

3236
EGGERS LAN, C.
1988

EL PITAGORISMO Y EL DESCUBRIMIENTO DE LO IRRACIONAL

CONRADO EGGERS LAN

La hipótesis del escándalo

Entre las abundantes leyendas que aún circulan respecto del antiguo pitagorismo, la más significativa y a la vez la más pintoresca es probablemente la que le adjudica el descubrimiento de la irracionalidad, como comprobación de la imposibilidad de hallar una medida común a la diagonal y al lado del cuadrado (o, lo que es lo mismo, a la hipotenusa y los catetos del triángulo rectángulo isósceles), con consecuencias filosóficas y sociales ciertamente muy extrañas.

Así Paul Tannery declaraba que el “descubrimiento de la incommensurabilidad por Pitágoras debió . . . de causar, en geometría, un verdadero escándalo lógico”, que sólo pudo superarse con la teoría de las proporciones de Eudoxo, ya a mediados del siglo V a.C.¹ Por cierto que el único texto concreto en que podía apoyarse Tannery para la atribución a Pitágoras era un párrafo del llamado “catálogo de los géometras” de Proclo, en el cual (*In pr. Eucl.* 65, 15-21 Friedlein) se dice que “Pitágoras . . . descubrió el tratamiento de los irracionales y la construcción de las figuras cósmicas”. Pero el valor de esta información dependía en buena medida de la presunta autoría del peripatético Eudemo, que hace rato está muy cuestionada;² y al margen de ello, las dificultades que dicha atribución provocaba en la reconstrucción de la historia de las matemáticas condujeron a Thomas Heath³ y a Helmut Hasse y Heinrich Scholz,⁴ entre otros, a pensar más bien en pitagóricos del siglo V que en Pitágoras mismo, aun admitiendo la posibilidad de que se hubiese desatado un escándalo. La razón de éste habría sido que

1. P. Tannery, *La Géométrie Grecque*, París 1887, p. 98.

2. Hemos resumido la más reciente discusión de este tema en nuestro trabajo “Eudemo y el ‘catálogo de géometras’ de Proclo” (*Emerita* 53, 1985, p. 127-157, especialmente p. 139-142), donde arribamos a la conclusión provisional de que la fuente de este pasaje deben ser enseñanzas de un neoplatonismo pitagorizante (o de un neopitagorismo platonizante).

3. T. Heath, *A History of Greek Mathematics*, Oxford 1921, vol. I, p. 154-157.

4. H. Hasse-H. Scholz, *Die Grundlagenkrisis der griechischen Mathematik*, Charlottenburg 1928.

la matemática pitagórica tenía como principio que “todo es número”, o sea, que “el número es la esencia de todas las cosas que existen”,⁵ donde “número” es sólo un número entero, por lo cual la imposibilidad de medición numérica venía a hacer estremecer los cimientos filosóficos de la doctrina. En el caso de Hasse-Scholz la superación de la encrucijada no debía esperar hasta Eudoxo, sino que se producía ya en el siglo V, con Zenón de Elea y su tratamiento de lo infinitesimal.⁶ Estos autores, al igual que Heath, toman en cuenta —para fechar el descubrimiento de lo irracional a mediados del siglo V— un controvertido pasaje del *Teeteto* (147d), en donde se nos informa que Teodoro (considerado “pitagórico” por Hasse-Scholz) “demostró” “la irracionalidad de $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ ”, etc. hasta “ $\sqrt{17}$ ”.⁷ Pero si Teodoro comenzó por $\sqrt{3}$, afirman, esto supone la demostración previa de la irracionalidad de $\sqrt{2}$, que ha sido obra pitagórica: y aquí reina casi total unanimidad en el sentido de que esta antigua prueba es la que Heiberg ha conservado como apéndice 27 al libro X de los *Elementa* de Euclides.⁸

Por cierto que, ya en un artículo de 1940, Bartel L. van der Waerden rechazó la tesis de Hasse-Scholz sobre la índole filosófica de la crisis provocada por el descubrimiento en cuestión, y sobre todo lo de la presunta solución que Zenón habría aportado, pero siempre aceptando que hubo una crisis,⁹ y que la prueba mencionada es pita-

5. Hasse-Scholz p. 5 y Heath p. 155, respectivamente.

6. Hasse-Scholz p. 10 y ss.

7. *Ib.* p. 7, Heath p. 155. El texto platónico dice: “en lo concerniente a *dynámeis*, Teodoro nos *égraphe* esto: tanto respecto del de tres pies (de superficie) cuanto del de cinco pies, puso de manifiesto que no son conmensurables en longitud con el pie (como unidad de medida), y tomó así separadamente cada uno hasta llegar al de diecisiete pies (de superficie)”. Hasse-Scholz y Heath traducen *égraphe* por “demostró”. En cambio, A. Szabó (*Anfänge der griechischen Mathematik*, München-Wien-Oldenbourg 1969, p. 40 = *The Beginnings of Greek Mathematics*, tr. A. M. Ungar, Dordrecht-Boston 1978, p. 40) vierte “dibujó”, y, en fórmula conciliatoria, W. R. Knorr (*The Evolution of the Euclidean Elements*, Dordrecht-Boston 1975, p. 62) escribe “probó mediante diagramas”, lo cual nos parece mejor. En cuanto a *dynámeis*, Heath traduce “raíces cuadradas” (o más precisamente “*surds*”), en tanto que Knorr y M. Burnyeat (“The philosophical sense of Theaetetus’ Mathematics”, en *Isis* 69, 1978, p. 493 s.) “poderes”, Szabó “cuadrados”, y por su parte B. L. van der Waerden (“Die Arithmetik der Pythagoreer”, artículo de 1947/49 reproducido en la recopilación de O. Becker *Zur Geschichte der griechischen Mathematik*, Darmstadt 1965, p. 249, aunque en el “Apéndice 1963” para ese volumen, p. 254, se manifiesta convencido por la traducción de Szabó) y M. E. Paoiow (“Die mathematische Theaetetsstelle”, en *Archiv für History of Exact Sciences* 27, 1982, p. 89) vierten “lados de cuadrados”, que hasta el momento es la interpretación que nosotros adoptamos, ya que nos parece evidente que se está hablando de líneas. De todos modos, esto no afecta a la frase con que Heath y Hasse-Scholz parafrasean la línea al hablar de la irracionalidad de $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, etc.

