

PHILE,

3288
PHILE, C.
2002

2002

ΑΡΧΑΙΟΕΛΛΗΝΙΚΗ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑ ΚΑΙ ΤΑ ΑΔΙΑΙΡΕΤΑ ΤΟΥ CAVALIERI: ΜΙΑ ΑΠΟΠΕΙΡΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ

Ο Ίταλός Buonaventura Cavalieri¹ (1598 - 1647), ακολουθώντας τον συνηθισμένο για την εποχή του τρόπο απόκτησης παιδείας, εισέρχεται σε νεαρή ηλικία στο όχι και τόσο όνομαστό και ελάχιστα δημοφιλές τάγμα των Ίησουϊτών². Στο ιησουϊτικό μοναστήρι της Πίζα, όπου διαμένει, μυείται στα μαθηματικά από τον βενεδικτίνο μοναχό και μαθητή του Γαλιλαίου Benedetto Castelli (1577 - 1644)^{3,4}, καθηγητή του Λαυρεντίου των Μεδίκων.

Η φιλομότητα του Cavalieri ώθει τον δάσκαλό του να τον παρουσιάσει γύρω στα 1617 στον Γαλιλαίο^{5,6}. Αυτή η συνάντηση θα δώσει την αφορμή να γεννηθεί μία συστηματική

1. Σχετικά με τον Cavalieri πβ. U. DAVISO, *Trattato della Sfera*, Roma, 1682. Ο Daviso υπήρξε μαθητής του Cavalieri και στην εισαγωγή αυτού του βιβλίου υπάρχει ένα διαγραφικό σημείωμα γι' αυτόν. Vita di P. Buonaventura Cavalieri; P. FRISI, *Elogio del Cavalieri*, Milano 1778· F. PREDARI, *Della vita e delle opere di Buonaventura Cavalieri*, Milano 1843· G. PIOLA, *Elogio di Buonaventura Cavalieri*, Milano 1844· A. FAVARO, *Buonaventura Cavalieri nello studio di Bologna*, Bologna 1888· A. MASOTTI, Commemorazione di B. CAVALIERI, *Rendiconti dell' Istituto Lombardo di Scienze e lettere parte generale e atti ufficiali*, 81, 1948, pp. 43-86· E. CARRUCCIO, Cavalieri, *Dictionary of Scientific Biography* (ed. C.C. Gillispie), New York, Vol. 3, 1971 σσ. 149-153· E. GIUSTI, *Buonaventura Cavalieri and the Theory of Indivisibles*, Bologna 1980.

2. Το τάγμα αυτό, Ίησουϊται του Αγίου Ιερωνύμου (Jésuites de Saint Jérôme), ιδρύθηκε στην Ίταλία το 1360 από τον Giovanni Colombini, εγγενή από τη Siena. Το ανδρικό τμήμα του διαλύθηκε το 1668 με διαταγή του Πάπα Κλήμεντος του 9ου και ένα μέρος της περιουσίας του τάγματος δόθηκε στην Ένετική Δημοκρατία. Για περισσότερες λεπτομέρειες πβ. G. DUFNER, *Geschichte der Jesuiten*, Roma 1975.

3. Καθηγητής Μαθηματικών στο Collegio di Sapienza στη Ρώμη, γνωστός για το έργο του στην Ίδραυλική *Della misura dell' acque correnti* (1628), "Ένας ακόμα όνομαστός μαθητής του ήταν και ο E. Torricelli (1608-1647).

4. Κατά τον καθηγητή E. Giusti, η γνωριμία του Cavalieri με τον Castelli θα πρέπει να έγινε πριν από τις 21 Μαΐου 1617, όπως μας αποκαλύπτει το γράμμα του Castelli προς τον Γαλιλαίο, όπου θρίσκουμε την αναφορά για τον αδελφό Buonaventura - «Fra Buonaventura li ha visti, e li fa riverenza insieme con il Padre Priore». B. Castelli a Galileo, Pisa, 21 Μαΐου 1617, G. GALILEI, *Opere*, Vol. 12, no 1256.

5. Στο όνομαστό του έργο, *Discorsi dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* (1η έκδ. 1638 στην Ολλανδία), ο Γαλιλαίος αναφέρεται στον Cavalieri για το βιβλίο του σχετικά με το καυστικό κάτοπτρο, *Lo Specchio ustorio ouero Trattato delle settioni coniche Bologna 1632*, G. GALILEI, *Opere*, vol. 8, σ. 41.

6. Όμως και ο Καρδινάλιος Federigo Borromeo, επίσκοπος Μιλάνου συστήνει το νεαρό μοναχό στον Γαλιλαίο, ζητώντας την υποστήριξη του «... affine che con l'aiuto di V.S. egli

άλληλογραφία εκ μέρους του Cavalieri. Από το 1619⁷, έως το 1641 ο μοναχός θα του αποστείλει περίπου 100 γράμματα, στα οποία όμως ο Γαλιλαίος θα απαντήσει μόνο σ' ένα μικρό μέρος. Όταν το 1619 δεν κατορθώνει να ελκεύει καθηγητής⁸ στο Πανεπιστήμιο της Μπολόνια⁹, το τάγμα των Ιησουϊτών τον ορίζει καθηγητή στα μοναστήρια του, ενώ συνεχίζει να μελετά μαθηματικά στο Μιλάνο και στην Πάδουα. Τελικά δέκα χρόνια αργότερα επιτυγχάνει¹⁰ τον στόχο του, με την υποστήριξη του Γαλιλαίου και ονομάζεται καθηγητής Μαθηματικών¹¹ στο Πανεπιστήμιο της Μπολόνια, θέση που θα διατηρήσει μέχρι τον θάνατό του.

