $\frac{5}{2} \lambda$ 5 e'	Bei der offenen Pfeife müssen an beiden Enden Bäuche liegen. Wir nehmen also den Stab mit zwei freien Enden als Vergleich. Der Grundton hat einen Knoten in der Mitte. Die Wellenlänge ist bei der offenen Pfeife 2fache Pfeifenlänge.
--	---

II. Rechnen mit Intervallen

a. Berechnung der vollständigen Dur-Tonleiter

Die Schwingungszahl f ($f = 1 : t = \text{Schwingungszahl /sec}$) verhält sich in umgekehrten Verhältnis (reziprok) zur tönenden Saite ($1/2$ Saite gegenüber $2:1$ Oktavabstand). Mit den fünf nachfolgenden einfachen Saitenteilungen erhalten wir direkt diese Intervalle :

Saitenproportion	Ton	Intervall	Schwingungsverhältnis
Ganze Saite	c	Prime	f= 1/1
halbe Saite	c'	Oktav	f= 2/1
2/3 Saite	g	Quint	f= 3/2
¾ Saite	f	Quart	f= 4/3
4/5 Saite	e	(gr. Terz)	f= 5/4

Berechnet werden müssen noch die weiteren Töne

Der **Ton a** wird berechnet, er ist die große Terz von f, also ist die Schwingungszahl

$$\text{Frequenzverhältnis Ton a} = \frac{5}{4} \times \text{Ton F} = \frac{5}{4} \times \frac{4}{3} = \underline{\underline{5/3 \text{ (große Sexte)}}}$$

Der **Ton h** wird berechnet, er ist große Terz von g, also ist die Schwingungszahl

$$\text{Frequenzverhältnis Ton h} = \frac{5}{4} \times \text{Ton G} = \frac{5}{4} \times \frac{3}{2} = \underline{\underline{15/8 \text{ (große Septime)}}}$$

Die **None** ist ein Doppel-Quintenschritt

$$\text{Berechnung Ton d'} = \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \underline{\underline{9/4 \text{ (None)}}}$$

umgerechnet auf die Stammoktave (mit ½ multipliziert) ergibt sich

$$\text{Berechnung Ton d} = \frac{9}{4} \times \frac{1}{2} = \underline{\underline{9/8 \text{ (große Sekunde)}}}$$

Damit haben wir nun folgende Intervalle über Saitenteilung und einfacher Proportionsberechnung (Bruchrechnung) erhalten :

Saitenproportion	Ton	Intervall	Schwingungsverhältnis
Ganze Saite	c	Prime	1/1
	d	gr. Sekunde	9/8*
4/5 Saite	e	(gr. Terz)	5/4
¾ Saite	f	Quart	4/3
2/3 Saite	g	Quint	3/2
	a	gr. Sexte	5/3*
	h	gr. Septime	15/8*
halbe Saite	c'	Oktav	2/1
* berechnet			

Hier ist also nun die C-Dur Tonleiter mit den Intervallen, die ihre Töne mit dem Grundton c bilden. Die Zahlen der Intervalle geben zugleich die relative Schwingungszahlen der Töne in Bezug auf c an. (die absolute Schwingungszahl in Hz erhält man, wenn man die relat. Zahl mit dem Verhältnis multipliziert z.B. Oktave von a' = 440Hz x 2/1):

c	d	e	f	g	a	h	c'
1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2
Prim	gr.Sek	gr.Terz	Quart	Quint	gr.Sext	gr.Septime	Oktav

b. Berechnungen der Phytagoreer und das syntonische Komma

Der Ton e wurde bei den Phytagoreern mit 4 Quintschritten von c vorwärts erreicht :

$$f = \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{81}{16} [\text{Ton}_{-e'}]$$

nun also zwei Oktaven rückwärts kommt man auf e;

$$f = \frac{81}{61} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{81}{64} [\text{Ton}_{-e}]$$

Beim Verfahren der Saitenteilung wäre man aber bei 5/4 angekommen.

