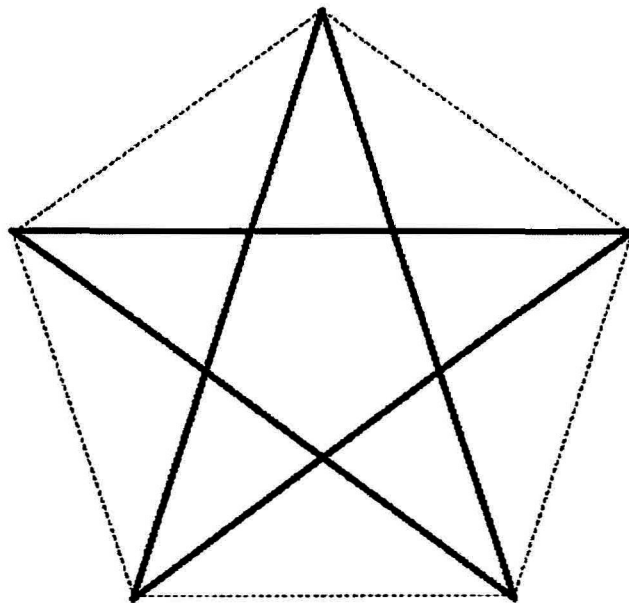


Die

Irrationalität im Fünfeck,

Mathematik und Zeitumstände

der Pythagoräer



Verfasserin: Melanie Pfister

3116
PFISTER, M.
2005

Gliederung

1. Ein kurzer Überblick über die Mathematik im griechischen Altertum
2. Der Geheimbund der Pythagoräer
- 3. Die Mathematik der Pythagoräer
4. Entdeckung der Irrationalität
5. Berechnung der Irrationalität im regulären Fünfeck
6. Bibliographie
7. Verwendete Internetseiten

1. Ein kurzer Überblick über die Mathematik im griechischen Altertum

„Die griechische Mathematik beginnt circa 600 v. Chr. und endet circa 300 n. Chr.

Man unterscheidet vier verschiedene Abschnitte:

1. „Ionische Periode (Thales, Pythagoras, Anaxagoras, Hippokrates, ...) 600-400 v.Chr.
2. Athenische Periode (Sophisten, Platon, Deinostratos,...) 400-300 v. Chr.
3. Alexandrische Periode (Eukleides, Archimedes, Nikomedes,..) 300-200 v. Chr.
4. Spätzeit (Hipparchos, Heron, Pappos,...) 200 v. Chr. -300 n. Chr.

Vor den Griechen kannte man Mathematik seit 2000 Jahren. Es gab schon ein schriftlich fixiertes Zahlensystem, Rechenmethoden und die Anfänge der Geometrie.[...]

Die mathematischen Texte der vorgriechischen Mathematik waren zum großen Teil Aufgabentexte, die manchmal auch vorgerechnete Lösungswege enthielten, jedoch ohne Begründungen für die Rechenschritte. Man kannte noch keine Beweise, denn sogar die wenigen Lehrtexte die es gab, in denen ein allgemein anwendbares Verfahren beschrieben wird, waren ohne Begründungen.“¹

„Erst bei den Griechen ist aus der praktischen Meß- und Rechenkunst und dem mystischen Zahlenspiel jene axiomatisch fundierte und streng beweisende Wissenschaft gewachsen, die wir heute als Mathematik bezeichnen.“²

Die Griechen haben Teile der Arithmetik von den Babylonieren und Ägyptern übernommen, die jedoch bereits hochstehende, komplizierte Methoden für die Lösung mathematischer Probleme höherer Ordnung entwickelt hatten, wohingegen die griechische Mathematik im 5. Jhd. v. Chr. noch am Anfang stand.

Anders als die Babylonier kannten die Griechen irrationale Zahlen noch nicht.

Die Unwissenheit über die Existenz des Irrationalen hatte die Folge, dass sich die babylonischen algebraischen Gleichungen und ihre Lösungen nicht immer auf das griechische Zahlenverständnis übertragen ließen, da sie unter Zahlen nur rationale, also ganze Zahlen verstanden.