8. Cf. entre otros O. Becker, *Das mathematische Denken der Antike*, Göttingen 1957, p. 51.

9. B. L. van der Waerden, “Zenon und die Grundlagenkrise der griechischen Mathematik”, en *Mathematische Annalen* 117 (1940/41), p. 115.

górica.¹⁰ En lo que hace a la crisis, sin embargo, Kurt Reidemeister hizo notar que en ninguno de los múltiples pasajes platónicos y aristotélicos que se ocupan de lo irracional puede rastrearse el menor indicio de un escándalo;¹¹ y por lo demás se sospecha actualmente que la doctrina de que “todo el universo es armonía y número”, que Aristóteles atribuye a “los llamados pitagóricos” (*Met.* I 5, 985b-986b; cf. *De Caelo* I 1, 268a) corresponde a Filolao, ya a fin del siglo V o comienzos del IV.¹² De todas maneras, y con la sola excepción de Burkert, todos los autores a que acabamos de aludir consideran que el descubrimiento de lo irracional fue cosa de los pitagóricos, y citan como prueba la demostración de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ que tenemos como apéndice a Euclides X.

La “antigua” demostración de la irracionalidad

Veamos, pues, la prueba.¹³ Dado el cuadrado ABCD, cuya diagonal es AC, se dice que CA es inconmensurable en longitud con el lado AB, y esto se demuestra por reducción al absurdo, sobre la base de que, si “CA es conmensurable con AB, la *ratio* entre CA y AB será la de un número con otro número”, relación ésta comparable a su vez con la de otros dos números entre sí. EZ y H. A partir de aquí se muestra, deductivamente, que EZ es par y a la vez impar, lo cual es absurdo. Por cierto que en el texto —no comentado en escolio alguno— no hay ninguna indicación de la filiación de la prueba ni de su data. A veces esto es resuelto mediante la conexión con la doctrina de lo par y lo impar, rotulada a su turno como pitagórica en base a un testimonio del comediógrafo Epicarmo, pero en este caso con fundamentos aun más precarios.¹⁴ Con mayor frecuencia, en cambio, se aduce la palabra de Aristóteles para avalar la filiación pitagórica de la prueba y su antigua data. Así Arpad Szabó, cuando habla de “la antigua proposición

10. Cf. *Die Pythagoreer*, Zürich-München 1979, p. 198-199; en esta última obra, en cambio, parece haber abandonado la tesis de la crisis, y haberla sustituido (p. 69-71) por una versión crítica de la leyenda de Hípaso, a la que nos referimos más abajo.

11. K. Reidemeister, *Das exakte Denken der Griechen*, Hamburg 1949 (reprod. Darmstadt 1974), p. 30.

12. W. Burkert, *Weisheit und Wissenschaft. Studien zu Pythagoras, Philolaos und Platon*, Nürnberg 1962, p. 242 ss. = *Lore and Science in Ancient Pythagoreanism*, tr. E. L. Minar jr., Cambridge Mass. 1972, p. 261 ss., K. v. Fritz, “Philolaos”, en *R. E. Supplementband XIII* (1973), col. 463, y nuestro capítulo “Filolao y los llamados pitagóricos” en *Los filósofos presocráticos III*, Madrid 1980, esp. p. 99 ss.

13. Euclides, *Elementa* III, p. 408-410 Heiberg = 231-233 Stamatis.

14. Creemos haber refutado esta tesis en nuestro artículo “Epicarmo y la aritmética pitagórica”, incluido en un volumen de homenaje a Rubén Bonifaz Nuño, editado por el Instituto de Investigaciones Filológicas de la Universidad Nacional Autónoma de México (en prensa).

pitagórica sobre la inconmensurabilidad de la diagonal del cuadrado con el lado de éste (*Elem.* X ap. 27). Aristóteles es nuestro testigo de que esta proposición fue verificada desde antiguo, en lo esencial, por la prueba indirecta que leemos también en Euclides¹⁵, y remite, en nota al pie de página, a "*Analytica Priora* I 23, 41a26 y I 44, 50a37"¹⁶. Del mismo modo, entre nosotros, Rodolfo Mondolfo: "También la demostración de la irracionalidad de la $\sqrt{2}$ que nos ha conservado Euclides y atribuida por Aristóteles al antiguo pitagorismo"¹⁶. Aquí falta la referencia a textos aristotélicos, pero han de ser los mismos. El segundo texto es sumamente breve; está hablando de la reducción al absurdo como silogismo hipotético, y ejemplifica: "por ejemplo, cuando se supone que la diagonal es conmensurable, los números impares son iguales a los pares" (50a37-38). Pasemos ahora al pasaje más extenso:

"todos los que razonan por reducción a lo imposible deducen silogísticamente lo falso, pero demuestran la proposición original a partir de una hipótesis, cuando algo imposible resulta al suponer la proposición contradictoria. Por ejemplo, demuestran que la diagonal es inconmensurable, en razón de que, si se la supone conmensurable, los números impares se vuelven iguales a los pares. Por lo tanto, se deduce silogísticamente que los números impares se vuelven iguales a los pares, pero que la diagonal es inconmensurable se demuestra a partir de una hipótesis, puesto que por la proposición contradictoria resulta (lo) falso" (41a23-30).

