

Seminar: „Geschichte der Mathematik“
Seminarleiter: R. Grothmann
Wintersemester 2005/06
Referentin: Sarah Wetzel

Thema:

Der Satz des Pythagoras aus
historischer Perspektive,
ein Beweis und
pythagoreische Tripel

3156
WETZEL, S.
2006



Inhaltsverzeichnis

1. <u>Einleitung</u>	Seite 3
2. <u>kurze Biographie</u>	Seite 4
3. <u>Entstehung des Satzes von Pythagoras</u>	Seite 6
4. <u>Der Beweis von Pythagoras für seinen Satz (Berechnungsbeweis)</u>	Seite 9
5. <u>Der geometrische Beweis durch Ergänzung</u>	Seite 11
6. <u>Beweis mit Ähnlichkeiten</u>	Seite 11
7. <u>Scherungsbeweis</u>	Seite 12
8. <u>Eine Verallgemeinerung des Satzes: Kosinussatz</u>	Seite 14
9. <u>Pythagoreische Zahlentripel</u>	Seite 15
10. <u>Bestimmung „aller“ Zahlentripel</u>	Seite 15
11. <u>Euklids Beweis, dass es eine unendliche Anzahl pythagoreischer Tripel gibt</u>	Seite 19
12. <u>Großer fermatscher Satz</u>	Seite 20
13. <u>Literaturverzeichnis</u>	Seite 22
14. <u>Verwendete Internetseiten</u>	Seite 22

1. Einleitung:

„In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Kathetenquadrate gleich dem Hypotenusenquadrat.“ Dieser Satz ist heute als der **Satz des Pythagoras** bekannt.

Jedoch folgende Zitate lassen erkennen, dass dieser Mensch noch viel mehr war:

„Pythagoras der Begründer der Zahlentheorie und des ersten goldenen Zeitalters der Mathematik“ – Simon Singh¹

„Er ist einer der bedeutendsten Menschen“ – Bertrand Russell

„Er ist der Anführer der Schwindler“ – Heraklit

„Der wise Pictagoras, der ein astronomierre was“ – Wolfram von Eschenbach
Pythagoras selbst soll über sich gesagt haben: „Ich bin ein Sonderwesen zwischen Mensch und Gott.“

und Ludwig Börne über ihn: ***„Als er den Satz gefunden hatte, soll er den Göttern hundert Ochsen geopfert haben. Seitdem zittern alle Ochsen, sooft eine neue Wahrheit entdeckt wird.“***²

Diese Aussage geht zurück auf das bekannte Sonett von Adelbert von Chamisso:

Vom pythagoreischen Lehrsatz

*Die Wahrheit, sie besteht in Ewigkeit,
Wenn erst die blöde Welt ihr Licht erkannt;
Der Lehrsatz nach Pythagoras benannt
Gilt heute, wie er galt zu seiner Zeit.*

*Ein Opfer hat Pythagoras geweiht
Den Göttern, die den Lichtstrahl ihm gesandt;
Es taten kund, geschlachtet und verbrannt,
Einhundert Ochsen seine Dankbarkeit.*

*Die Ochsen seit dem Tage, wenn sie wittern,
Daß eine neue Wahrheit sich enthülle,*

¹ Vgl. Singh, Simon: Fermats letzter Satz, Die abenteuerliche Geschichte eines mathematischen Rätsels, Carl Hanser Verlag, S. 31

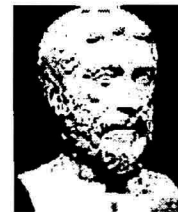
² Vgl. http://www.didmath.ewf.uni-erlangen.de/Verschie/Gut_Ref/Pythago/Pythagoras.html, S.1

Erheben ein unmenschliches Gebrülle;

*Pythagoras erfüllt sie mit Entsetzen;
Und machtlos sich dem Licht zu widersetzen
Verschließen sie die Augen und erzittern.³*

Adelbert von Chamisso

Hier wird deutlich, dass der Satz des Pythagoras in aller Munde ist und auch Eingang in mathematikfremde Gebiete gefunden hat. Dieser Satz in der Mathematik ist wohl einer der bekanntesten und am häufigsten verwendeten Aussagen.



2. Kurze Biographie:

Über Pythagoras selbst weiß man nicht viel, da aus seiner Zeit (6. Jahrhundert v. Chr.) keine Dokumente existieren. Sein Lebenslauf wurde nur mündlich überliefert und etwa im 3. oder 4. Jahrhundert unserer Zeit – also 900 Jahre nachdem er gelebt hatte – niedergeschrieben.⁴ Der ausführlichste Bericht über ihn hat Jamblichos in seinem Buch „Vita des Pythagoras“ verfasst. Weniger aufschlussreiche Darstellungen über Pythagoras' Leben stammen von Herodot in „Vater der griechischen Geschichtsschreibung“ und dem bedeutenden Philosophen Aristoteles, sowie von Diogenes Laertos und Porphyrios.⁵

Man sagt, Pythagoras soll ein großer Mathematiker, Astronom und Philosoph seiner Zeit gewesen sein.

Pythagoras wurde um 570 v. Chr. in Samos auf der griechischen Insel Samos geboren, daher wird er auch in vielen Lehrbüchern mit „Pythagoras von Samos“ betitelt. Sein Vater Mnesarchos soll ein Großhändler aus Griechenland gewesen sein, der seine Frau Pythais, eine Eingeborene aus Samos, kennenlernte, als auf Samos Hungersnot herrschte und er die Bevölkerung mit Getreide belieferte.^{6 7}

³ Vgl. http://de.wikipedia.org/wiki/Satz_des_Pythagoras, S. 8

⁴ Vgl. <http://de.wikipedia.org/wiki/Pythagoras>, S. 1

⁵ Vgl. Staab, Gregor: PYTHAGORAS IN DER SPÄTANTIKE; Studien zu De Vita Pythagorica des Iamblichos von Chalkis, S. 54 ff, S. 101, S. 109

⁶ Vgl. ebd., Staab, G.: S. 232 f

Pythagoras verbrachte seine Kindheit mit seinen zwei Brüdern auf Samos und begann sehr früh mit seinen Bildungsreisen.