¹ <http://www.physik.tu-muenchen.de/~cknaak/Projekte/Mathe.pdf>, S.3

² Meschkowski, H. (1990). Denkweisen großer Mathematiker-Ein Weg zur Geschichte der Mathematik. Vieweg. S.1

Da sich die Griechen nicht mit genäherten Lösungen zufrieden gaben, was sich vor allem an der Einführung von schriftlichen Beweisen widerspiegelt, mussten sie die babylonischen Gleichungen ins Geometrische übertragen.

(vgl. <http://www.physik.tu-muenchen.de/~cknaak/Projekte/Mathe.pdf> , S.5)

„Die Epoche der Pythagoreer ist dabei für den an kulturgeschichtlichen Zusammenhängen interessierten Historiker der Mathematik besonders wichtig, weil hier uralte mystische Bezüge neben zahlentheoretischen oder geometrischen Aussagen stehen, die auch dem Anspruch des modernen Forschers genügen.“³

2. Der Geheimbund der Pythagoräer

Der Überlieferung nach hat der griechische Philosoph und Mathematiker Pythagoras von Samos (ca. 580 – 500 v.Chr.) nach längeren Aufenthalten in Ägypten und Mesopotamien, wo er mit verschiedenen Mysterienkulten in Berührung kam, im griechisch besiedelten Kroton in Unteritalien um 525 v. Chr. eine Art mystische Sekte oder Geheimbund gegründet, die sogenannte Schule der Pythagoräer (vgl. Wußing, H. (1979). Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, S.51), die bald darauf schon in ganz Unteritalien und Sizilien Verbreitung finden sollte.

(vgl. <http://www.anklamermediendesign.de/web1/woi/philosophie/pythagoreer.html>)

Diese Gemeinschaft von sechshundert Männern und Frauen fühlte sich in erster Linie der Philosophie, aber auch der Mathematik, Religion und der Politik verpflichtet.

(vgl. <http://lexikon.freenet.de/Pythagoreer>). „Jedes Mitglied der Schule musste beschwören, Außenstehenden niemals von den mathematischen Entdeckungen zu berichten.[...] Da die Pythagoräer ihre Erkenntnisse weitgehend geheim hielten, ist auch nur wenig über sie bekannt. Insbesondere ist unklar, ob sie ihr Wissen aus eigenen Entdeckungen bezogen, oder ob sie dieses aus verstreuten Quellen sammelten.

Der Lehrsatz des Pythagoras, war z. B. schon den Babyloniern Jahrhunderte früher bekannt, von Pythagoras stammt allerdings der erste bekannte Beweis.“⁴

³ Meschkowski, H. (1990). Denkweisen großer Mathematiker-Ein Weg zur Geschichte der Mathematik. Vieweg. S.1

⁴ <http://lexikon.freenet.de/Pythagoreer>

Ebenso sind seine persönlichen Leistungen schwer von denen seiner Anhänger oder Schüler zu trennen. (vgl. Meschkowski, H. (1990). Denkweisen großer Mathematiker-Ein Weg zur Geschichte der Mathematik. Vieweg. S.2)

„Die pythagoräische Gemeinschaft brachte mit ihrer unermüdlichen Suche nach Wahrheit Leben in die damalige Mathematik. Die Kunde von ihrem Erfolg verbreitete sich trotz der streng gehüteten Geheimnisse sehr schnell, und so strebten viele die Aufnahme ins 'innere Heiligtum des Wissens' an, aber nur die Fähigsten wurden aufgenommen.[...]

Die meisten Erkenntnisse und Vermutungen über die Pythagoreer stammen aus einer [...] Pythagoras-Biografie des hellenistischen Philosophen und Mathematikers *Iamblichos von Chalkis* (ca. 250 - 330 n.Chr.).[...]

Ungewöhnlich für die damalige Zeit war die Stellung der Frauen bei den Pythagoreern. Die Frauen wurden in vielen Bereichen als den Männern gleichwertig angesehen. Nach Pythagoras Tod führte seine Frau *Theano von Kroton* und später deren gemeinsame Tochter *Damo* die Schule. Iamblichos erwähnt noch weitere bedeutende weibliche Pythagoräer.“⁵

Erkennungszeichen der Pythagoräer war das Pentagramm (siehe folgende Abbildung), eines der ältesten magischen Symbole der Kulturgeschichte. Als eine Figur die in einem Zuge gezeichnet werden kann, hatte es für sie eine geheimnisvolle Bedeutung

(vgl. <http://hischer.de/uds/forsch/publikat/hischer/artikel/scheid60.pdf>) und es stand „für die Suche nach der universalen Wahrheit“⁶.