Como se echa de ver, es sumamente probable que la demostración a que alude Aristóteles sea la misma que se conserva en los *Elementa*, pero no se menciona a su autor o autores, así que es difícil saber de dónde ha sacado Mondolfo que Aristóteles la atribuye a los pitagóricos, como no sea de la *communis opinio* antes mencionada. Por lo demás, Aristóteles habla en presente, no en pasado, y aunque esto, por supuesto, no autoriza a inferir que la prueba es contemporánea de él, no hay el menor indicio que permita ponerlo como testigo, como hace Szabó, de la antigüedad de la misma. Wilbur Knorr ha advertido que el estilo de la prueba se atiene a la práctica de Euclides de distinguir cuidadosamente entre números y magnitudes, práctica cuya base se halla precisamente en el reconocimiento de magnitudes inconmensurables, por lo que no es concebible que los primeros matemáticos hayan separado —en el intento de reconocer la inconmensurabilidad— magnitudes y

números.¹⁷ Cabe agregar que puede haber pocas dudas de que con dicha prueba no se descubrió la irracionalidad, sino que ella misma está suponiendo un descubrimiento anterior por otra vía; y en ese sentido, como ha sugerido Burkert, dicho descubrimiento ha de haberse producido en el ámbito de la geometría y no en el de una teoría aritmética como la de lo par y lo impar.¹⁸

La hipótesis de Hipaso como descubridor

En este punto un importante trabajo del gran helenista alemán Kurt von Fritz viene a atar muchos de los cabos hasta aquí sueltos, y a hacer frente a las objeciones formuladas, con un planteo por añadidura original.¹⁹ Von Fritz parte del pasaje del *Teeteto* ya citado y de la misma conclusión de que el descubrimiento de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ ha debido preceder al tratamiento de los irracionales —allí descrito— por Teodoro; y en vista de las posibles fechas de la actividad de este último, sostiene que aquello debería haber tenido lugar "a más tardar a comienzos del último cuarto del siglo V"; pero incluso, si se acepta la conexión de dicho descubrimiento con los argumentos de Zenón contra el movimiento, ha de haber sido "no después de mediados del siglo V".²⁰ "Y la tradición es unánime en la atribución del descubrimiento al filósofo pitagórico Hipaso de Metaponto", a quien ubica

17. *Evolution* p. 25 s. Por cierto que Knorr propone una alternativa respecto de "qué aspecto podía haber tenido una prueba pitagórica, purificada de estos rasgos anacrónicos" (p. 26 s.), en el estilo del pasaje del *Menón* 82b-85b, al cual aludimos más abajo. Sin entrar en el análisis de la propuesta de Knorr, diremos que nos parece efectivamente más simple que la otra y podría por ende ser más antigua, aunque sin duda corre con la desventaja de no estar documentada como la otra. De todos modos, Knorr no aduce ningún elemento de su presunta filiación pitagórica (en las páginas anteriores —esp. p. 22, donde hace notar que Aristóteles, quien habla de los pitagóricos a menudo, jamás los conecta con la inconmensurabilidad, de la que también a menudo habla— más bien la refuta), de modo que la frase respecto de la forma que podría tener la prueba pitagórica suena hipotética, algo así como si dijera: "si los pitagóricos hubiesen demostrado la inconmensurabilidad con una prueba como la que refiere Aristóteles, no lo habrían hecho del modo que leemos en Euclides, sino más bien de esta otra manera posible".

18. Burkert, *Weisheit* p. 412 = *Lore* p. 436.

19. K. v. Fritz, "The discovery of incommensurability by Hippasus of Metapontum", publicado por vez primera en los *Annals of Mathematics* 46 (1945) p. 242-264, reproducido en D. J. Furley-R. E. Allen (edd.), *Studies in Presocratic Philosophy* vol. I (London 1970) p. 382-412; más tarde, en versión alemana ("Die Entdeckung der Inkommensurabilität durch Hippasos von Metapont"), incluida primeramente en la recopilación de O. Becker (citada en nota 7), p. 271-307, y luego en el libro del propio von Fritz, *Grundprobleme der Geschichte der antiken Wissenschaft* (Berlin-New York 1971), p. 545-571, siempre sin modificaciones. Nosotros citaremos el trabajo según la segunda publicación de la versión en inglés y la primera en alemán (cuya compaginación se reitera en la segunda, marginalmente, lo mismo que en el caso de la inglesa).

20. Von Fritz, "Discovery" p. 385 = "Entdeckung" p. 274-275.

15. Szabó, *Anfänge* p. 332 y nota 115 = *Beginnings* p. 247 y n. 115.

16. Mondolfo, *El infinito en la antigüedad clásica*, trad. F. González Ríos, Buenos Aires, 2a. ed. 1971, p. 241.

(en base a Jámblico y al catálogo de Proclo) "en la generación anterior a la de Teodoro".²¹ Aun cuando von Fritz no precisa las fuentes que constituirían la "tradición" que considera "unánime", es dable inferir que piensa básicamente en dos pasajes del *De Vita Pythagorica* de Jámblico (final del capítulo 88 —reproducido en *De communi mathematica scientia*— y parte de los capítulos 246 y 247), incluidos en Diels-Kranz I 108, como grupo 4 de testimonios sobre Hípaso.²² Dado que allí se habla de la construcción de la "esfera de doce pentágonos"—que se interpreta como una referencia al dodecaedro regular—, von Fritz conjetura que es en esta figura donde se ha producido el descubrimiento, o, más concretamente, en cualquiera de los pentágonos regulares que son sus caras: "había un antiguo método, conocido por los artesanos como regla empírica muchos siglos antes del comienzo de la filosofía y de la ciencia en Grecia, a saber, el método de sustracción recíproca, por el cual se halla la mayor medida común". Por cierto que, en la forma como lo practicaban los artesanos, no era posible descubrir la inconmensurabilidad, pero sí trazando todas las diagonales dentro del pentágono, con lo que se forma un nuevo y más pequeño pentágono regular en el centro, con el cual cabe practicar la misma operación, y así hasta el infinito (cosa que, señala von Fritz, podrían haber hecho los pitagóricos —que "estaban interesados en diagonales"— inclusive por medio del pentagrama o estrella de cinco puntas que usaban como contraseña),²³ por lo cual "es patente casi a primera vista" que "la relación entre la diagonal y el lado no puede ser expresada en números enteros, por grandes que sean".²⁴

21. "Discovery" p. 386 = "Entdeckung" p. 275.