Το όνομα του Cavalieri έχει ταυτισθεί με την θεωρία των αδιαίρετων^{12,13}, την οποία διατύπωσε επίσημα το 1635^{14,15} και η οποία μπορεί να θεωρηθεί ως η αρχή της τελικής

possa giungere a quel termine della professione che ci promette l'inclinazione et habilità ch'egli mostra haverci tanto singolare», G. GALILEO, *Opere*, Vol. 12, no 1258.

7. Μάλιστα στο πρώτο από αυτά διαφαίνονται οι δισταγμοί του για την θεωρία του «se tutte le linee d'un piano a tutte le linee d'un altro piano habbino proportioni», G. GALILEI, *Opere*, vol. 13, no 1515.

8. Μετά από μία σύντομη παραμονή του στην Φλωρεντία, επιστρέφοντας στην Πίζα, διδάσκει ήδη εκεί Ευκλείδη, Αρχιμήδη, αντικαθιστώντας τον Castelli και μελετά τον Πτολεμαίο (πβ. G. GALILEI, *Opere*, vol. 12, no 1379).

9. Silvestro CHERARDI, *Di alcuni materiali per la storia della Facoltà Matematica di Bologna*, Bologna, 1846.

10. «...nel qual tempo attendeva allo Studio di Matematica, che da lui fu sempre più di ogni altro gradito» G. CHILINI, *Teatro d'huomini letterati*, Venezia, MDCXL II.

11. P. RICCARDI, Nuovi materiali per la storia della facoltà di Matematica nell'antica università di Bologna, *Bull. di bibliografia e di Storia delle Scienze Matem. e Fisiche* (Boncompagni) XII 1879, σσ. 299-312.

12. 'Ο Cavalieri έκτός από τα δύο σημαντικά βιβλία του για τα αδιαίρετα, δημοσίευσε οκτώ βιβλία για μαθηματικά και ένα για πίνακα λογαρίθμων. Ένα από τα βιβλία του έχει ως αντικείμενο την αστρολογία όμως, φοβούμενος τις εκκλησιαστικές διώξεις, το δημοσιεύει με το ψευδώνυμο Silvio Filomantia. B. CAVALIERI: *Directorium generale uranometricum, in quo trigonometriae logarithmicae fundamenta...*, Bologna 1632. *Lo Specchio istorico ouero Trattato delle settoni coniche*, Bologna 1632. 2 ed. Bologna 1650. *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*, Bologna 1635. *Compendio delle regole dei triangoli con le loro dimostrazioni*, Bologna 1638. *Centuria di varii problemi. Per dimostrare l'uso e la facilità dei logaritmi nella gnomonica, astronomica, geografia, altimetria, pianimetria, stereometria & aritmetica pratica*, Bologna 1639. *Nuova pratica astrologica*, Bologna 1639. *Appendice della nuova pratica astrologia*, Bologna 1640. *Trigonometria plana et sphaerica, linearis et logarithmica*, Bologna 1643. (Silvio Filomantia), *Trattato della ruota planetaria perpetua e dell'uso de quella*, Bologna 1646. *Exercitationes geometricae sex*, Bologna 1647. (Bologna 1980). *Tavola prima logarithmica. Tavola seconda logarithmica. Annotationi nell'opera, e correctioni de gli errori più notabili*, Bologna γ.χ.

13. G. CELLINI, Gli indivisibili nel pensiero matematico e filosofico di Bonaventura Cavalieri. *Periodico di matematica*, 4th ser., 44, σσ. 1-21.

14. 'Ο Cavalieri είχε πολύ νωρίτερα συλλάβει την θεωρία του (ήδη από το 1627 κυκλοφόρησε χειρόγραφη στους διανοούμενους της εποχής του στον Ciampoli, στον οποίο θα την αφιερώσει και σε αρκετούς άλλους), αλλά δίσταζε να την δημοσιεύσει γιατί καθώς ο Γαλιλαίος ένδοξα φέρταν για θέματα άπειρου και άπειροστού, ίσως ο μαθητής του να πίστευε ότι πρόκειται να δημοσιεύσει κάποια μελέτη. «Cavalieri, wrote twice to Galileo announcing his intention of publishing a work on indivisibles. The purposes of these letters was apparently to give warning in

φάσης¹⁶ που οδήγησε στην δημιουργία του άπειροστικού λογισμού από τους Newton¹⁷ και Leibniz^{18,19}. Μάλιστα ο Γαλιλαίος για να τον υποστηρίξει αναφέρει πώς, μετά τον Αρχιμήδη, ελάχιστοι έχουν εμβαθύνει στην κατανόηση της γεωμετρίας²⁰.