Der Unterschied dieser beiden Intervalle ist

$$f = \frac{81}{64} : \frac{5}{4} = \frac{81}{80} \quad \text{(das syntonische Komma)}$$

Berechnung der Zwischenintervalle

Unsere Durtonleiter setzt sich aus fünf Ganztonschritten und zwei Halbtonschritten zusammen. Diese Schritte können wir berechnen, indem wir die relative Schwingungszahl(f) jedes Tones durch die des vorhergehenden dividieren, wie z.B. den Schritt e-f (e = Terz = 5/4; f = Quarte = 4/3)

$$f = \frac{4}{3} : \frac{5}{4} = \frac{4 \times 4}{5 \times 3} = \frac{16}{15} \quad \text{(Halbton)}$$

nach Berechnung aller Zwischenintervalle erhalten wir folgende Reihe:

c	d	e	f	g	a	h	c'
	9/8	10/9	16/15	9/8	10/9	9/8	16/15
	großer Ganzton	kleiner Ganzton	Halbton	großer Ganzton	kleiner Ganzton	großer Ganzton	Halbton

Die natürlich große Terz (Didymus teilte die Saite mit 5:4) besteht also aus einem großen und keinen Ganzton. Der Unterschied dieser beiden Tonschritte ist:

$$f = \frac{9}{8} : \frac{10}{9} = \frac{9 \times 9}{8 \times 10} = \frac{81}{80} \quad \text{(syntonische Komma oder didymische Komma)}$$

(Komma griech. bedeutet sehr kleines Intervall)

Um ein **Intervall zu verdoppeln**, müssen wir ihn mit sich selbst anstatt mit 2 multiplizieren. Die None z.B. ist musikalisch ein doppelt so großes Intervall wie die Quinte, denn sie umfasst deren zwei, aber als Quint der Quint hat sie den Wert :

$$f = \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \quad \text{(None)}$$

Entsprechend findet man **die Hälfte eines Intervalls** nicht etwa durch Halbierung seines Zahlenwertes, sondern als zweite Wurzel (Quadratwurzel) aus demselben, ein zehntel als zehnte Wurzel. Der zehnte Teil eines großen Ganztones ist also

$$f = \sqrt[10]{\frac{9}{8}} = 1,0118; \quad \text{ein halber Quintabstand wäre } f = \sqrt[2]{\frac{3}{2}} = 1,22474;$$

Die reine Quinte umfasst wie aus obiger Zusammenstellung ersichtlich, zwei große Ganztöne, einen kleinen Ganzton und einen Halbtonschritt :

$$f(\text{QUINTE}) = \frac{9}{8} \times \frac{10}{9} \times \frac{16}{15} \times \frac{9}{8} = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$$

In unserer Dur-Tonleiter sind die Quinten c-g, g-d' und f'-c' rein, ebenso e-h und a-e'. Anders aber die Quinte d-a, diese Quinte ist um ein syntonisches Komma kleiner.
Beweis:

$$f(\text{QUINTE}_{d-a}) = \frac{10}{9} \times \frac{16}{15} \times \frac{9}{8} \times \frac{10}{9} = \frac{40}{27} \quad f(\text{diff}) = \frac{3}{2} : \frac{40}{27} = \frac{81}{80}$$

Dennoch kann diese C-Dur Tonleiter als rein bezeichnet werden.

Bei G-Dur sieht das Ganze so aus :

g	a	h	c'	d'	e'	fis'	g'
	10/9 kl.GT	9/8 gr.GT	16/15 HT	9/8 gr.GT	10/9 kl.GT	9/8 gr.GT	16/15 HT
	5/4 gr.Terz						
	4/3 Quart						
	3/2 Quinte						
	5/3 gr. Sext						
	15/8 gr. Septime						
	2/1 Okave						

man sieht : die ersten beiden HT-Schritte sind gegenüber der C-Dur Tonleiter vertauscht. Das a muss also bei der G-Dur Tonleiter um ein syntonisches Komma höher sein als bei der C-Dur-Tonleiter.

c. Pythagoräisches Komma

Bei Anwendung des pythagoräischen reinen Quintenverfahrens gelangt man ebenfalls zu allen Tönen. Auch hier ergibt sich Enharmonik.