22. Por cierto que esa sección 18.4 de D-K incluye también un texto de Clemente de Alejandría (*Stromata* V 58), que dice: "cuentan que, habiéndose acusado al pitagórico Hiparco (sic) de publicar las (doctrinas) de Pitágoras, fue abiertamente expulsado de la escuela y se le erigió un monumento fúnebre, como si hubiera muerto".

23. "Discovery" p. 402-403 = "Entdeckung" p. 295-296, donde von Fritz ilustra con un gráfico el procedimiento que sugiere. En la misma recopilación de Becker citada en nota 7 se incluye una ponencia de 1958 de Siegfried Heller ("Die Entdeckung der stetigen Teilung durch die Pythagoreer", p. 319-354), en la cual desarrolla el mismo procedimiento. Para el testimonio del pentagrama como contraseña, von Fritz remite al retórico del siglo II d.C., Luciano (*De lapsu in salutando* 5) y a un escoliasta de las *Nubes* de Aristófanes.

24. En el curso de esta "sustracción recíproca", dice von Fritz, podemos ver que "la diferencia entre la diagonal y el lado del pentágono más grande es igual a la diagonal del pentágono más pequeño, y la diferencia entre el lado del pentágono más grande y la diagonal del pentágono más pequeño es igual al lado del pentágono más pequeño, y a su vez la diferencia entre la diagonal del pentágono más pequeño y su lado es igual a la diagonal del siguiente pentágono más pequeño, y así sucesivamente hasta el infinito" (*loc. cit.*). Sin duda von Fritz tiene aquí presente la proposición X 2 de Euclides: "si cuando, de dos magnitudes desiguales, se sustrae continuamente (aei) la menor de la mayor, la restante nunca mide a la precedente, las magnitudes serán inconmensurables" (en X 3, en cambio, se muestra el caso de las magnitudes conmensurables, donde la última restante mide exactamente a la anterior, y se denomina "máxima medida común": al no suceder esto en X 2, el proceso es infinito).

Que el primer caso de irracionalidad haya sido advertido no en la diagonal del cuadrado sino en la del pentágono, dice van der Waerden, "es muy bien posible, pero no seguro".²⁵ De todos modos, nosotros tenemos que señalar que, en todos los casos en que Aristóteles se refiere a la perplejidad que suscita la inconmensurabilidad de la diagonal respecto del lado, no tenemos duda alguna de que está hablando del cuadrado o de un paralelogramo en general.²⁶ Por su parte, Knorr hace notar que la propuesta de von Fritz es la de que el descubrimiento de la inconmensurabilidad tuvo lugar al advertirse que la "sustracción recíproca" o *anthyphairesis* "de dos líneas en razón media y extrema continuaba necesariamente hasta el infinito".²⁷ Y en ese sentido, afirma Knorr, hay que decir que no se conoce en la literatura griega uso alguno de *anthyphairesis* para demostrar la inconmensurabilidad, de líneas en razón media y extrema, y aparentemente los editores y escoliastas de los *Elementos* no encontraron en sus fuentes ejemplos de tal procedimiento.²⁸

Ahora bien, más allá de la posibilidad de que Hípaso haya operado sobre la diagonal de un cuadrado o de un pentágono, y con un procedimiento de "sustracción recíproca" o cualquier otro, debemos considerar la historicidad del hecho mismo del descubrimiento de la irracionalidad por Hípaso, respecto de la cual vimos que von Fritz asevera que "la tradición es unánime". Por el contrario, en efecto, se ha alegado que "la tradición es inexistente".²⁹ Pero dejemos que hablen los textos por sí mismos; para su mejor análisis los dividiremos en párrafos, señalizándolos con letras. El primero dice así:

"(a) Acerca de Hípaso se cuenta que era de los pitagóricos, pero que, por haber publicado y construido por vez primera la esfera de los doce pentágonos, (b) a causa del sacrilegio cometido

25. *Die Pythagoreer* p. 399.

26. Cf. la lista —completa, según el autor— de pasajes aristotélicos concernientes a la inconmensurabilidad, recopilados por Silvio Maracchia, al final de su trabajo "Aristotele e l'incommensurabilità" (en *Archiv for History of Exact Sciences* 21, 1979, p. 201-228), donde (p. 221-226) registra veintinueve pasajes. Por cierto que en ninguno de ellos aparecen las palabras "cuadrado" o "paralelogramo", pero no cabe la menor duda al respecto: desde Platón hasta por lo menos Euclides, *diámetros* significa o bien "diagonal" del cuadrado o de cualquier paralelogramo (o del cubo, en Euclides), o bien "diámetro" del círculo (o de la esfera, en Euclides). Ni siquiera cuando Euclides construye el pentágono (IV 11 y XIII 11) y el dodecaedro (XIII 17) emplea el término *diámetros* para referirse a líneas del pentágono.

27. Knorr, *Evolution* p. 29. Cf. Euclides VI def. 3: "se dice que una recta está dividida en razón extrema y media cuando el segmento mayor es respecto del menor tal como el todo de la recta respecto del mayor" (o sea, lo que desde el Renacimiento se ha llamado "sección áurea" y que ya los griegos denominaban "sección", *tomē*): ésa es la relación que von Fritz plantea entre la diagonal y el lado del pentágono (ver nota 24).

28. *Op. cit.* p. 31.