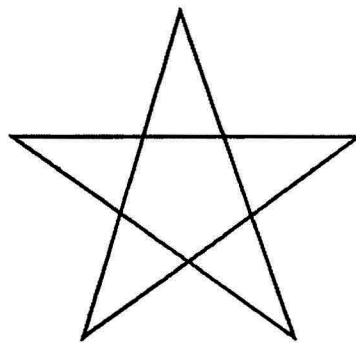


Abb. 1: Pentagramm bzw. Pentalpha

⁵ <http://lexikon.freenet.de/Pythagoreer>

⁶ http://www.izynews.com/de/1/Goldener_Schnitt

Als um 450 v. Chr. in Unteritalien die Demokraten die Oberhand gewannen, wurden die Pythagoräer, die eine stark antidemokratische und aristokratische Politik vertraten, blutig verfolgt. Der Bund konnte sich jedoch noch bis zum Anfang des 4. Jhd. v. Chr. halten, bis er schließlich entgültig erlosch.

Die pythagoreischen Lehren übten einen starken Einfluss auf die Nachwelt aus.

Einerseits förderten sie die Entwicklung wissenschaftlicher Disziplinen, wie Mathematik, Musiktheorie, Medizin und Astronomie, andererseits trugen sie zur Entfaltung des Idealismus und der Mystik, besonders der Zahlenmystik, bei.

(vgl. <http://www.anklamermediendesign.de/web1/woi/philosophie/pythagoreer.html>)

3. Die Mathematik der Pythagoräer

Die Pythagoräer unterteilten die Mathematik in vier Bereiche: Arithmetik, Geometrie, Astronomie und Musik (vgl. <http://www.landauer.at/griechische-mathematik/>). „Die Römer fassten diese Gebiete unter dem Namen *Quadrivium* zusammen, das gemeinsam mit dem *Trivium* (Grammatik, Rhetorik und Dialektik) die sogenannten *septem artes liberales* bildete. Diese Einteilung wirkte bis in die Neuzeit in Form der Artistenfakultäten an den Universitäten fort.“⁷

Das besondere Interesse der Pythagoräer galt den philosophischen Aspekten der Mathematik, was sich an ihrer ausgeprägten Zahlenmystik zeigt. Zahlen waren für sie keine „Erfindungen“ des Menschen, sondern die Essenz aller Dinge. So beruhen nicht nur musikalische Harmonien auf Zahlenproportionen, sondern überhaupt die ganze Welt, der ganze Kosmos ist Harmonie und Zahl und so lautete ein Kernsatz der pythagoräischen Lehre auch : „Alles ist Zahl“ (vgl. <http://www.landauer.at/griechische-mathematik/>).

„Durch genaue Untersuchung der Zahlen glaubte man daher, dem Wesen der Dinge auf der Spur zu sein und die ordnenden Prinzipien des Kosmos erkennen zu können. Zu diesem Zwecke wurden die Zahlen nach mehreren Kategorien unterteilt“⁸:

⁷ <http://www.landauer.at/griechische-mathematik/>

⁸ <http://www.landauer.at/griechische-mathematik/>

- Die **Eins** wurde nicht als Zahl angesehen, sondern als der Ursprung aller Zahlen und damit letztlich als der Ursprung der Welt.
- **Primzahlen**: Eine Zahl ist eine Primzahl, wenn sie außer 1 keine echten Teiler besitzt. Alle anderen Zahlen heißen *zusammengesetzte Zahlen*.
- **Gerade Zahlen**: Durch 2 teilbare Zahlen heißen *gerade*, alle anderen heißen *ungerade*.
- **Vollkommene Zahlen**: Die Summe der Teiler ist das Wesen einer Zahl, dementsprechend ist eine Zahl *vollkommen*, wenn die Summe ihrer echten Teiler (inklusive 1) die Zahl selbst ergibt.
Die kleinste vollkommene Zahl ist 6 ($=1 + 2 + 3$).