Βέβαια ο όρος αδιαίρετα τον οποίον συναντάμε πολύ νωρίτερα (από την εποχή του Bradwardine)²¹ δεν ανήκει αποκλειστικά²² στον Cavalieri, όμως είναι εκείνος ο οποίος θεωρώντας ως βασική έννοια «όλες τις γραμμές» (Omnes lineae)²³ επιχειρεί να υπολογίσει επιφάνειες και όγκους διαιρώντας τα εμβαδά σε γραμμές και τους όγκους σε επίπεδα δηλαδή ένα γεωμετρικό αντικείμενο δύο ή τριών διαστάσεων θεωρεί ότι αποτελείται από γεωμετρικά αντικείμενα διάστασης μικρότερης του δύο και του τρία αντίστοιχα.

Τα στοιχεία αυτά - τα οποία είναι ισοπαράλληλα εὐθύγραμμα τμήματα για τις επιφάνειες και ισοπαράλληλα επίπεδα για τους όγκους - τα «ονομάζει»²⁴ αδιαίρετα της επιφάνειας και του όγκου αντίστοιχα.

case Galileo had in mind to publish anything himself», M. BARON, *The Origins of the Infinitesimal Calculus*, London, 1969, σ. 116 (note); «Galilée avait eu l'intention, vers 1616 d'écrire un livre sur la "composition du continu" dans lequel il aurait peut-être abordé ce problème. Mais il ne le réalisa point», E. FESTA, La querelle de l'atomisme: Galilée, Cavalieri et les jésuites, *La Recherche*, Vol. 21, 1990, σσ. 1038 - 1047. Για περισσότερες λεπτομέρειες πβ. τα γράμματα του Cavalieri στον Γαλιλαίο 15 Δεκεμβρίου 1621 και 17 Δεκεμβρίου 1627. G. GALILEI, *Opere*, Vol. 13.

15. Για μία εμπειριστική μελέτη της «Γεωμετρίας» του Cavalieri πβ. τη μελέτη της K. ANDERSEN, Cavalieri's methods of Indivisibles, *Arch. for History of Exact Sciences* 31, 1985, σσ. 291-367.

16. G.W. LEIBNIZ, *The Early Mathematical Manuscripts*, Transl. from the Latin Texts of C.I. Gerhard with Notes by J.M. Child, Chicago, 1920, σ. 196.

17. H.W. TURNBULL, *The Mathematical discoveries of Newton*, London, 1945.

18. C.I. GERHARDT, *Die Entdeckung der Differentialrechnung durch Leibniz*, Salzwedel, 1848.

19. Στην δεκαετία του 1960, οι προσπάθειες για τη θεμελίωση του άπειροστικού λογισμού πάνω στην έννοια των στατικών άπειροστών (Leibniz) φανερά συνδεδεμένη με την έννοια των αδιαίρετων άναγνωρίζονται με τις έρευνες του μεγάλου μαθηματικού Abraham Robinson (1918 - 1974) και τη δημιουργία της non - standard analysis. Πβ. A. ROBINSON, *Non - Standard Analysis*, Amsterdam, 1966.

20. G. GALILEO, *Opere*, vol. 14, no 1937: «Stimo pochi da Archimede in qua, e forse niuno, essersi tanto internato e profundato nell'intelligenza della geometria».

21. «Nullum continuum ex indivisibilibus infinitis integrari vel componi», E. HOPPE, Zur Geschichte der Infinitesimalrechnung bis Leibniz und Newton, *Jahrbuch, Deutsche Mathematiker Vereinigung XXXVII*, 1928, σ. 159.

22. 'Ο Γαλιλαίος στο έργο του *Discorsi* χρησιμοποιεί τον όρο indivisibili. Πβ. G. GALILEI, *Opere*, Vol. 8, σ. 41.

23. Το 1621 ο νεαρός μοναχός άπερσινόμενος στον Γαλιλαίο, του ζητά την γνώμη του αν μπορεί να παραστήσει με επιφάνεια ή ένα όγκο με «όλες τις γραμμές» ή «όλα τα επίπεδα» που μπορούν να περιέχουν. Όμως ο Γαλιλαίος δεν διατύπωσε ποτέ την γνώμη του ούτε όμως και απάντησε στον 23χρονο Cavalieri.

24. 'Ο Cavalieri τόσον στην «Γεωμετρία» όσο και στις «Ασκήσεις» δεν δίδει έναν σαφή όρισμό της έννοιας αδιαίρετο. Πβ. C. BOYER, *The History of the Calculus and its Conceptual Development*, New York, 1949, σ. 117. Το βιβλίο του «Γεωμετρία» δεν φημίζεται για την σαφήνιά του. «Si l'on donnait des prix d'obscurité, Cavalieri aurait dû enporter sans conteste le premier», M. MARIE, *Histoire des Sciences Mathématiques*, t. IV, 1884, σ. 90. Ακόμα και ο Γαλιλαίος φαίνεται ότι έρχε την θεωρία του δύσκολη. Το γράμμα του προς τον Cavalieri δεν διασώθηκε αλλά η απάντηση του Cavalieri προς αυτόν είναι αποκαλυπτική: «Mi dispiace che la Geometria mia riesca così difficile et laboriosa come dice: sarà colpa mia, che malamente mi sarò