29. A. Wasserstein, "Theaetetus and the history of the theory of numbers", en *Classical Quarterly* 59 (1958), p. 165 n. 3; Burkert, *Weisheit* p. 433 = *Lore* p. 457, B. L. van der Waerden, "Pythagoreische Wissenschaft", en *R.E.* 47 (1963) col. 286, cf. *Die Pythagoreer* p. 71-72.

pereció en el mar, (c) y recogió la fama de ser el descubridor, aunque todo era (obra) de 'aquel varón': así, en efecto, llamaban a Pitágoras, y no por su nombre" (*V.P.* cap. 88, p. 52, 2-8 Deubner = *Comm. Math. Sc.* p. 77, 18-24 Festa-Klein).

Como se echa de ver, lo que aquí se atribuye a Hípaso es la construcción del dodecaedro, y no se habla para nada de irracionalidad. Leamos ahora el segundo texto:

"(d) Dicen que el primero que reveló la naturaleza de la conmensurabilidad y de la inconmensurabilidad a quienes no eran dignos de participar en tales doctrinas fue abominado a punto tal, que no sólo lo excluyeron del aprendizaje en común y de la convivencia, (e) sino que también le construyeron una tumba, como si aquel que alguna vez había sido su compañero hubiese abandonado efectivamente la vida humana. (f) Otros afirman que la divinidad se disgustó con los que divulgaron las doctrinas de Pitágoras. (g) Como consecuencia del sacrilegio cometido, en efecto, pereció en el mar aquel que reveló el dodecaedro, esto es, cómo se inscribía en una esfera la construcción del icosaedro, una de las cinco figuras dichas sólidas. (h) Pero algunos han dicho que esto sucedió al que difundió lo relativo a la irracionalidad y a la inconmensurabilidad" (*V.P.* cap. 246-247, p. 132, 11-23).

En este segundo texto no se menciona en absoluto el nombre de Hípaso; de todas maneras, la similitud de los párrafos (a) y (b) con el (g) permite conjeturar que también en este último el aludido puede ser Hípaso, pero siempre en relación con el dodecaedro: en este complejo texto queda, en efecto, claramente discernido el caso de quien descubrió o difundió la inconmensurabilidad, (d) y (h), del que difundió la construcción del dodecaedro, (f) y (g). De este modo, si bien la relación que vimos establece von Fritz entre el dodecaedro y la inconmensurabilidad no es imposible,³⁰ no hay ningún testimonio antiguo que

30 Por cierto que la construcción matemática del dodecaedro no se puede practicar sin conocer previamente la del octaedro, efectuada por Teeteto en el segundo cuarto del siglo IV, cosa que von Fritz no ignora (cf. "Theaitetos", en *R.E.* V A 1934, col. 1364), pero arguye ("Discovery" p. 401 = "Entdeckung" p. 295) que el verbo *grápsasthai*, que en nuestro párrafo (a) traducimos "construyó", puede significar también meramente "dibujó", y que es probable que ésa haya sido la tradición original. Y para dibujar un dodecaedro regular no necesitaba Hípaso conocer el octaedro; le ha bastado observar bien alguno de los cristales de pirita con forma natural de dodecaedro regular que F. Lindemann halló en Padua, y que pueden datar de los años 900 a 500 a.C. Este argumento (en el que Kurt von Fritz puso especial énfasis en una conversación personal que sostuvimos en marzo de 1977 en su casa de Munich, cuyo cálido recuerdo me acompaña al escribir estas líneas, por lo que deseo que la crítica que aquí hago valga de homenaje al gran maestro), que ya fuera esgrimido con menor solidez por Eva Sachs (*Die fünf platonischen Körper*, Berlín 1917, p. 84 ss.), constituye sin duda una hipótesis posible, pero nada más que eso, ya que implica conjeturar demasiadas cosas acerca de alguien de quien sabemos tan poco y en forma tan confusa como de Hípaso.

atribuya a Hípaso el descubrimiento de la irracionalidad. La figura de Hípaso (ignorada por Aristóteles y Teofrasto, como no fuera para alinearla extrañamente con Heráclito en la postulación del fuego como *arché* de todas las cosas; cf. D-K 18.7-9 y 22 A 5) parecería haberse convertido, dentro de la literatura de anecdotarios y biografías de fines de la antigüedad, en el chivo emisario de cuanta acusación ha circulado de herejía o deslealtad hacia el pitagorismo, ya fuera como "acusmático" (*Comm. Math. Sc.* p. 76, 19-24), o, al revés, como "matemático" (*V.P.* cap. 81, p. 46, 25-47, 4), o bien en cualquier otro carácter (D.L. VIII 7, *V.P.* cap. 257).

Del lucro con el saber

Vale la pena comparar con los textos precedentes, de todas maneras, un pasaje de Diógenes Laercio (VIII 42), en que menciona el nombre de Hípaso como destinatario de una carta de Lisis de Tarento, "pitagórico que huyó a Tebas y que fue maestro de Epaminondas" (D.L. VIII 7; hay que situarlo, por tanto, a fines del siglo V o comienzos del IV), aunque sabemos que la carta es apócrifa, y escrita unos dos siglos después.³¹ Pues bien, un texto similar se halla preservado en los *Epistolographi Graeci* de R. Hercher y también parcialmente en Jámblico (*V.P.* cap. 75, esp. p. 43, 1-6), pero en estos dos casos figura el nombre de Hiparco, en lugar de Hípaso, lo cual ha sido a veces tomado como un error de Jámblico,³² pero naturalmente también podría tratarse de un error de Diógenes o de su fuente.³³ Veamos unas pocas frases de la carta:

"(i) También dicen muchos que has filosofado en público, lo cual era tenido como indigno por Pitágoras, quien, al confiar sus memorias a su hija Damo, le prescribió que no las diera a conocer fuera de la casa. (j) Y aun pudiendo vender los discursos por mucho dinero, no quiso, sino que tuvo a la pobreza y lo prescripto por su padre por más valiosos que el oro. . . (k) Si cambias en esto, me regocijaré; pero si no, habrás muerto para mí".³⁴

31. W. Burkert, "Hellenistische Pseudopythagorica", en *Philologus* 105 (1961), p. 16 ss.; H. Thesleff, *Introduction to the Pythagorean Writings of the Hellenistic Period*, Abo 1961, p. 15 y 115 (cf. "Doric pseudopythagorica", en *Pseudepigrapha* 1, *Entretiens* XVIII F. Hardt, *Vandoeuvres-Genève* 1972, p. 68).