Mit zwölf Quintenschritten kommt man zum Ton his⁶, der dem durch sieben Oktavschritte erreichten Ton c⁷ sehr nahe liegt, aber doch um ein Weniges höher liegt.

$$f(12_QUINTEN) = \left(\frac{3}{2}\right)^{12} = \frac{531441}{4096} = \underline{\underline{129,74633}} \text{ his}^6$$

$$f(7_OKTAVEN) = 2^7 = \underline{\underline{128}} \text{ c}^7$$

Der Unterschied zwischen his⁶ und c⁷, oder, was dasselbe ist, zwischen his und c¹ beträgt

$$f(\text{diff}) = 129,74 : 128 = \frac{6487}{6400} \approx \frac{74}{73} \text{ pythagoräisches Komma,}$$

welches ein wenig größer ist, als das syntonische Komma.

Das pythagoräische Komma ist also das Intervall zwischen zwölf Quintschritten und der siebenten Oktav eines Tones.

d. Temperierte Stimmung

Bei der gleichschwebenden Temperatur werden alle Quinten um je 1/12 des pythagoräischen Kommas also um $\sqrt[12]{74/73}$ kleiner gestimmt.

Dies ergibt die Rechnung

$$f = \frac{3}{2} : \sqrt[12]{\frac{74}{73}} = \underline{\underline{1,4983}} \text{ (anstelle des 1,5 fachen der reinen Quinte)}$$

12 derartig verminderte Quintenschritte führen genau zum gleichen Ton wie sieben Oktavschritte.

$$f = 1,4983^{12} = \underline{\underline{127,99}} \text{ Damit sind } h \text{ und } c' \text{ gleich.}$$

Die enharmonisch verschiedenen Töne (fis und gs usw.) haben jetzt die gleiche Tonhöhe.

Alle Halbtonschritte sind einander gleich. Ebenso sind die Ganztonschritte gleich. Es wird keine Tonart mehr bevorzugt.

Die Oktaven sind rein, die Quinten sind um 1/60 kleiner als rein, die Quartan sind größer als rein gestimmt. Die Terzen sind 1/8 HT größer als rein gestimmt.

Bei der 12 stufigen Temperatur wird der Oktavraum in zwölf gleichen HT-Schritte geteilt.

Rechnerisch ist das

$$1/12 \text{ Oktave} = \sqrt[12]{2} \text{ (12te Wurzel aus } 2/1) = (TR \times \sqrt[12]{2}) = \underline{\underline{1.05946}}$$

das ist das 1,05946fache des vorhergegangenen Tones

$$\text{z.B. : } a' = 440\text{Hz so ist } b' = 440\text{Hz} * \sqrt[12]{2} = 440 \text{ Hz} * 1.05946 = \underline{\underline{466,16 \text{ Hz}}}$$

Die Intervalle der temperieren Tonleiter stellen sich also folgendermaßen dar:

c	cs	d	ds	e	f	fs	g	gs	a	b	h	c'
1	$\sqrt[12]{2}$	$(\sqrt[12]{2})^2$	$(\sqrt[12]{2})^3$	$(\sqrt[12]{2})^4$	$(\sqrt[12]{2})^5$	$(\sqrt[12]{2})^6$	$(\sqrt[12]{2})^7$	$(\sqrt[12]{2})^8$	$(\sqrt[12]{2})^9$	$(\sqrt[12]{2})^{10}$	$(\sqrt[12]{2})^{11}$	$(\sqrt[12]{2})^{12}$
1	1.05946	1.12246	1.18920	1.25992105	1.334839	1.414213	1.498307	1.58740	1.6817928	1.7817974	1.887748	2

gwm 28.11.2004