Zahlen, deren Teilersumme größer als sie selbst ist, heißen *überschießende* bzw. *überevollkommene*, jene, bei denen sie kleiner ist, *mangelhafte* bzw. *untervollkommene* Zahlen. (vgl. <http://www.landauer.at/griechische-mathematik/>)
„Bei *Euklid* (Elemente IX 36) findet sich das Bildungsgesetz für gerade vollkommene Zahlen.“⁹

- **Befreundete Zahlen**: Zwei Zahlen heißen *befreundet*, wenn die Teilersumme der einen die andere ergibt.

Bis heute sind nur wenige Paare bekannt, das kleinste Paar ist **220** und **284**:

$$220 = 1 + 2 + 4 + 71 + 142 \text{ und } 284 = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110.$$

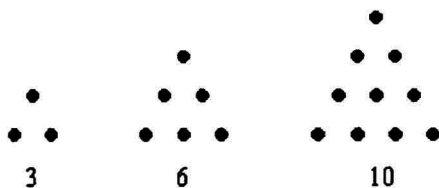
Darauf aufbauend wurden den Zahlen gewisse Eigenschaften zugesprochen.

So galten beispielsweise gerade Zahlen als *weiblich* und ungerade als *männlich*.

5 war als Summe der kleinsten weiblichen und der kleinsten männlichen ($2 + 3$) die *Zahl der Ehe* (vgl. <http://www.landauer.at/griechische-mathematik/>).

- **Figurierte oder geometrische Zahlen**: Die Pythagoräer veranschaulichten sich die Zahlen an Gruppen von Punkten, die man mit Sternbildern vergleichen könnte. An diesen Punktrastern ließen sich bemerkenswerte Gesetze ablesen.

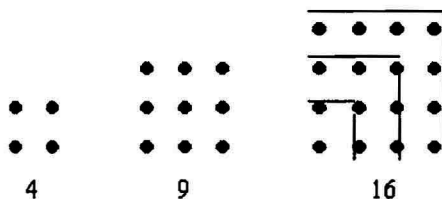
⁹ Kropp, G. (1969). Geschichte der Mathematik. Probleme und Gestalten. Heidelberg: Quelle & Meyer, S. 25

Dreieckszahlen:

In den „Zeilen“ des Dreiecks befinden sich 1,2,3,...Punkte und die Anzahl der Punkte in einem n -zeiligen Dreieck stellt die Summe der ersten n natürlichen Zahlen dar, also ist die Summe der Punkte in einem 4-zeiligen Dreieck gleich $1+2+3+4 = 10$.

Auf diese Weise gewannen die Pythagoräer die bekannte Folge der Dreieckszahlen:

1,3,6,10,15,21,...,also die Folge $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$

Quadratzahlen:

Die Pythagoräer stellten fest, dass man Quadratzahlen aus einer Summe von ungeraden Zahlen darstellen kann.

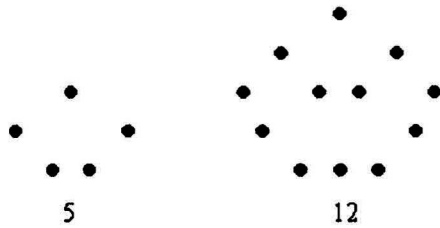
Für $n = 4$ gilt dann z.B.: $1+3+5+7=16$ und somit gilt allgemein:

$$1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$$

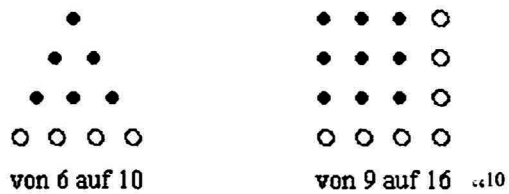
Des Weiteren erkannten sie, dass man offenbar zu einem quadratischen Raster mit n^2 Punkten $n+1+n = 2n+1$ Punkte hinzufügen muss, um ein Quadrat mit $(n+1)^2$ Punkten zu erhalten.