32. Knorr, *Evolution* p. 61 n. 96.

33. Véase *supra* nota 22; cf. Burkert, *Weisheit* p. 435 n. 86 = *Lore* p. 459 n. 63.

34. Tomo el texto de H. Thesleff (*The Pythagorean Texts of the Hellenistic Period*, Abo 1965, p. 114, 4-12), quien reproduce el de Hercher (*Epistol. Gr.* p. 603). En Diógenes no está el párrafo (k), mientras en Jámblico falta todo lo referente a Damo, y (k) concluye: "habrás muerto", sin el "para mí".

Si hacemos un paralelo de estas palabras con los pasajes que antes citamos de Jámblico, podremos hallar similitudes entre los párrafos (a), (d), (h) e (i), por un lado, en cuanto en todos ellos se trata de una divulgación prohibida (aunque ahora no se especifique el contenido en cuestión), y, por otro, entre (e) y (k), en los que la represalia consiste en darlo por muerto en vida, y a su vez correlativos de (b) y (g), donde el castigo era una muerte efectiva en un naufragio. Pero a esto se añade ahora un elemento nuevo, en (j), a saber, la posibilidad de lucro con la doctrina pitagórica. No se informa abiertamente que Hipaso-Hiparco haya obtenido dinero por su "filosofar en público", pero queda sugerido que sí. Comparemos esto con dos párrafos que vienen inmediatamente a continuación del (c) en Jámblico:

"(l) Las disciplinas matemáticas progresaron después de que publicaron (sus obras) los dos que más las impulsaron, Teodoro de Cirene e Hipócrates de Quíos. (m) Los pitagóricos dicen que la geometría se divulgó de este modo: uno de los pitagóricos perdió su fortuna, y, a raíz de este suceso, se le permitió lucrar con la geometría". (*Comm. Math. Sc.* p. 77, 24-78, 4).

Como ese libro de Jámblico es un verdadero *collage* de pasajes de diversas fuentes, no resulta claro si (m) está conectado con (l), y si por ende el pitagórico de quien se dice que lucró divulgando la geometría es uno de los dos matemáticos mencionados. Teodoro figura en el "catálogo de pitagóricos" de Jámblico (*V.P.* cap. 267, p. 146, 8), lo cual, por cierto, no garantiza en nada su filiación pitagórica; Hipócrates en cambio no figura; aunque precisamente respecto de éste se conectan geometría y lucro en una anécdota que cuenta Filópono, en el sentido de que era un mercader cuya nave fue asaltada cerca de Atenas, por lo que se quedó allí para enjuiciar a sus asaltantes, y, para distraerse durante el largo proceso, se dedicó a la geometría, tratando de cuadrar el círculo (*In Phys.* p. 31, 3 Vitelli).

En todo caso, tanto Teodoro como Hipócrates pertenecen al último tercio del siglo V, lo cual, como en el caso de Hipaso-Hiparco, acerca más en el tiempo el episodio de la divulgación de escritos matemáticos. Y esta cronología, en lo que hace a escritos pitagóricos en general, es reforzada por otro pasaje de Jámblico, donde leemos:

"(n) En el curso de tantas generaciones anteriores a la de Filolao, no apareció ninguna de las memorias pitagóricas, sino que éste fue el primero que publicó los tres libros de los que tanto se ha hablado, (ñ) y de los que se cuenta que Dion de Siracusa, por encargo de Platón, compró en cien minas a Filolao, quien se halla-

ba sumido en una gran y apremiante pobreza" (*V.P.* p. 109, 8-16).³⁵

Dejando de lado si la compra fue directa y era o no el primer ejemplar en venta, llegamos de todas maneras a fin del siglo V o comienzos del IV.

De naufragios y secretos

Volvamos ahora a las versiones más terroríficas de Jámblico, que hablaban de la muerte en el mar como castigo. Por algunos textos como un discurso apologético de Andócides, resulta patente que a fines del siglo V se establecía una suerte de interdependencia recíproca entre sacrilegios y naufragios: si había un naufragio, era castigo de los dioses por la falta cometida, y si se pensaba en una falta cometida por alguien que emprendía un viaje, el castigo divino lógico era un naufragio.³⁶ Hay al respecto un interesante escolio al libro X de Euclides, que dice:

"(o) (Cuenta) un relato de los pitagóricos que el primero que dio a publicidad el estudio de éstos (sc. de los irracionales) sucumbió en un naufragio; (p) y (con ello) tal vez se quería dar a entender (*ēnīttonto*) que todo lo irracional que hay en el universo —no sólo irracional sino también amorfo— gusta ocultarse, y que, si algún alma se arrojara a semejante clase de vida y la hiciera accesible y manifiesta, sería arrojada al mar de la generación y sumergida en las inestables corrientes de ésta. (r) Tal veneración tenían estos varones por el estudio de los irracionales".³⁷

Como puede verse, en (p) se pasa a interpretar la versión del naufragio como un mito. Pues bien, el mismo verbo *ainittomai* ("dar

35. Sobre otros textos referentes a esta presunta compra de Platón —y también en relación con el Pseudo-Timeo Locro— cf. nuestro capítulo sobre Filolao (mencionado en nota 12), esp. p. 87 y 91-94.