Ἐπειδὴ κάποια γεωμετρικά στερεά σχήματα δημιουργούνται ἀπὸ τὴν περιστροφή τους γύρω ἀπὸ ἓνα ἄξονα - ὅπως τὸ τρίγωνο γεννᾷ τὸν κῶνο ἢ τὸ παραλλήλογράμιον τὸν κύλινδρο, ὁ Cavalieri ἀντιμετωπίζει μὴ σημαντική δυσκολία - καθὼς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου εἶναι τὸ μισὸ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ παραλλήλογράμιου ἰδίας βάσης ἰδίου ὕψους, ὁ δὲ ὄγκος τοῦ κώνου εἶναι τὸ τρίτο τοῦ ὄγκου τοῦ κυλίνδρου.²⁵ Γιὰ τὴν ἐπίλυση ὁ Cavalieri ἐπιστρατεύει ἓνα «τέχνασμα» σχετικὸ μὲ τὴν γένεση τῶν γεωμετρικῶν σχημάτων, καθὼς θεωρεῖ τὸν κύλινδρο καὶ τὸν κῶνο ἀποτελούμενους ἀπὸ παράλληλα πρὸς τὴν βάση ἰσαπέχοντα ἐπίπεδα.²⁶

Ἄν καὶ ὁ Cavalieri δὲν ἀσχολήθηκε οὔτε μὲ τὴν μαθηματικὴ οὔτε μὲ τὴν φιλοσοφικὴ πλευρὰ τοῦ συνεχοῦς²⁷, τὸ βιβλίον του «*Ἡ Γεωμετρία τῶν ἀδιαίρετων*...» προκάλεσε ἀρκετές διαφωνίες γιὰ τὴν θεώρηση τῆς «διαμέρισης» (ὅχι φυσικὰ μὲ τὴν ἔννοια τοῦ Riemann) συνεχῶν γεωμετρικῶν ἀντικειμένων σὲ ὅλο καὶ μικρότερα μέρη. Φαίνεται δὲ ὅτι αὐτὲς οἱ διαδοχικὲς διαμερίσεις οἱ ὁποῖες οὐσιαστικὰ ὁδηγοῦν στὸ ἀδιαίρετο²⁸, στὸ ἄ-τιμὸ προκάλεσαν τὶς ἀντιδράσεις τοῦ τάγματος τῶν Ἰησουϊτῶν, ποὺ ἀπομάκρυναν τὸ βιβλίον τοῦ Cavalieri ἀπὸ τὴν διδασκαλία τῶν μαθηματικῶν στὰ ὄνομαστὰ γιὰ τὴν παρεχόμενη παιδεία σχολεῖα τους. Ὅπως ἀπέδειξε τὸ 1990 ὁ καθηγητὴς E. Festa, οἱ Ἰησουῖτες τοῦ Collegio Romano²⁹ σ' ἓνα ἐγγραφοῦ τοῦ τῆς 10ης Αὐγούστου 1632³⁰ ἀπευθυνόμενον σ' ὅλους τοὺς διδασκόντες ἀπαγόρευσαν τὴν χρῆση τῆς ἔννομιας τοῦ ἀτόμου τόσο στὴν φυσικὴ³¹ ὥς καὶ στὰ μαθηματικά. Ἡ ἀπαγόρευση αὐτὴ μὲ διαδοχικὰ ἐγγραφα διατηρήθηκε μέχρι τὸ 1649. Ὁ Sforza Pallavicino στὸ ἔργο του *Vindicationes Societatis Jesu* (Roma, 1649) δηλώνει πῶς ἡ ἀτομικὴ θεωρία διαταράσσει αὐτὸ ποὺ ἡ Ἐκκλησία μάς διδάσκει γιὰ τὴν θεία Εὐχαριστία³².

Μιὰ ἐπιστήμη τόσο καθαρὴ καὶ ἀκλόνητη ὥς ἡ Γεωμετρία δὲν ἦταν δυνατόν νὰ μὴν συμβαδίζει μὲ τὶς φιλοσοφικὲς καὶ θεολογικὲς θεωρήσεις τῆς Ἐκκλησίας καὶ μάλιστα νὰ δημιουργήσει πανικὸ³³ καθὼς τὰ ἀδιαίρετα ὁδηγοῦν στὸν Δημόκριτο καὶ τὸν Ἐπίκουρο.

saputo esplicare, ma adogni modo la materia per sé stessa è anco molto difficile ... Mi dovrà però credo compatire V.S., che non havendo quà con chi conferire di simili materie, è cugione che mi sia tal hora parso facile quello che la conferenza mi harebbe fatto conoscer per difficile». Γράμμα 23 Ὁκτωβρίου 1635, GALILEI, *Opere*, Vol. 16, σσ. 327-328.

25. L. BRUNSCHVIG, *Les Étapes de la Philosophie Mathématique*, Paris, 2e éd., 1972, σ. 162.

26. B. CAVALIERI, *Geometria indivisibilibus* ..., Bologniae, 1653, Praefatio: «Nempe circulorum congeriem, quae intra cylindrum et conum, veluti vestigia plani, a basi ad oppositam basim continuo illi aequidistanter fluentis, quo dammodo relinqui intelleguntur».