Er soll in vollem Umfang Astronomie und Geometrie, das er bei den Ägyptern vermittelt bekam, und Arithmetik und Musik, das er in Babylonien erlernt hatte, beherrscht haben.⁸ Lehrer waren dementsprechend allesamt Philosophen, die sein junges Leben maßgeblich beeinflussten. Als Pythagoras' wichtigster Lehrer gilt Pherekydes, über diesen Philosophen wird auch gesagt, dass er dem jungen Pythagoras die Welt der Mathematik eröffnet haben soll.⁹

Nach zwanzig Jahren des Reisens hatte sich dann Pythagoras alle mathematischen Regeln der damals bekannten Welt angeeignet und kehrt auf seine Heimatinsel Samos in der Ägäis zurück, um dort eine dem Studium der Philosophie gewidmete Schule zu gründen, an der man sich mit seinen mathematischen Regeln näher befassen würde.

Während seiner Abwesenheit jedoch gab es einen Machtwechsel und der herrschende Tyrann Polykrates teilt die Ansichten über gesellschaftliche Reformen des jungen Pythagoras nicht; daher bleibt diesem nur die Flucht nach Ägypten.

Diese Ereignisse werden etwa um das Jahr 535 v. Chr. datiert und um 532 v. Chr. ließ sich Pythagoras im süditalienischen Kroton dann nieder, wo er zu seinem Glück in Milon, dem reichsten Bürger Krotons, den idealen Mäzen fand, der zugleich einer der kräftigsten Männer der Geschichte war. Pythagoras' Ruf als Weiser von Samos verbreitete sich schon in ganz Griechenland, doch Milon war noch berühmter. Er war ein Mann von herkuleischer Gestalt, der – was keinem zuvor gelungen war – bei den Olympischen Spielen zwölf Siege errungen hatte. Neben der Athletik schätzte und praktizierte Milon auch Philosophie und Mathematik. Er stellte Pythagoras einen Teil seines Hauses zur Verfügung, groß genug, um darin eine Schule aufzubauen.

Hier gründete Pythagoras eine religiös-philosophisch-politische Gemeinschaft von sechshundert Anhängern, der auch mehrere Frauen angehörten. Sie nannte sich „pythagoreischer Bund“ und ihre Mitglieder bezeichneten sich später als Pythagoreer.

Pythagoras' Lieblingsschülerin war Theano von Kroton, eine Tochter Milons, die er später trotz des Altersunterschieds heiratete.¹⁰

Um zirka 510 v. Chr. während der sechsundsiebzigsten Olympiade kam es in der nahegelegenen Stadt Sybaris zu einem Aufstand. Die Anhänger der gestürzten Regierung

⁷ Vgl. <http://www.satzdespythagoras.de/biografie.html>, S. 1

⁸ Vgl. o. a., Staab, G.: S. 252

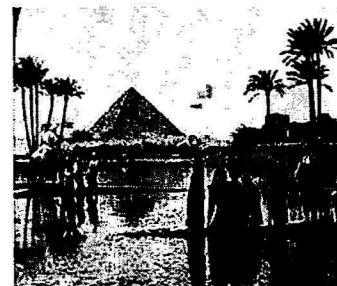
⁹ Vgl. ebd., Staab, G.: S. 54

¹⁰ Vgl. o. a., Singh, S.: S. 32 f

flüchteten nach Kroton, sollten aber ausgeliefert werden. Pythagoras und Milon riefen die Bürger dazu auf, die Flüchtlinge zu schützen. Von Sybaris aus wurde daraufhin ein Heer von 300.000 Mann gegen Kroton geschickt, das von Milon mit 100.000 bewaffneten Bürgern verteidigt wurde. In einem siebzigitägigen Krieg gewann Milon die Oberhand. Zur Vergeltung leiteten die Krotoner den Fluss Crathis um, dessen Wasser Sybaris überflutete und die Stadt zerstörte.¹¹

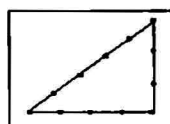
Nun herrschte in Kroton Aufruhr um die Frage der Kriegsbeute. Die einfache Bevölkerung befürchtete, die pythagoreische Elite könnte die erbeuteten Ländereien allein für sich beanspruchen. Neid, Furcht und Verschwörungsängste, die den geheimniskrämerischen Bund umgaben, machten sich breit. Aufgehetzt durch Kylon, einen abgewiesenen Kandidaten der Gemeinschaft, umzingelte der wütende Mob das Haus Milons und die angrenzende Schule. Alle Türen wurden verschlossen und verrammelt, um die Flucht der Bewohner zu verhindern, und dann begann das Mordbrennen. Milon konnte dem Inferno entkommen, Pythagoras aber und viele seiner Schüler starben in den Flammen.

Somit hatte die Mathematik ihren ersten großen Helden verloren, doch der pythagoreische Geist lebte weiter. Die Zahlen und ihre Wahrheiten blieben unsterblich.¹²



3. Entstehung des Satzes von Pythagoras

Über die Entstehung des Satzes von Pythagoras gibt es keine definitiven Erkenntnisse. Man ist sich aber sicher, dass Pythagoras nicht der erste war, der diesen Zusammenhang herausfand, denn in der indischen, babylonischen und ägyptischen Kultur – wie erhaltene Keilschrifttafeln beweisen – bedienten sich Baumeister bereits diesem Satz, da schon eine kleine Abweichung vom rechten Winkel bei Bauwerken zu katastrophalen Ergebnissen führt.¹³



¹¹ Vgl. ebd., Singh, S.: S. 50

¹² Vgl. ebd., Singh, S.: S. 50 f

¹³ Vgl. <http://satzdespythagoras.de/entstehung.html>, S. 1

Um die auch heute noch verblüffende Präzision ihrer Bauten zu erreichen, hatte die ägyptische Priesterschaft mit den so genannten Harpedonapten eine eigene Zunft: die Seilspanner. Diese erzielten genaue rechte Winkel, indem sie 12 gleiche Teile eines langen Seils mit Knoten im Verhältnis 3:4:5 unterteilten und aus dem Seil mit Hilfe von Pflöcken ein Dreieck bildeten.