36. Andócides, *De Mysteriis* 137.

37. Euclides V 2, *Scholia in libros VI-XIII* p. 417 Heiberg = 85, 22-86, 4 Stamatidis. (Las palabras "gusta ocultarse", *kryptesthai philei*, son una evidente cita del fr. 123 de Heráclito.) Sin duda se trata de la misma versión que leemos en el comentario de Papo al mismo libro X, que conservamos en su traducción al árabe (G. Junge - W. Thomson, *The Commentary of Pappus on Book X of Euclid's Elements*, Arabic Text and translation by W. Thomson, Cambridge Mass. 1930). El pasaje dice, en la versión inglesa: "The sect (or school) of Pythagoras was so affected by its reverence for these things that a saying became current in it, namely, that he who first disclosed the knowledge of surds or irrationals and spread it abroad among the common herd, perished by drowning; which is most probably a parable by which they sought to express their conviction that firstly, it is better to conceal (or veil) every surd, or irrational, or inconceivable in the universe, and, secondly, that the soul which by error or heedlessness discovers or reveals anything of this nature which is in it or in this world, wanders (thereafter) hither and thither on the sea of non-identity . . . where there is no standard of measurement" (p. 64; subrayado mío).

a entender", "significar"), lo hallamos en otro naufragio aludido por Eurípides, según el historiador Filócoro:

"(s) Dice Filócoro que, cuando Protágoras navegaba hacia Sicilia, la nave naufragó, y que esto lo da a entender (*ainittesthai*) Eurípides en su (tragedia) Ixión".³⁸

Complementaria de ésta es la versión de Sexto Empírico:

"(t) Protágoras escribió explícitamente: 'con respecto a los dioses, no soy capaz de decir si existen ni de qué modo son, pues muchas son las cosas que me lo impiden'. (u) Por esta causa los atenienses lo condenaron a muerte, y, habiendo escapado, pereció al naufragar en el mar".³⁹

Si tenemos en cuenta que Filócoro vivió hacia fines del siglo IV a.C. (tal como las fuentes más antiguas de Jámblico), y Eurípides hasta fin del V, podremos observar que la versión más temprana de un naufragio simbólico corresponde a Protágoras, y no a un pitagórico. Pero regresemos al pitagorismo a través de la leyenda del secreto divulgado, en su versión más antigua, la de Plutarco (fin del siglo I d.C., comienzos del II), quien cuenta que el rey Numa hizo aprender a los sacerdotes el contenido de sus libros religiosos, y luego les ordenó que, cuando muriera, los sepultaran con su cadáver, por pensar que no convenía dejar por escrito "cosas secretas" (*apórrhēta*). Y añade:

"(v) Con el mismo razonamiento —se dice— tampoco los pitagóricos pusieron por escrito sus doctrinas, sino que inculcaban en los discípulos dignos el aprendizaje y recuerdo oral de aquéllas. (w) Y habiéndose divulgado a alguien indigno el tratamiento de procedimientos considerados difíciles y secretos (*árrhēta*), afirmaron que la divinidad les había hecho señal (*episēmaínein*) de que castigaría con una gran desgracia común esta infracción y sacrilegio" (*Numa* XXII 2).

38. D. L. IX 55 = Filócoro fr. 217 Jacoby = Eurípides fr. 490 Nauck = D-K 80 A 1, 55.

39. S.E., *Adversus Mathematicos* IX 56 = D-K 80 A 12, cf. B 4. Como en el proceso aludido el acusador parece haber sido Pitodoro, uno de los cuatrocientos tiranos (D.L. IX 54), F. Jacoby (*Fragmente der griechischen Historiker III b Supplement*, vol. I p. 584) fecha el evento entre el 412 y el 411. R. S. Bluck (*Plato's Meno*, Cambridge 1964, p. 359) y W. K. C. Guthrie (*A History of Greek Philosophy* III, Cambridge 1969, p. 262) sitúan, en cambio, algo antes la muerte de Protágoras, en el 420; de todos modos, siempre en el último tercio del siglo V.

Como ha hecho notar Burkert, la palabra *árrhēta* significa —tal como antes *apórrhēta*— no sólo "secreto" o "indecible", en el sentido de "inefable" y a la vez "prohibido", sino también "irracional", porque se consideraba irracional a lo que era indecible en números enteros; y lo que en geometría era *árrhēton* tenía un aire misterioso para el lego, y desde allí había un solo paso hasta unir los dos sentidos de la palabra al seguirse transmitiendo la leyenda.⁴⁰

De esta suerte queda completamente desinflada la versión de que los pitagóricos descubrieron lo irracional: los únicos motivos constantes en la tradición antigua son: 1) los que conciernen al carácter secreto de todas o algunas de sus doctrinas, 2) el hecho de su divulgación en algún momento, no anterior al último tercio del siglo V a.C., y 3) sin que esto sea ya unánime, la consideración de que tal difusión fue sacrílega y conllevó algún castigo.

Hipótesis de un sofista como descubridor

Ahora bien, si no fue un pitagórico. ¿quién descubrió la inconmensurabilidad? Al recopilar anécdotas de naufragios, hemos visto que las más antiguas —al menos en cuanto podemos fecharlas con certeza— conciernen a Protágoras, sofista a quien Aristóteles presenta ocupándose de refutar a los geómetras (*Met.* III 2, 998 al 4). Por cierto que a partir de ese solo dato no pretendemos inferir nada aproximadamente cierto, pero nos sugiere una pista: el problema de la inconmensurabilidad de la diagonal respecto del lado parece un problema propio de sofistas, análogamente al de la cuadratura del círculo, del cual, además de Hipócrates de Quíos —a quien hemos visto como comerciante o con alguna otra conexión aparente, entre (l) y (m), con el lucro en el saber (algo que Platón tomó como rasgo peculiar de los sofistas)—, sabemos por Aristóteles que se ocuparon sofistas como Antifonte y Brisón.⁴¹ Y en el fondo se trata de problemas de la misma orientación, ya que en ambos casos se trata de medir algo que parece difícil o imposible de medir. También al sofista Hipias de Elis una tradición —poco confiable, ciertamente— le atribuye un intento de cuadratura,⁴² y en el

40. Burkert, *Weisheit* p. 436-437 = *Lore* p. 461-462; cf. también L. Brisson, "Usages et fonctions du secret dans le pythagorisme ancien" (en *Le secret*, éd. Ph. Dujardin, Lyon 1987), p. 97. Ambos remiten además a Jámblico, *V.P.* cap. 252 (= Porfirio, *V.P.* cap. 57), cuya fuente es Nicómaco de Gerasa; Burkert cita también una interpolación en el texto de Eliás, *In Ar. Categ.* p. 125, 12-13 Busse, donde se habla de las "líneas irracionales" (en ese caso, un descubrimiento de Teeteto, cf. nota siguiente) como un secreto traicionado. Para "irracional" Platón emplea *árrhēton* en *Rep.* VIII 546c (Euclides prefiere *dílogon*, pero para "racional" usa *rhēton*).