27. Ὁ Cavalieri ἀντιμετωπίζει δύο βασικά προβλήματα i) νὰ ἐξηγήσει τὶς σχέσεις τῶν Omnes lineae μὲ τὴν σύσταση τοῦ συνεχοῦς καὶ ii) τὶς δυσκολίες ποὺ ἐνυπάρχουν στὴν θεωρητικὴ τῶν ἀλείων μικρῶν γραμμῶν.

28. Π6, καὶ τὴν παρατήρησι, τοῦ Stefano de ANGELIS: «Omnes .. geometras convincit ratiocinatio per indivisibilia, nullumque vidimus fateri non convinci, nisi tres Jesuitas, Guldinum, Bettinum et Tacquet; at quo spirito ductos ignoramus», *De infinitis Parabolis Venetiis*, MDCLIX.

29. Τὸ Collegio Romano, ἀπὸ τὰ πρῶτα φημισμένα Πανεπιστήμια τῶν Ἰησουϊτῶν, ἰδρύθηκε τὸ 1551 ἀπὸ τὸν Ignazio Loyola. Ἀργότερα μετονομάστηκε σὲ Pontificia Università Gregoriana.

30. E. FESTA, *ἔνθ' ἄν.*, σ. 1040.

31. Ἐμμεση ἀναφορά γιὰ τὰ ἀδιαίρετα τὰ ὁποῖα χρησιμοποιεῖ ὁ Γαλιλαῖος στὰ *Discorsi*.

32. Ἐνθ' ἄν., σ. 189. Ἡ ἔννοια τῆς μετασυστήσης κλονίστηκε ἀπὸ τὴν ἀποδοχὴ τῆς θεωρίας τῶν ἀδιαίρετων.

33. Κατηγορήθηκε ὁ Ἰησουῖτης Sforza Pallavicino (εἶναι ἐκεῖνος ποὺ ἀργότερα θὰ γράψει τὴν ἱστορία τοῦ Συμβουλίου τῶν Τριάντων) ὡς ὁπαδὸς τοῦ Ζήνωνος, ἀφοῦ διδάσκει ὅτι ἡ ποσότητα ἀποτελεῖται ἀπὸ ἀπλά σημεία. E. FESTA, *ἔνθ' ἄν.*, σ. 1045.

Πῶς ὁμως ὁ Cavalieri θεωρεῖ τὰ ἀδιαίρετα; Χωρὶς ἓνα σαφὲ ὄρισμό - ὁ ὁποῖος ὅπως ἀναφέραμε ἀποσιωπᾷ - τὰ ἀδιαίρετα δέχονται πολλὲς ἐρμηνείες. Ὁ ἀκαδημαῖος - καθηγητὴς E. Giusti³⁴ θεωρεῖ ὅτι τὸ σύνολο τῶν γραμμῶν Omnes lineae³⁵ ἀποτελεῖ μιὰ καινούργια κατηγορία μεγεθῶν, ὅπου ὁμως ἡ ἔννοια μεγεθὸς διατηρεῖ τὴν ἀρχαιοελληνικὴ θεώρησι τῆς δηλαδὴ ἀκολουθεῖ τὴν θεωρίαν τοῦ Εὐδόξου³⁶.

Στὶς 22 Ἰουλίου 1634, ὁ Cavalieri γράφει στὸν Γαλιλαῖο: «Καθὼς ἔχει ἤδη τελειώσει ἡ ἐκτύπωση τῶν πέντε πρώτων βιβλίων τῆς *Γεωμετρίας* μου θὰ ἤθελα νὰ σὰς τὴν στείλω ὥστε νὰ μορφέσετε νὰ τὰ δεῖτε ὅταν θὰ σὰς εἶναι εὐκολο, θὰ μοῦ κάνετε μεγάλη χάρι καὶ ἀκόμα μεγαλύτερη ἂν μοῦ πείτε τί πιστεύετε γιὰ τὴ θεμελίωση τῶν ἀδιαίρετων. Ὑποπτευόμενος ὅτι ἡ θεώρηση αὐτὴ τῶν πολλῶν ἀπειροστῶν γραμμῶν ἢ ἐπιπέδων, μορεῖ νὰ προκαλέσει δυσκολίες σὲ πολλοὺς, ἀποφάσισα ἀργότερα νὰ γράψω τὸ ἔβδομο βιβλίο στὸ ὁποῖο ἀποδεικνύω τὰ ἴδια πράγματα μὲ διαφορετικὸ τρόπο, διαφορετικὸ ἀκόμα καὶ ἀπὸ τὸν τρόπο τοῦ Ἀρχιμήδους»³⁷.