Danach gilt also:

$$n^2 + (2n+1) = (n+1)^2 \quad (\text{vgl. Meschkowski, H. (1990). Denkweisen großer Mathematiker-Ein Weg zur Geschichte der Mathematik. Vieweg, S.4-5}).$$

„Fünfeckszahlen:

Jene Steinchen, die von der einen auf die nächste Zahl dazukommen, heißen **Gnomon**, hier sind das die weißen Steinchen:

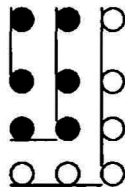


Durch Untersuchung dieser Gnomone erhielt man eine Reihe von elementaren Resultaten, beispielsweise, dass die Summe der geraden Zahlen ein Produkt zweier „Heteromeken“ ist, das sind Zahlenpaare von der Differenz 1.

Es gilt also : $2+4+\dots+2n = n(n+1)$ (vgl. Kropp, G. (1969). Geschichte der Mathematik. Probleme und Gestalten. Heidelberg: Quelle&Meyer).

Für $n = 4$ gilt also dann:

$$2+4+6 = 3 \cdot 4 = 12$$



¹⁰ <http://www.landauer.at/griechische-mathematik/>

Die ungeraden Zahlen erzeugen also eine beschränkte Zahl von Formen, nämlich nur das Quadrat, die geraden Zahlen dagegen eine Vielzahl nicht ähnlicher Rechtecke. Daraus schlossen die Pythagoräer auf folgende Entsprechung:

Ungerade – *beschränkt* und
gerade – *unbeschränkt*

Heutzutage wird man den Pythagoräern natürlich in solchen Schlüssen nicht mehr folgen. Die Pythagoräer haben den Fehler begangen, der auch in unserer Zeit keineswegs ganz ausgerottet ist: Sie haben unzulässig verallgemeinert. Das geschah nicht nur bei ihrer Entsprechung zwischen Ungeradem und Beschränktem, Geradem und Unbeschränktem, das geschah auch in der Formulierung ihrer grundlegenden These „Alles ist Zahl“ (vgl. Meschkowski, H. (1990). Denkweisen großer Mathematiker-Ein Weg zur Geschichte der Mathematik. Vieweg, S.2).

„Da die Eins für die Pythagoräer als Ursprung der Welt unteilbar war, waren Brüche nicht zulässig, statt dessen verwendeten sie Proportionen. Dies erklärt auch die etwas eigenartige Nähe zur Musik, da sich die Höhe eines Tones in Abhängigkeit von der Länge der gestrichenen Saite verändert. Daher betrachteten sie die Lehre von der Harmonie letztlich als eine Lehre von Zahlenverhältnissen. Je nach Art des Verhältnisses wurde zwischen *arithmetischer*, *geometrischer* und *harmonischer Proportion* unterschieden. Diese Namen tragen auch heute noch die entsprechenden Mittelwerte.

Die *harmonische Proportion* $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{b} - \frac{1}{c}$, zeigt sich beispielsweise beim Verhältnis der Flächen ($a = 6$), Ecken ($b = 8$) und Kanten ($c = 12$) des Würfels.

Löst man obige Gleichung nach b auf, erhält man $b = \frac{2ac}{a+c}$, also das *harmonische Mittel* von a und c .

In der Musik waren alle auftretenden Proportionen ganzzahlig, sodass die Pythagoräer zu der Ansicht gelangten, dass alles, was in der Welt harmonisch ist, durch ganzzahlige Verhältnisse ausgedrückt werden kann.“¹¹

¹¹ <http://www.landauer.at/gricchische-mathematik/>

4. Entdeckung der Irrationalität

Umso schwerer wurden sie auch von der Entdeckung getroffen, dass sich gegenseitig nicht messbare, also *inkommensurable* Strecken existieren, deren Länge sich nicht durch das Verhältnis ganzer Zahlen ausdrücken lässt. Modern ausgedrückt :Es existieren irrationale Zahlen.

Im allgemeinen wird diese Entdeckung heute von der mathematikhistorischen Forschung dem Pythagoräer *Hippasos von Metapontum* zugeschrieben (vgl. Wußing, H. (1979). Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, S. 57). Man geht heute davon aus, dass er die Existenz der Inkommensurabilität am Pentagramm entdeckte, indem er zeigte, dass Seite und Diagonale des regelmäßigen Fünfecks (welches ja gerade entsteht, wenn man die Sternspitzen des Pentagramms verbindet) inkommensurabel sind.