41. *Fis.* I 2, 185a y *Ref. Sof.* XI 171b-172a, y los comentarios de Temistio y Simplicio, en el primer caso, y el de Alejandro, en el segundo.

42. Proclo, *In pr. Eucl.* p. 356, 10-12; cf. Heath, *A History* I p. 226-230.

Hippias Mayor (303b7-c1) se lo muestra en una conversación en la que se toca el tema de las magnitudes irracionales.⁴³

Retornemos ahora al pasaje del *Teeteto* 147d y a la pregunta de por qué Teodoro comenzó con la *dynamis* de 3, y leamos la explicación que daba un comentarista del siglo I o II d.C.:

“También el cuadrado de dos pies es inconmensurable respecto del de un pie en cuanto al lado, pero lo omitió, dicen, por haber mostrado en el *Menón* que el cuadrado (construido) a partir de la diagonal es el doble del cuadrado (construido) a partir del lado”.⁴⁴

Como se sabe, en el *Menón* 82b-85b Sócrates propone a un esclavo que construya un cuadrado que duplique a otro de dos pies de lado y cuatro de superficie, o sea, que construya un cuadrado de ocho pies, y la pregunta por cuánto debe medir su lado no es respondida bien hasta que se abandona el terreno aritmético y se entra en el puramente geométrico: “si no quieres hacer cuentas, muéstrame a partir de cuál (línea se construye el área de ocho pies)” (84a1). Y en seguida se ve que esa línea que hará de lado del nuevo cuadrado es la que, de ángulo a ángulo, atraviesa el cuadrado inicial: “y esa línea es precisamente la que los sofistas llaman ‘diagonal’” (85b3-4). Desde Schleiermacher hasta la fecha se ha acostumbrado a traducir aquí *sophistai* por “sabios”, “profesores” o “intelectuales”. Pero el diálogo tiene permanentemente en vista a aquellos a los que Platón caracteriza (en 91b2-8) como individuos que se ofrecen “como maestros de virtud . . . mediante un salario que han estipulado . . . y sin duda sabes que son los que los hombres llaman ‘sofistas’”. Ante semejante definición, se haría bien extraño que, de las ocho veces que emplea Platón en el *Menón* el vocablo *sophistai* (siempre en plural; además de las instancias ya vistas,

92b5, d2, e5, 95b9, c5 y 96b6), la del pasaje geométrico fuera el único caso en que se lo usara en esa otra acepción. No; está bien claro que habla de lo que él llama “sofistas”. Y puesto que éstos son los que han bautizado “diagonal” a esa línea inconmensurable con el lado, con lo cual queda testimoniado que más bien ellos que los pitagóricos se han interesado en diagonales, nada más lógico que hayan sido ellos los que descubrieron dicha inconmensurabilidad (aunque esto por el momento no pueda pasar de ser otra hipótesis de trabajo). Pero no por eso han provocado escándalos ni sufrido procesos; sin duda alguna, en cambio, han contribuido grandemente al avance de las matemáticas y suscitado la admiración que describe Aristóteles y que ya experimentara Platón. Sólo que ni Platón ni Aristóteles iban a ser quienes les agradecieran tan importante servicio (aunque Platón, como vimos, no ha podido evitar dejarnos un indicio).

Universidad de Buenos Aires

EGGERS LAN Conrado, *El pitagorismo y el descubrimiento de lo irracional*: Méthexis I 1988 17-31. | C'est dans le domaine de la géométrie que les Pythagoriciens ont d'abord découvert l'irrationnel. Examen des découvertes mathématiques attribuées par la tradition à Hippias de Métaponte et des conséquences qu'elles ont entraînées sur l'ensemble des conceptions philosophiques et sociales de l'école pythagoricienne. [14785

43. Por cierto que, aparte de que las palabras en cuestión (“cuando cada una de dos cosas es irracional, pero en conjunto son o bien racionales o bien irracionales”) son puestas en boca de Sócrates, ni Hippias ni Sócrates ni el joven Platón podrían haber manejado tal noción de irracionalidad. Dorothy Tarrant (*The Hippias Major attributed to Plato*, 1928, reprod. New York 1976, p. 83-84) cree que se trata de una equivocación, “porque dos *arrhēta* no pueden convertirse en *rhēta* mediante su suma. . . Hippias es matemático, pero deja pasar inadvertido este error de Sócrates”. Pero en realidad no hay error alguno, ya que, como muestra Heath (*op. cit.* I p. 304), en Euclides XIII 6 se establece que, en una recta racional dividida en *ratio* media y extrema, cada uno de los segmentos así formados es una recta irracional llamada “apotome”, lo cual demuestra que la suma de dos irracionales puede dar una racional. Claro que esto implica el tratamiento de las líneas irracionales (medial, binomial y apotome) del libro X de Euclides, que sabemos por Eudemo (*apud Comm. of Pappus* citado en nota 37, p. 63) que se deben a Teeteto, lo cual supone una fecha bastante posterior a la que correspondería al *Hippias Mayor* (cuyo máximo *terminus ante quem* ha de ser el 388). De modo que allí Tarrant habría podido tener otro argumento para declarar apócrifo el diálogo, o al menos este pasaje.

44. *Anonymi Commentarius in Platonis Theaetetum* p. 20, col. 28, 37-29, 1 Diels-Schubart.