Φαίνεται πῶς τὴν τελευταία στιγμὴ ὁ Cavalieri ἀποφάσισε νὰ προσθέσει τὸ ἔβδομο βιβλίο στὴ *Γεωμετρία*, φοβούμενος τὶς ἀντιδράσεις τῶν μαθηματικῶν καὶ τῶν φιλοσόφων γιὰ τὴν ἐγκυρότητα τῶν συλλογισμῶν του. Ἡ ἀμφιβολία αὐτὴ προέρχεται, ὅπως λέει, παρ' ὅλο ποὺ χρησιμοποιεῖ γραμμὲς, συλλογὲς γραμμῶν ἢ ἐπιπέδων μὲ πεπερασμένη φύση, ἡ ὁποία ἀντανάκλαται στὴν ἰδιότητα τῆς αἰχμῆς καὶ τῆς μείωσης³⁸.

Ὅμως ὁ Γαλιλαῖος³⁹ ἀπέφυγε νὰ δώσει τὴν ἀποδοχὴ ποὺ τόσο ἐπιθυμοῦσε ὁ μοναχός.

Οἱ πρώτες θεωρήσεις σχετικὲς μὲ τὴν ἔννοια τοῦ ἄ-τιμῶν, τοῦ ἀδιαίρετου, συνάδουν μὲ τὸν Δημόκριτο. Ὁ Πλούταρχος μάς ἔχει διασωῆσει μιὰ πολύτιμη μαρτυρία γιὰ τὴ δημοκρίτεια θεώρηση τῶν ἀτόμων στὰ Μαθηματικά. «Δημοκρίτων διαποροῦντι φυσικῶς καὶ ἐπιτυχῶς εἰ κῶνος τέμνοιο παρὰ τὴν βάσιν ἐπιπέδῳ τί χρὴ διανοεῖσθαι τὰς τῶν τμημάτων ἐπιφανείας, ἰσας ἢ ἀνίσους γιγνομένας; ἀνισοὶ μὲν γὰρ οὖσαι τὸν κῶνον ἀνώμαλον παρέξουσιν πολλὰς ἀποχαράξεις λαμβάνοντα βαθμοειδεῖς καὶ τραχύτητας, ἴσων δ' οὖσων ἴσα τμήματα ἔσται, καὶ φανέται τὸ τοῦ κυλίνδρου πεπνοῦς ὁ κῶνος, ἔξ' ἴσων συγκείμενος καὶ οὐκ ἀνίσων κύκλων, ὅπερ ἐστὶν ἀτοπώτατον»⁴⁰.

Ἄν καὶ στὸ ἀπόσπασμα αὐτὸ δὲν δίδεται ἀπάντηση ἂν θὰ ἐξαφανισθοῦν οἱ ἀνωμαλίες ὅταν οἱ «διαμερίσεις» γίνουν πολὺ λεπτές καθὼς ἐπίσης ποῦ σταματᾷ ἡ «διαμέριση», ὁ Δημόκριτος προσεγγίζει ἀρκετὰ τὴν ἔννοια τοῦ ἀπειροστοῦ. Οἱ ἀνωμαλίες δὲν μποροῦν νὰ ἐξαφανισθοῦν ἀλλὰ μποροῦν νὰ γίνουν ὥς τὸ δυνατόν μικρότερες. Ἔτσι ἐκτός ἀπὸ τὴν ἔννοια τοῦ ἀπειροστοῦ τὴν ὁποῖαν ἀγγίζει, φαίνεται πῶς εἶχε κατανοήσει καὶ τὴν ἔννοια τῆς συνεχείας ὅπως διασωῆζεται ἀπὸ τὸ ἀπόσπασμα τοῦ Πλουτάρχου, καθὼς ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου πρέπει νὰ εἶναι συνεχής⁴¹.

34. H. E. GIUSTI, *B. Cavalieri and the Theory of indivisibles*, Bologna, 1980.

35. Ὁ Cavalieri ἐπεκτείνει αὐτὴν τὴν ἔννοια, ἔτσι ὀνομάζει π.χ. ὅλες τὶς περιφέρειες (ἐλ., Βιβλίο IX) Omnes Circumferentiae μιὰ σειρά ἀπὸ ἱμώκεντρους κύκλους πρὸς ὁδόντα κύκλου.

36. Εὐκλείδου, *Στοιχεῖα*, Βιβλίο Vο.

37. G. GALILEI, *Opere*, Vol. 16, σ. 113 (μετφ. Χ. Φ.).

38. B. Cavalieri, *ἔνθ' ἄν.* σ. 483.

39. Στούς *Διαλόγους* διαφαίνεται πῶς ἡ φυσικὴ σύνθεση τοῦ συνεχοῦς ἀπασχολεῖ τὸν Γαλιλαῖο. Γιὰ τὸν μεγάλου φλωρεντινῶ, τὸ συνεχὲς ἀποτελεῖται ἀπὸ ἀδιαίρετα (ἀτίμια ἢ σημεία) ἀλλὰ αὐτὰ ὄντας ἀπειρίως πολλὰ δὲν ὑπόκεινται σὲ σχέσεις φραγμένον ἀνω ἢ κάτω (*Discorsi*... G. GALILEI, *Opere*, vol. 8, σ. 77. Π6. ἀκόμα E. GIUSTI, *ἔνθ' ἄν.* σ. 43).

40. Πλούταρχου, *de comm. notit.*, 39,1 σ. 1079 E = Fr. B 155, Diels.