Diese Methode wandten die Seilspanner ferner an, wenn die Schlammfelder nach dem Rückgang der Nilfluten neu zu bemessen waren.

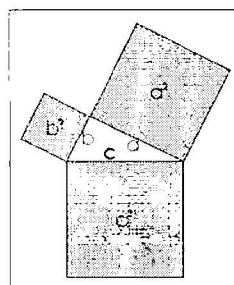
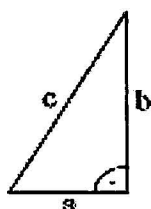
Ebenso bestimmten die indischen Priester ihre rechten Winkel - beispielsweise für den Bau ihrer Altäre – nach der gleichen Methode. Sie unterteilten ihre Dreiecke jedoch im Seitenverhältnis 15:36:39.¹⁴

Da auch die Umkehrung des Satzes gilt, schließen a und b den rechten Winkel ein, wenn die Seillängen die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllen. Das Verhältnis bei den Ägyptern 3:4:5 mit $3^2 + 4^2 = 5^2$ und bei den Indern 15:36:39 mit $15^2 + 36^2 = 39^2$ ergeben deshalb eine gültige Aussage.

Was also bei Babyloniern, Indern und Ägyptern in praktischer und ursprünglich aus ausprobierender Anwendung entstanden war und nach heutigem Wissensstand seinerzeit nicht auf seine Allgemeingültigkeit hinterfragt wurde, erhielt somit im Lehrsatz des Pythagoras mit $a^2 + b^2 = c^2$ seine abstrakte, verallgemeinerte mathematische Aussage.¹⁵

Der Satz in Worten: **Bei jedem rechtwinkligen Dreieck ist der Flächeninhalt des Quadrats über der Hypotenuse genauso groß wie die Summe der Flächeninhalte der beiden Kathetenquadrate.**¹⁶

Und die Umkehrung des Satzes in Worten: **Gilt die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ in einem Dreieck, so ist dieses Dreieck rechtwinklig, wobei der rechte Winkel der Seite c gegenüber liegt.**¹⁷



¹⁴ Vgl. http://de.wikipedia.org/wiki/Satz_des_Pythagoras, S. 2

¹⁵ Vgl. ebd., S. 2

¹⁶ Vgl. <http://did.mat.uni-bayreuth.de/studium/seminar/hypermed1/klarner/seite.htm>, S. 1

¹⁷ Vgl. http://de.wikipedia.org/wiki/Satz_des_Pythagoras, S. 3

Die Grundlagen des Satzes waren also schon vor dem griechischen Mathematiker und Philosophen Pythagoras von Samos bekannt. Die Benennung des Satzes nach Pythagoras stammt von Euklid, der in seinem berühmtesten Werk „Elemente“ das mathematische Wissen seiner Zeit zusammengetragen und dabei diesen Satz Pythagoras zugeschrieben hatte.

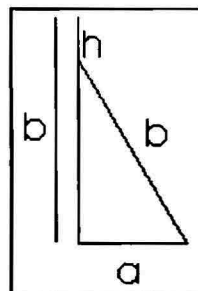
Pythagoras selbst allerdings fällt wahrscheinlich das Verdienst zu, diesen Satz um 540 v. Chr. für die westlichen Kulturen neu entdeckt, in seine verallgemeinerte, abstrakte Formel $a^2 + b^2 = c^2$ gebracht und weiterentwickelt zu haben und vermutlich war er der erste, der die universelle Gültigkeit des Satzes bewiesen hat.^{18 19}

„So enthielt das älteste bekannte Rechenbuch der Welt, das ägyptische Rechenbuch des Ahmes – auch Papyrus Rhind genannt – aus dem 17. Jahrhundert v. Chr. bereits komplizierte Aufgaben, es fehlte jedoch jede Verallgemeinerung, Regel und Definition. Bei Pythagoras wurde aus der Praxis Wissenschaft. Wie der Neuplatoniker Proklos um 470 n. Chr. beschrieb:

...verwandelte Pythagoras die Beschäftigung mit diesem Wissenszweige in eine wirkliche Wissenschaft, indem er die Grundlage derselben von höherem Gesichtspunkt aus betrachtete und die Theoreme derselben immaterieller und intellektueller erforschte.“²⁰

Ein Beispiel für eine altbabylonische Rechenaufgabe (Keilschrifttext, ca. 1700 v. Chr.)

Beachte: Die Babylonier benutzten kein Dezimalsystem, sondern ein Sexagesimalsystem, d. h. die 1 im Sexagesimalsystem entspricht hier der 60 im Dezimalsystem. In den eckigen Klammern sind die Sexagesimalzahlen ins Dezimalsystem umgerechnet. Dabei sind die einzelnen Sexagesimalstellen durch Kommata voneinander getrennt, und die ganzen Zahlen von den Brüchen durch Strichpunkte.



¹⁸ Vgl. <http://www.satzdespythagoras.de/entstehung.html>, S. 1

¹⁹ Vgl. o. a., Singh, S.: S. 44

²⁰ Vgl. http://de.wikipedia.org/wiki/Satz_des_Pythagoras, S. 1 f

„Ein Balken, [er ist] [0;]30 [GAR lang]

Von oben ist er [0;]6 herabgekommen.

Von unten was hat er sich entfernt?

[0;]30 quadriere, 15 [$= 15 * 60 = 900$] siehst du.