Ferner habe er, so berichtet Iamblichos, „als erster das Wesen der Meßbarkeit und Unmeßbarkeit an Unwürdige verraten“ (vgl. Meschkowski, H. (1990). Denkweisen großer Mathematiker-Ein Weg zur Geschichte der Mathematik. Vieweg, S.7-8). Deshalb sei er aus dem pythagoräischen Bunde ausgestoßen worden und von den Göttern zur Strafe für seine frevelhafte Entdeckung mit dem Tod durch Schiffsuntergang bestraft worden (vgl. <http://hischer.de/uds/forsch/publikat/hischer/artikel/scheid60.pdf>).

Der Zorn der Pythagoräer war aber auch verständlich: *Hippasos* hatte mit dem Nachweis inkommensurabler Strecken die pythagoräische Grundlehre in Frage gestellt, und hatte sich offenbar nicht gescheut, entgegen den bestehenden Regeln, diese Erkenntnis „Unwürdigen“, also nicht dem Orden angehörenden Leuten, weiterzugeben (vgl. Meschkowski, H. (1990). Denkweisen großer Mathematiker-Ein Weg zur Geschichte der Mathematik. Vieweg, S.7-8).

Interessant ist nun natürlich, wie es *Hipassos* gelang, festzustellen, dass Seite und Diagonale im regelmäßigen Fünfeck kein gemeinsames Maß haben.

Er verwendete dafür die sogenannte Wechselwegnahme, auch bekannt als euklidischer Algorithmus (vgl. Wußing, H. (1979). Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, S.58).

„Der euklidische Algorithmus ist ein Verfahren zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers (ggT) zweier natürlicher Zahlen a und b . Er ist einer der ältesten bekannten Algorithmen der Welt, benannt nach dem griechischen Mathematiker *Euklid*, der ihn um 300 v. Chr. in seinem Werk „Die Elemente“ angegeben hat. [...] Euklid nannte es antepheiresis (Wechselwegnahme).

Bei der Berechnung mit zwei natürlichen Zahlen a und b verfährt man nach Euklid wie folgt:

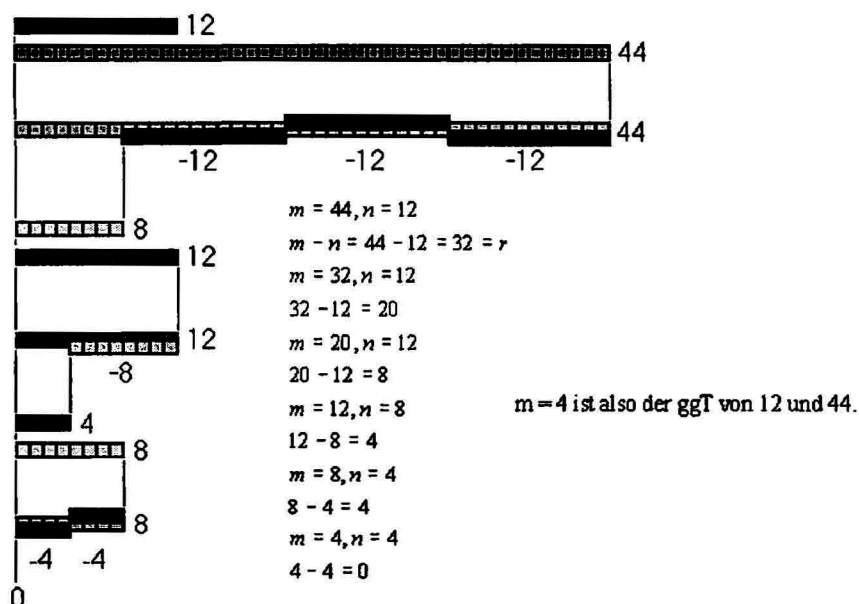
1. Setze $m = a$; $n = b$.
2. Ist $m < n$, so vertausche m und n .
3. Berechne $r = m - n$.
4. Setze $m = n$, $n = r$.
5. Ist $r \neq 0$, so fahre fort mit Schritt 2.

Nach Ablauf des Verfahrens hat man mit m den ggT von a und b gefunden.

Euklid formulierte das Problem seinerzeit geometrisch, er suchte nach einem gemeinsamen "Maß" für die Längen zweier Linien.