41. Ὁ Ἀριστοτέλης ὅμως θεωρεῖ πῶς οἱ ἔννοιες τῆς συνεχείας καὶ τῶν ἀτόμων εἶναι μὴ

Τόσο ο ὕλισμός του δοῦ καὶ ἡ ἱκανότητα τοῦ νὰ διακρίνει τὰ άτομα ἀπὸ τὴν μονάδα τὸν διασώζουσι ἀπὸ τὸν κλοιὸ τοῦ Ἑλεάτη.

Οἱ «διμερίσεις»⁴² τοῦ Δημοκρίτου δὲν ἀποτελοῦν τὴν μοναδικὴ ἀναφορὰ γὰρ θεωρητικῶς ποὺ ἀπαιτοῦνται τοῦ ἀπειροστικοῦ λογιζομένου. Ἡ ἐννοία τῶν ἀτόμων γραμμῶν συνδέεται τόσο μὲ τὴν ἐμὴν νόθα ἀριστοτελικὴ πραγματεία όσο καὶ μὲ τὸν Ξενοκράτη, καὶ τὸν Πλάτωνα⁴³.

Χωρὶς νὰ προσδιορίζει τὴν ταυτότητά τους «ἐνιοὶ» γράφει χαρακτηριστικὰ ὁ Ἀριστοτέλης, «ἐκ τῆς διχοτομίας ἀτομα ποιήσαντες μεγέθη»⁴⁴, ἐνῶ στὰ *Μετὰ τὰ Φυσικά*⁴⁵ ἀποκαλύπτει πῶς ὁ Πλάτων⁴⁶ παραδέχεται τὰς ἀτόμους γραμμὰς: «ἐτι αἱ στιγμαὶ ἐκ τίνος ἐνυπάρξουσιν; τοῦτο μὲν οὖν τῷ γένει καὶ διεμάχεται Πλάτων ὡς ὅντι γεωμετρικῷ δόγματι, ἀλλ' ἐκάλει ἀρχὴν γραμμῆς - τοῦτο δὲ πολλὰκις ἐτίθει - τὰς ἀτόμους γραμμὰς».

Στὴν εὐκλείδεια γεωμετρία τὸ σημεῖο ὁρίζεται ὡς ἀ-τμήτο. Ὁ Ἀριστοτέλης, ποὺ ἀντιτίθεται στὴν πυθαγόρεια ἀντίληψη ταύτισης σημείου καὶ ἀριθμοῦ, μᾶς διασώζει πῶς ὁ Πλάτων ἀποδέχεται τὸ σημεῖο ὡς μὴ γεωμετρικὴ σύμβαση ὀνομαζόντας τὸ ἀρχὴ γραμμῆς ἢ ἀκόμα καὶ ἀτομος γραμμῆ⁴⁸.

Σχετικὰ μὲ τὴν πλατωνικὴ θεώρηση τῶν ἀτόμων γραμμῶν δὲν διασώζονται ἡμεῖς μαθηματικὰ ἀλλὰ συνήθως αὐτὴ ἀποδίδεται στὸν Ξενοκράτη: «τὴν οὖν ἐκ τῆς διχοτομίας καὶ ἀπλῶς τῆς ἐπ' ἀπειρον τομῆς καὶ διαιρέσεως ὑπαντῶσαν ἀπορίαν ὁ Ξενοκράτης οἶεται διαλύσθαι, τὰς ἀτόμους εἰσαγαγὼν γραμμὰς, καὶ ἀπλῶς ἀτομα ποιήσας μεγέθη»⁴⁹. Ὁ δὲ Σμπλίκιος συνεχίζει διερωτώμενος πῶς θεωροῦσε ὁ Ξενοκράτης, ὁ σοφὸς ἀνὴρ, τὰς ἀτόμους γραμμὰς: «Οὐδὲ γὰρ ἠγνοεῖ τὴν φύσιν τοῦ μεγέθους, ἀλλ' οὐδὲ τῷ εἶδει ἀδυνατεῖται λέγειν: τοῦτο γὰρ οὐ μόνον αἱ ἐλάχισται γραμμαὶ ἔχουσιν, ἀλλὰ καὶ τὰ μέγιστα σώματα: μήποτε οὖν οὐ πρὸς τὴν ἀπειρον τομὴν ἐνίστατο ὁ Ξενοκράτης οὐ γὰρ ἂν γεωμετρικὴν ἀρχὴν ἀνέλεν, γεωμετρικὸς ὢν ἀνὴρ, ἀλλὰ πρὸς τὸ εἰς ἀπειρα διηρηθῆαι, ὄντων δὲ τῶν ἀμεινῶν μεγεθῶν, ἅτινα οὐδὲ ὑπὸ φύσεως ἰσχύει καθ' αὐτὰ διαιρεῖσθαι διὰ σμικρότητας, ἀλλ' ἐνωθέντα πάλιν ἄλλοις σώμασιν, οὕτω τοῦ δλου διαιρουμένου, ἐν αὐτοῖς ἐκείνην δέχεται τὴν διαιρέσιν, ἣν μόνον ὄντα οὐκ ἂν ὑπέμεινεν. Ὡς οὖν ὁ Πλάτων ἐπίπεδα εἶπεν εἶναι τὰ πρῶτα καὶ ἐλάχιστα σώματα, οὕτως ὁ Ξενοκράτης γραμμὰς ἀδιαίρετους

συμβάτες. *Φυσ.* VI, 2, 233 a 15: «φανερὸν οὖν ἐκ τῶν εἰρημένων, ὡς οὔτε γραμμὴ οὔτε ἐπίπεδον οὔτε ὅλως τῶν συνεχῶν οὐδὲν ἔσται ἀτομον».