[0;]6 von [0;]30 abgezogen, [0;]24 siehst du.

[0;]24 quadriere, 9;36 [$= 9 * 60 + 36 = 576$] siehst du.

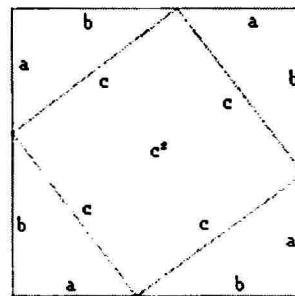
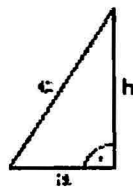
9;36 [$= 576$] von 15 [$= 900$] ziehe ab, 5;24 [$= 5 * 60 + 24 = 324$] siehst du.

5;24 [$= 324$] hat was als Quadratwurzel? [0;]18.

[0;]18 am Boden hat er sich entfernt.“

Gerechnet wird also: $a = \sqrt{(b^2 - (b-h)^2)}$.²¹

4. Der Beweis von Pythagoras für seinen Satz (Berechnungsbeweis)



Das oben abgebildete Dreieck könnte jedes beliebige rechtwinklige Dreieck sein, denn die mit den Buchstaben a, b und c bezeichneten Seitenlängen sind nicht bestimmt.

Daneben sind vier identische rechtwinklige Dreiecke abgebildet, die zusammen mit einem gekippten kleineren Quadrat ein großes Quadrat ergeben. Die Fläche dieses großen Quadrats ist der Schlüssel zum Beweis.

Die Fläche dieses großen Quadrats kann auf zwei Weisen berechnet werden.

Methode 1:

Messe die gesamte Fläche des großen Quadrats. Die Länge jeder Seite ist $a + b$. Daher ist die Fläche des großen Quadrats $= (a + b)^2$.

²¹ Vgl. <http://did.mat.uni-bayreuth.de/studium/seminar/hypermed1/klarner/seite.htm>, S. 5

Methode 2:

Messe die Fläche jedes Elements des großen Quadrats. Die Fläche der Dreiecke beträgt jeweils $\frac{1}{2} ab$, d.h. $\frac{1}{2} \cdot \text{Grundlinie} \cdot \text{Höhe}$. Die Fläche des gekippten Quadrats ist c^2 .

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}\text{Fläche großes Quadrat} &= 4 \cdot (\text{Fläche jedes Dreiecks}) + \text{Fläche gekipptes Quadrat} \\ &= 4 \cdot \left(\frac{1}{2} ab \right) + c^2\end{aligned}$$

Die Methoden 1 und 2 ergeben zwei verschiedene Ausdrücke. Diese Ausdrücke müssen jedoch gleichwertig sein, da sie dieselbe Fläche bezeichnen. Deshalb gilt:

$$\begin{aligned}\text{Fläche aus Methode 1} &= \text{Fläche aus Methode 2} \\ (a + b)^2 &= 4 \cdot \left(\frac{1}{2} ab \right) + c^2\end{aligned}$$

Wir können die Klammern auf beiden Seiten auflösen und die Ausdrücke vereinfachen. Dann ergibt sich:

$$a^2 + b^2 + 2ab = 2ab + c^2$$

Das $2ab$ auf beiden Seiten lässt sich wegekürzen. So erhalten wir:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

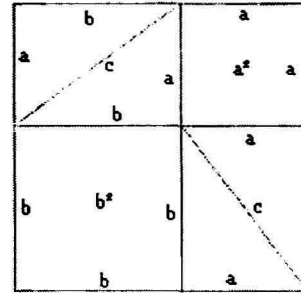
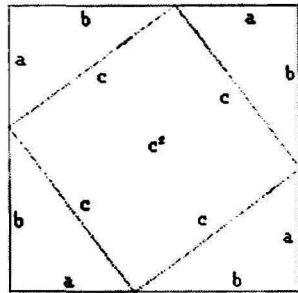
und das ist der **Satz des Pythagoras!**

Das Argument beruht auf der Tatsache, dass die Fläche des großen Quadrats, mit welcher Methode man sie auch berechnen mag, immer dieselbe bleiben muss. Wir erzeugen also auf logisch korrekte Weise zwei verschiedene Ausdrücke für dieselbe Fläche, setzen diese dann gleich und gelangen zur unvermeidlichen Schlussfolgerung, dass $a^2 + b^2 = c^2$. Das Quadrat über der Hypotenuse, c^2 , ist gleich der Summe der Quadrate über den beiden anderen Seiten, $a^2 + b^2$.

Dieses Argument gilt für alle rechtwinkligen Dreiecke. Die Seiten des Dreiecks in unserem Beispiel werden durch a , b und c bezeichnet und können daher die Seiten jedes beliebigen rechtwinkligen Dreiecks darstellen.²²

²² Vgl. o. a. Singh, S.: S. 343 f

5. Der geometrische Beweis durch Ergänzung

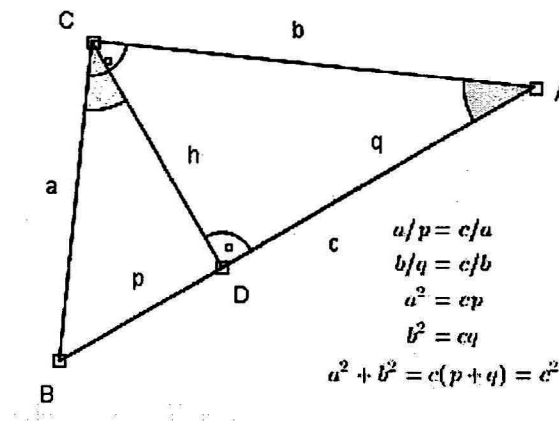


In ein Quadrat mit der Seitenlänge $a + b$ werden vier gleiche (kongruente) rechtwinklige Dreiecke mit den Seiten a , b und c (Hypotenuse) eingelegt. Dies kann auf zwei Arten geschehen, wie hier dargestellt ist:

Die Fläche des linken und des rechten Quadrates sind gleich (Seitenlänge $a + b$). Das linke besteht aus den vier rechtwinkligen Dreiecken und einem Quadrat mit Seitenlänge c , das rechte aus den gleichen Dreiecken sowie einem Quadrat mit Seitenlänge a und einem mit Seitenlänge b . Die Fläche c^2 entspricht also der Summe der Fläche a^2 und der Fläche b^2 , also $a^2 + b^2 = c^2$. Dies ist der Satz des Pythagoras.²³

6. Beweis mit Ähnlichkeiten

Sobald man sich durch Berechnung der Winkelsummen im Dreieck überzeugt hat, dass die beiden grünen Winkel im Bild gleich groß sein müssen, sieht man, dass die Dreiecke ACB , CBD und ACD ähnlich sind.²⁴



²³ Vgl. http://de.wikipedia.org/wiki/Satz_des_Pythagoras, S. 5

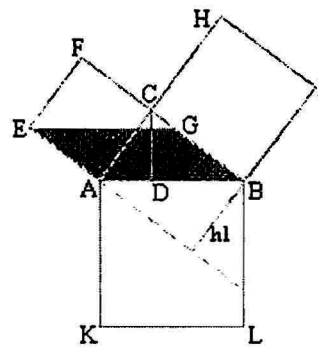
²⁴ Vgl. ebd., S. 6

7. Scherungsbeweis

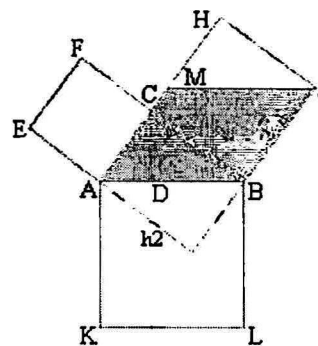
Eine weitere Möglichkeit ist die Scherung der Kathetenquadrate in das Hypotenusenquadrat. Unter Scherung eines Rechtecks versteht man in der Geometrie die Überführung des Rechtecks in ein Parallelogramm unter Beibehaltung der Höhe. Bei der Scherung ist das sich ergebende Parallelogramm zu dem Ausgangsrechteck flächengleich. Über zwei Scherungen können die beiden kleineren Quadrate dann in zwei gleich große Rechtecke umgewandelt werden, die zusammen genau in das große Quadrat passen.²⁵

a) Scheren:²⁶

1. $EACF = EABG$ [weil gleiche Grundlinie EA und gleiche Höhe EF (h_1)]



2. $BJHC = BJMA$ [weil gleiche Grundlinie BJ und gleiche Höhe JH (h_2)]

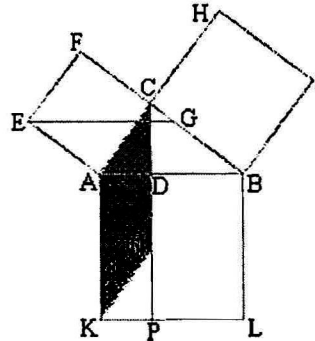


²⁵ Vgl. ebd., S. 5

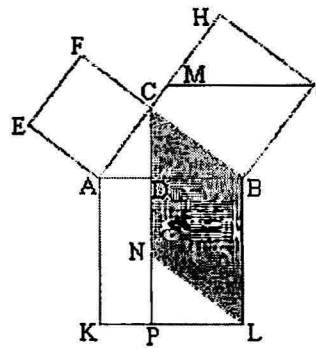
²⁶ Vgl. http://www.didmath.ewf.uni-erlangen.de/Verschie/Gut_Ref/Pythago/Pathagoras.html, S. 4

b) Drehen:²⁷

3. $EABG = AKNC$ [weil um A Kreis: $EA = AC$ und $AB = AK$ (Seiten von Quadraten)]



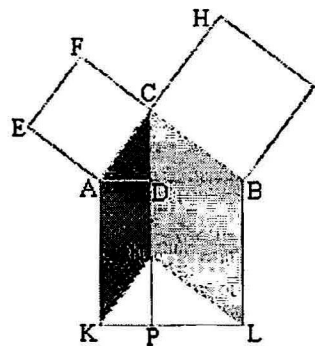
4. $BJMA = BCNL$ [weil um B Kreis: $BJ = BC$ und $BA = BL$ (Seiten von Quadraten)]



c) Scheren:²⁸

5. $AKNC = AKPD$ [weil gleiche Grundlinie AK und gleiche Höhe KP]

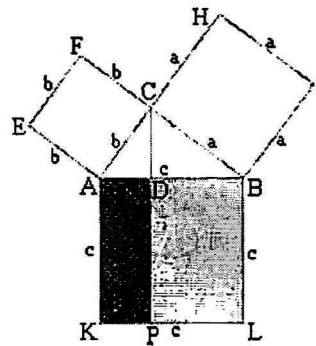
6. $NLBC = DPLB$ [weil gleiche Grundlinie BL und gleiche Höhe PL]



²⁷ Vgl. ebd., S. 4

²⁸ Vgl. ebd., S. 4 f

$$b^2 = c \cdot AD \text{ und } a^2 = c \cdot DB$$



$$\rightarrow c^2 = c \cdot DB + c \cdot AD$$

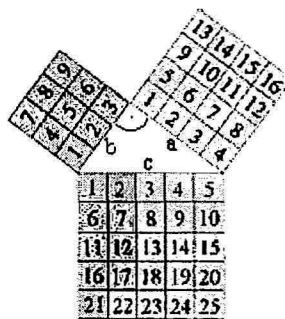
$$\rightarrow c^2 = a^2 + b^2$$

Dies kann man sich auch ganz einfach verdeutlichen, indem man in die einzelnen Quadrate **Einheitsquadrate** (1cm²) einzeichnet und deren Anzahl bestimmt.²⁹

Beispielsweise:

$$16\text{cm}^2 + 9\text{cm}^2 = 25\text{cm}^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$



8. Eine Verallgemeinerung des Satzes: Kosinussatz

Der Kosinussatz ist die Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras für nicht rechtwinklige Dreiecke:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$

wobei der Winkel γ der Hypotenuse c gegenüber liegt.