Beispiel:

Gesucht ist der ggT von $a=12$ und $b=44$

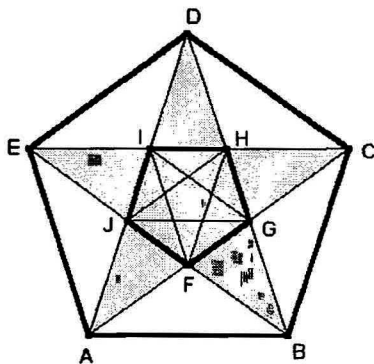


Dieser Algorithmus kommt also ohne die Kenntnis der Primfaktorzerlegung der Zahlen a und b aus (vgl. http://encyclopedie-de.snyke.com/articles/euklidischer_algorithmus.html).

Die Wechselwegnahme war aber schon Jahrhunderte zuvor den Handwerkern als Faustregel bekannt, die diese Methode mit Messstöcken und Messschnüren zur Maßbestimmung angewandt hatten (vgl. <http://www.physik.tu-muenchen.de/~cknaak/Projekte/Mathe.pdf>).

Aber nun zum Beweis von *Hippasos*:

Wie bereits erwähnt erhält man, wenn man die Sternspitzen eines Pentagramms verbindet, ein regelmäßiges Fünfeck (siehe folgende Abbildung).



Man stellt fest, dass die Diagonalen des Fünfecks, ein weiteres, ebenfalls regelmäßiges Fünfeck bilden. Wenn man in dieses kleinere Fünfeck wieder die Diagonalen einzeichnet, so erhält man ein noch kleineres, aber wiederum regelmäßiges Fünfeck. Es zeigt sich also, dass man diese Prozedur ins Unendliche fortsetzen kann.

Zieht man nun von einer Diagonale des ursprünglichen Fünfecks (also z.B. $\overline{DA}$) die anliegende Seite ($\overline{ED}$) ab, erkennt man, dass der Rest der Länge einer Diagonale des kleineren Fünfecks ($\overline{JG}$) entspricht.

Es gilt nämlich:

1) $\overline{ED} = \overline{DJ}$ (Δ_{EJD} und Δ_{JGD} sind kongruent) und

2) $\overline{JA} = \overline{JG}$ (Δ_{AGJ} ist gleichschenkelig, da es bei A und bei G zwei gleiche Winkel besitzt, wie man durch Parallelverschiebung der Geraden JG erkennen kann.)

$$\Rightarrow \overline{DA} - \overline{ED} \stackrel{1}{=} \overline{DA} - \overline{DJ} = \overline{JA} \stackrel{2}{=} \overline{JG},$$

also: $\boxed{\overline{DA} - \overline{ED} = \overline{JG}}$

Gleichzeitig erkennt man, dass man durch Subtraktion des Restes ($\overline{JG}$) von der Seite des Ausgangsfünfecks ($\overline{ED}$) die Länge einer Seite des kleineren Fünfecks ($\overline{JF}$) erhält.

Es gilt nämlich:

1) $\overline{ED} = \overline{EF}$ (Δ_{EHD} und Δ_{EFH} sind kongruent) und

2) $\overline{JG} = \overline{JA}$ (siehe oben) und $\overline{JA} = \overline{JE}$ (Δ_{EAJ} ist gleichschenkelig, da es bei A und bei E zwei gleiche Winkel besitzt, wie man durch Parallelverschiebung der Geraden EJ erkennen kann).

Also: $\overline{JG} = \overline{JA} = \overline{JE}$

$$\Rightarrow \overline{ED} - \overline{JG} \stackrel{1;2}{=} \overline{EF} - \overline{JE} = \overline{JF},$$

also: $\boxed{\overline{ED} - \overline{JG} = \overline{JF}}$

Nun hat man also die Länge einer Diagonale und einer Seite des kleineren Fünfecks. Auf die gleiche Art und Weise erhält man auch die Diagonale und die Seite des nächst kleineren Fünfecks.

Da es eine unendlich große Zahl an immer kleineren regelmäßigen Fünfecken gibt, setzt sich auch die Methode der Wechselwegnahme ins Unendliche fort. Das bedeutet, dass kein größtes gemeinsames Maß der Diagonale und der Seite des regelmäßigen Fünfecks gefunden werden kann.