²⁹ Vgl. ebd., S. 3

Der Kosinussatz unterscheidet sich also durch den Term $-2ab \cdot \cos \gamma$ vom Satz des Pythagoras. Da der Kosinus von 90° Null ergibt, fällt dieser bei einem rechten Winkel weg und der Spezialfall in Form des Satzes von Pythagoras bleibt übrig.³⁰

9. Pythagoreische Zahlentripel

Die ältesten bekannten mathematischen Aufzeichnungen mit pythagoreischen Tripeln und sogar ihrer Quadratur finden sich auf babylonischen Tontafeln, die in die Zeit der Hammurabi-Dynastie datiert werden (1829 bis 1530 v. Chr.).³¹

Man nennt nun drei positive ganze Zahlen a , b und c ein **pythagoreisches Zahlentripel**, wenn sie die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllen.

Es gibt unendlich viele dieser Tripel.

Wenn a , b und c gekürzt sind, d.h. wenn sie keinen gemeinsamen Teiler haben, dann spricht man von einem **primitiven pythagoreischen Tripel**. Bei jedem primitiven Tripel ist c ungerade und von den Zahlen a und b ist eine gerade und die andere ungerade.

Das kleinste pythagoreische Tripel (3,4,5) ist primitiv und (5,12,13) auch, jedoch (15,20,25) und (15,36,39) sind es nicht.³²

10. Bestimmung „aller“ Zahlentripel

Will man nun „alle“ (natürlich unendlich viele) derartige Tripel bestimmen, so bemerkt man zunächst, dass mit jedem Tripel a , b und c für jede positive ganze Zahl d auch das Tripel $d \cdot a$, $d \cdot b$ und $d \cdot c$ pythagoreisch ist und dass man umgekehrt aus

$$(d \cdot a)^2 + (d \cdot b)^2 = (d \cdot c)^2$$

ein Tripel gemäß $a^2 + b^2 = c^2$ erhält.

³⁰ Vgl. http://de.wikipedia.org/wiki/Satz_des_Pythagoras, S. 6 f

³¹ Vgl. ebd., S. 2

³² Vgl. http://de.wikipedia.org/wiki/Pythagoräische_Zahlentripel, S. 1

Man kann sich also auf die Bestimmung aller primitiven pythagoreischen Zahlentripel beschränken, d. h. eben auf solche für die der größte gemeinsame Teiler 1 ist, die also teilerfremd sind. Aus $a^2 + b^2 = c^2$ folgt aber sofort, dass jeder gemeinsame Teiler von a und b schon ein gemeinsamer Teiler von c ist. Ebenso muss wegen $a^2 = c^2 - b^2$ und $b^2 = c^2 - a^2$ aber auch jeder gemeinsame Teiler von c und b bzw. von c und a ein gemeinsamer Teiler aller drei Zahlen bereits teilerfremd sein. Man kann also für die folgenden Überlegungen voraussetzen, dass je zwei dieser drei Zahlen bereits teilerfremd sind. Insbesondere können keine zwei der drei Zahlen gerade sein. Nimmt man nun an, a und b seien beide ungerade, also etwa $a = 2*n + 1$ und $b = 2*m + 1$ mit natürlichen Zahlen n und m , so folgt:

$$\underline{a^2 + b^2} = (2*n + 1)^2 + (2*m + 1)^2 = 4*(n^2 + m^2 + n + m) + 2 = \underline{c^2}$$

d. h. c^2 lässt bei Division durch 4 den Rest 2. Nun ist für eine gerade Zahl c das Quadrat c^2 aber durch 4 ohne Rest teilbar, während für eine ungerade Zahl c das Quadrat bei Division durch 4 den Rest 1 lässt. Dieser Widerspruch zeigt, dass genau eine der beiden Zahlen gerade ist, etwa a , und die andere, also b , ungerade. Da c und a teilerfremd sind, muss folglich auch c ungerade sein. Damit sind $c + b$ und $c - b$ positive ganze Zahlen und man hat die Zerlegung

$$a^2 = c^2 - b^2 = (c + b) * (c - b) = 4 * [(c + b) / 2] * [(c - b) / 2] = 4xy$$

mit positiven ganzen Zahlen $x = (c + b) / 2$ und $y = (c - b) / 2$. Diese beiden Zahlen müssen ebenfalls teilerfremd sein, denn ein gemeinsamer Teiler von x und y ist auch ein gemeinsamer Teiler von $c = x + y$ und $b = x - y$. Folglich ist jeder Primfaktor von $a^2 / 4$ entweder nur Primfaktor von x oder nur Primfaktor von y . Damit sind aber x und y selbst Quadratzahlen, etwa $x = s^2$ und $y = t^2$ mit positiven ganzen Zahlen s und t , die wie x und y teilerfremd sein müssen. Insgesamt gilt also für jedes primitive pythagoreische Zahlentripel

$$a = 2st, \quad b = s^2 - t^2 \quad \text{und} \quad c = s^2 + t^2$$

mit teilerfremden positiven ganzen Zahlen $s > t$, von denen genau eine gerade sein muss, damit b und c ungerade sind.