Damit sind die beiden Größen „Seite“ (s) und „Diagonale“ (d) des Pentagramms inkommensurabel, das heißt man kann ihr Verhältnis nicht durch zwei ganze Zahlen ausdrücken,

formal heißt das also: $\frac{d}{s} \neq \frac{m}{n}$ für alle $m, n \in \mathbb{N}^*$.

Hiermit hatte also *Hippasos* gezeigt, dass es nicht nur rationale Zahlen, also Brüche von ganzen Zahlen, sondern auch irrationale Zahlen geben muss.

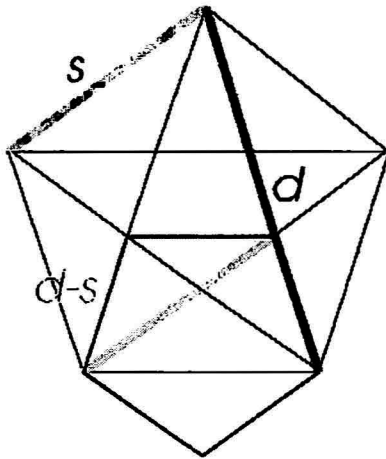
(vgl. <http://www.physik.tu-muenchen.de/~cknaak/Projekte/Mathe.pdf>, S.6-7).

Iamblichos berichtet, dass es nach dem Tod von Pythagoras, also zwischen 500 und 450 v. Chr., zu einer Spaltung unter den Anhängern gekommen sei. Während die sogenannten „Akusmatiker“ das Hauptgewicht auf die Bewahrung der noch auf Pythagoras zurückgehenden heiligen Riten und Gebote legten, bemühten sich die „Mathematiker“, die wie *Hippasos* von der Existenz inkommensurabler Strecken überzeugt waren, um weitere Fortschritte in der mathematischen Wissenschaft. So fanden sie z.B. bald heraus, dass auch die Seite eines Quadrats und seine Diagonale kein gemeinsames Maß haben können (vgl. Wußing, H. (1979). Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, S.53 und Meschkowski, H. (1990). Denkweisen großer Mathematiker-Ein Weg zur Geschichte der Mathematik. Vieweg. S.8).

5. Berechnung der Irrationalen im regulären Fünfeck

Interessant ist nun auch die Frage, welche irrationale Zahl *Hippasos* im regulären Fünfeck entdeckt hat. Dies lässt sich folgendermaßen zeigen:

Man ordnet dem Ausgangsfünfeck mit der Seite s und der Diagonalen d gemäß der folgenden Abbildung ein kleineres, ebenso reguläres Fünfeck zu, das offenbar die Seite $d - s$ und die Diagonale s ($= d - (d - s)$) hat.



Aufgrund der Ähnlichkeit dieser regulären Fünfecke gilt:

$$\frac{d}{s} = \frac{s}{d-s}.$$

Setzt man nun $x := \frac{d}{s}$,

dann gilt nach obiger Gleichung: $x = \frac{1}{x-1}$ (denn: $\frac{1}{1-x} = \frac{1}{\frac{d}{s}-1} = \frac{1}{\frac{d-s}{s}} = \frac{s}{d-s}$),

also $x^2 - x - 1 = 0$, was auf $\boxed{\frac{d}{s} = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)}$ führt.

(vgl. <http://hischer.de/uds/forsch/publikat/hischer/artikel/scheid60.pdf>)

6. Bibliographie

- Kropp, G. (1969). Geschichte der Mathematik. Probleme und Gestalten. Heidelberg: Quelle & Meyer
- Meschkowski, H. (1990). Denkweisen großer Mathematiker-Ein Weg zur Geschichte der Mathematik. Vieweg
- Wußing, H. (1979). Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften

7. Verwendete Internetseiten

- http://encyclopedie-de.snyke.com/articles/euklidischer_algorithmus.html
- <http://hischer.de/uds/forsch/publikat/hischer/artikel/scheid60.pdf>
- <http://lexikon.freenet.de/Pythagoreer>
- <http://www.anklamermediendesign.de/web1/woi/philosophie/pythagoreer.html>
- http://www.izynews.com/de/1/Goldener_Schnitt
- <http://www.landauer.at/griechische-mathematik/>
- <http://www.physik.tu-muenchen.de/~cknaak/Projekte/Mathe.pdf>