Sind umgekehrt s und t derartige Zahlen, so gilt

$$\underline{a^2 + b^2} = 4s^2t^2 + (s^2 - t^2)^2 = 4s^2t^2 + s^4 - 2s^2t^2 + t^4 = s^4 + 2s^2t^2 + t^4 = (s^2 + t^2)^2 = \underline{c^2}$$

Durch sämtliche Wahlen für s und t wie oben beschrieben kann man dann systematisch alle primitiven pythagoreischen Zahlentripel erzeugen.³³

Die folgende Tabelle zeigt den Anfang einer derartigen Liste:

s	t	a	b	C
2	1	4	3	5
3	2	12	5	13
4	3	24	7	25
4	1	8	15	17

1. **Mit folgender Formel kann man beliebig viele dieser Zahlentripel konstruieren und somit auch gleichzeitig zeigen, dass es unendlich viele pythagoreische Tripel gibt:**

(man kann aber nicht jedes pythagoreische Tripel so darstellen)

Setze $a := m^2 - n^2$ und $b := 2mn$

Dann ist $c^2 = a^2 + b^2$

$$= (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2$$

$$= m^4 - 2m^2n^2 + n^4 + 4m^2n^2$$

$$= m^4 + 2m^2n^2 + n^4$$

$$= (m^2 + n^2)^2$$

$$\rightarrow c = m^2 + n^2$$

für beliebige Werte m und n, mit $m > n$ und m, n natürliche Zahlen

Jedes primitive pythagoreische Tripel (a, b, c) hat genau eine solche Darstellung, und zwar mittels:

$$m = \sqrt{(c + a)/2} \text{ und } n = \sqrt{(c - a)/2}$$

wenn b die gerade Zahl des Tripels ist. m und n sind dann teilerfremde natürliche Zahlen mit $m > n$, wobei eine gerade und die andere ungerade ist.³⁴

³³ Vgl. <http://www.mathe.tu-freiburg.de/~hebisch/cafe/pythtripel.html>, S. 1 f

³⁴ Vgl. http://de.wikipedia.org/wiki/Pythagoräisches_Tripel, S. 1

Man erhält also alle pythagoreischen Tripel genau einmal, wenn man für m und n beliebige teilerfremde Zahlen mit $m > n$ wählt, von denen eine gerade ist, das dadurch bestimmte primitive Tripel a, b, c berechnet, und mit einer beliebigen Zahl d multipliziert: $d \cdot a, d \cdot b, d \cdot c$

Beispiele:

- 2, 1 liefert das Tripel (3, 4, 5)
- 3, 1 liefert das Tripel (8, 6, 10) (welches nicht primitiv ist, weil 3 und 1 beide ungerade sind)
- 3, 2 liefert das Tripel (5, 12, 13)
- Multiplikation mit 7 liefert (35, 84, 91)

		n			
		1	2	3	7
	2	$3^2 + 4^2 = 5^2$			
m	3	$8^2 + 6^2 = 10^2$	$5^2 + 12^2 = 13^2$		
	4	$15^2 + 8^2 = 17^2$	$12^2 + 16^2 = 20^2$	$7^2 + 24^2 = 25^2$	
	17	$288^2 + 34^2 = 290^2$	$285^2 + 68^2 = 293^2$	$280^2 + 102^2 = 298^2$	$240^2 + 238^2 = 338^2$

2. Eine weitere Formel zur Berechnung eines pythagoreischen Zahlentripels:

$$n ; (n^2 - 1) : 2 ; (n^2 + 1) : 2$$

oder:

$$2n ; n^2 - 1 ; n^2 + 1$$

mit der Voraussetzung: $n = \text{ungerade Zahl}$ ³⁵

Beispiel:

Sei $n = 3$:

$$(3^2 - 1) : 2 = 4 ; (3^2 + 1) : 2 = 5 \rightarrow \text{pythagoreisches Zahlentripel } 3; 4; 5$$

³⁵ Laubenbacher, Reinhard; Pengelley, David: Mathematical Expeditions, Springer-Verlag, S. 173

Pythagoreische Zahlentripel für $c < 200$, ($c^2 = a^2 + b^2$):

c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b
5	4	3	61	60	11	101	99	20	157	132	85
13	12	5	65	56	33	109	91	60	169	120	119
17	15	8	65	63	16	113	112	15	173	165	52
25	24	7	73	55	48	125	117	44	181	180	19
29	21	20	85	77	36	137	105	88	185	153	104
37	35	12	85	84	13	145	143	24	185	176	57
41	40	9	89	80	39	145	144	17	193	168	95
53	45	28	97	72	65	149	140	51	197	195	28

Siehe S. 868, Müller-Fonfara, Robert: Mathematik verstehen, Falken-Verlag GmbH, 1994 Niedernhausen

11. Euklids Beweis, dass es eine unendliche Anzahl pythagoreischer Tripel gibt

Euklids Beweis beginnt mit der Feststellung, dass die Differenz zwischen aufeinanderfolgenden Quadratzahlen immer eine ungerade Zahl ergibt und um 2 wächst:

1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	7^2	8^2	9^2	10^2	...
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	...
\	/ \	/ \	/ \	/ \	/ \	/ \	/ \	/ \	/ \	
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	...

Jede einzelne Zahl aus der Unendlichkeit der ungeraden Zahlen kann zu einer bestimmten Quadratzahl addiert werden, so dass sich eine weitere Quadratzahl ergibt. Ein Bruchteil dieser ungeraden Zahlen besteht selbst aus Quadratzahlen, doch ein Bruchteil des Unendlichen ist ebenfalls unendlich.

Deshalb gibt es auch eine unendliche Anzahl von ungeraden Quadratzahlen, die zu einer Quadratzahl addiert eine weitere Quadratzahl ergeben.

Mit anderen Worten, es muss eine unendliche Anzahl pythagoreischer Tripel existieren.³⁶

³⁶ Vgl. o. a., Singh, S. : S. 347 f

12. Großer Fermatscher Satz

Ausgehend von $a^2 + b^2 = c^2$ liegt es nahe zu fragen, ob es Zahlentripel a , b und c von natürlichen Zahlen (ohne Null) gibt, die Lösungen von Gleichungen der Art

$$a^n + b^n = c^n$$

für $n > 2$ haben.

Fermat schrieb im Jahr 1637 bei der Lektüre „ARITHMETICA“ von Diophantos neben den Satz des Pythagoras folgende Randbemerkung in seine Ausgabe dieses Buches (zu deutsch):

„Es ist nicht möglich, einen Kubus in zwei Kuben, oder ein Biquadrat in zwei Biquadrate und allgemein Potenz, höher als die zweite, in zwei Potenzen mit demselben Exponenten zu zerlegen.

Und eine weitere Bemerkung schreibt Fermat zu seiner ersten hinzu, die Generationen von Mathematikern den Schlaf rauben sollte:

Ich habe hierfür einen wahrhaft wunderbaren Beweis, doch ist dieser Rand hier zu schmal, um ihn zu fassen“³⁷

Somit stellte Fermat also die Behauptung auf, dass es keine derartigen (Fermatschen) Tripel gibt, für die die Gleichung $a^n + b^n = c^n$ erfüllt ist, wenn $n > 2$.

Obwohl er eben keinen Beweis angab, wird diese Fermatsche Vermutung als **großer** oder **letzter Fermatscher Satz** bezeichnet.

Diese „Randnotiz“ von Fermat – das große Rätsel – beschäftigte mehr als 350 Jahre lang die nachfolgenden mathematischen Pioniere in der Geschichte.

Die Kurzgeschichte „The Devil and Simon Flagg“ aus „Deals with the Devil“ – eine Fausterzählung – von Arthur Poges umschreibt diese mathematische Odyssee:

„...„Weißt du“, gestand der Teufel, „nicht einmal die besten Mathematiker auf den anderen Planeten – alle viel weiter als deiner – konnten das Rätsel lösen. Da ist sogar ein Kerl auf Saturn, der aussieht wie ein Pilz auf Stelzen und partielle Differentialgleichungen im Kopf löst: selbst der hat aufgegeben.“

The Devil and Simon Flagg³⁸

³⁷ Vgl. o. a., Singh, S.: S. 86 f

Jahrhundertlang konnte eben kein allgemeiner Beweis für diesen Satz gefunden werden außer für Spezialfälle:

So hat Leonhard Euler in der fermatschen Version der „Arithmetica“ einen gut versteckten Beweis für den Fall $n = 4$ gefunden und somit 1753 mit Hilfe von imaginären Zahlen erstmals die Behauptung für den Fall $n = 3$ beweisen können. Damit gelang es auch die fermatsche Vermutung auf alle Potenzen n , die ein Vielfaches von 3 oder 4 (also 6, 9, 12,...) ausmachen, zu erweitern. Euler schaffte es aber nicht, seine Beweismethode auf noch weitere Einzelfälle auszudehnen.

Die Mathematiker dieser Zeit versuchten, den Satz für alle Primzahlen zu beweisen – aus ihnen lassen sich durch Multiplikation auch alle anderen natürlichen Zahlen erzeugen. Dennoch hatte man es immer noch mit einer unendlichen Zahlenmenge zu tun und damit auch mit unendlich vielen zu beweisenden Fällen.

Im Jahre 1825 konnten Peter Gustav Lejeune-Dirichlet und Adrien-Marie Legendre den Satz für $n = 5$ beweisen und 1839 zeigte Gabriel Lamè für $n = 7$ die Gültigkeit.

1846 folgt der Beweis für alle regulären Primzahlen von Ernst Kummer und 1994 schließlich kann dann endlich der britische Mathematiker **Andrew Wiles** mit seinem Schüler Richard Taylor den großen fermatschen Satz allgemeingültig beweisen. Der Beweis besteht aus zwei Teilen:

1. Sind a, b, c, n mit $a^n + b^n = c^n$ ein Gegenbeispiel für den fermatschen Satz, so ist die elliptische Kurve

$$y^2 = x * (x - a^n) * (x + b^n)$$

nicht modular. Dies wurde 1986 von G. Frey vermutet und 1990 von K. Ribet bewiesen.

2. Alle elliptischen Kurven sind modular. Diese so genannte Taniyama-Schimura-Vermutung wurde für eine große Klasse von elliptischen Kurven, die die Frey-Kurve umfasst, 1994 von Wiles und Taylor bewiesen.

Im 98-seitigen Beweis nutzt Wiles letztlich nahezu jedes Gebiet, das die heutige Zahlentheorie bietet.³⁹

³⁸ Vgl. ebd., Singh, S.: S. 94 f

³⁹ Vgl. http://de.wikipedia.org/wiki/Großer_fermatscher_Satz, S. 2 f

13. Literaturverzeichnis:

- Staab, Gregor: PYTHAGORAS IN DER SPÄTANTIKE; Studien zu De Vita Pythagorica des Iamblichos von Chalkis, Leipzig 2002
- Laubenbacher, Reinhard; Pengelley, David: Mathematical Expeditions, Springer-Verlag, New York 1999
- Singh, Simon: Fermats letzter Satz, Die abenteuerliche Geschichte eines mathematischen Rätsels, Carl Hanser Verlag, München Wien 1998
- Müller-Fonfara, Robert: Mathematik verstehen, Falken-Verlag GmbH, Niedernhausen 1994

14. Verwendete Internetseiten

- http://www.did.math.ewf.uni-erlangen.de/Verschie/Gut_Ref/Pythago/Pythagoras.html
- <http://de.wikipedia.org/wiki/Pythagoras>
- http://de.wikipedia.org/wiki/Satz_des_Pythagoras
- <http://did.mat.uni-bayreuth.de/studium/seminar/hypermedl/klarner/seite.htm>
- <http://www.satzdespythagoras.de/entstehung.html>
- <http://www.satzdespythagoras.de/biographie.html>
- http://de.wikipedia.org/wiki/Großes_fermatscher_Satz
- http://de.wikipedia.org/wiki/Pythagoräisches_Tripel
- <http://www.mathe.tu-freiburg.de/~hebis/cafepythtripel.html>