42. Ἀργότερα ὁμοίως σ' ἓνα σχόλιο γιὰ τὸν Εὐκλείδη συναντᾶμε τὴν πλήρη ἀρνήσιν τῆς διαιρέσεως: «οὐκ ἔστιν ἐλάχιστον μέγεθος, ὡς οἱ Δημοκρίτειοι φησὶν», X, IV = 436.16 Heiberg Sch. XI def. 3, V 594 Heiberg: «(τὸ ἐπίπεδον) ἀπειράκις τεμνόμενον ὑπὸ εὐθειῶν οὐκ ἀναλυθῆσεται εἰς ἀπείρους».

43. Π6. καὶ Ἀλεξάνδρου, Ἀφροδισίως, Ἀριστ. Μεταφυσ. I 9 992a 19: «ἀπορεῖ δὲ (Ἀριστοτέλης) ὡς καὶ Πλάτωνος, οὐ μόνον Ξενοκράτους, ἀτόμους γραμμὰς τιθεμένου».

44. *Φυσ.* I 3 187 a 1.

45. 992 a 20.

46. Ὁ Πρόκλος μᾶς διασώζει ὅτι ἡ θεώρησις τῶν ἀτόμων γραμμῶν ὑπῆρχε καὶ στὸν Πλάτωνα ἀλλὰ καὶ στὸν Πυθαγόρειο: «ἐπενόησαν τὴν ἀτομὴν γραμμὴν οὕτω λέγειν αἱ Πυθαγόρειοι καὶ Πλάτων», Πρόκλος, Πλ. Πολιτεία, f. 42v.

47. Εὐκλείδου, *Στοιχεῖα*, Βιβλ. I, ὁρισμός 1: «Σημεῖον ἔστιν, οὐ μέρος οὐθέν».

48. *Μ.τ.Φ.* A 9 992 a 20: «Τούτῳ μὲν οὖν τῷ γένει [τῶν στιγμῶν] καὶ διεμάχεται Πλάτων ὡς ὄντι γεωμετρικῷ δόγματι, ἀλλ' ἐκάλει ἀρχὴν γραμμῆς, τοῦτο δὲ πολλὰκις ἐτίθει τὰς ἀτόμους γραμμὰς».

49. SIMPLICIUS, in *Aristotelis Phys.*, 30 A.

μὲν διὰ σμικρότητα, διαίρετάς δὲ καὶ αὐτὰς οὕτως τῇ φύσει»⁵⁰.

Ὅμως ποῖα ἦταν ἡ γραμμὴ τὴν ὁποίαν θεωροῦσε ἀτομον; Κατὰ τὸν Πρόκλιο⁵¹ στὸ σχόλιό του στὸν *Τίμαιο* ὁ μεγάλος φιλόσοφος ἐννοοῦσε τὴν ἰδεατὴ γραμμὴ ὡς ἀτομον γραμμῆ.

Ἀλλὰ ποῖα εἶναι τὰ ἐπιχειρήματα τῶν ὑποστηρικτῶν τῆς θεωρίας τῶν ἀτόμων γραμμῶν; Φανερὰ τὸ ἐπιχείρημα τῆς διχοτομίας, τὸ ὁποῖο ἀπὸ τὴν ἐποχὴ τοῦ Ἑλεάτη δέχεται ἐπικρίσεις, καθὼς καὶ διὰ τὴν ὑπαρξὴ τῆς ἰδεατῆς γραμμῆς, ἡ ὁποία εἶναι ἀτομος, συνεπάγεται γενικώτερα τὸ ἰδεατὸ τρίγωνο, τετράγωνο, ἐπιφάνεια ἢ στερεὸ σῶμα. Ὅμως αὐτὸ ἀντιβαίνει στὴ δημοκρίτεια θεώρηση «περὶ γὰρ τοῦ ἀτομα εἶναι μεγέθη, οἱ μὲν φαίνονται αὐτὸ τὸ τρίγωνον πολλὰ ἔσται, Δημοκρίτους δ' ἂν φανείη οικείους καὶ φυσικοὺς λόγους πεπεσῆναι»⁵².

Ἀντίθετα τὸ ἀδιαίρετο ἀποκλείεται ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ τῆς γραμμῆς: «ὅλως δὲ τί διοίσει στιγμὴ γραμμῆς; οὐδὲν γὰρ ἴδιον ἔξει ἢ ἀτομος γραμμὴ παρὰ τὴν στιγμὴν παρὰ τοῖνονα» ἐτι ὁμοίως μὲν καὶ ἐπίπεδον καὶ σῶμα ἔσται ἀτομον. Ἐνὸς γὰρ ὄντος ἀδιαίρετου καὶ ἄλλα συνακολουθεῖ διὰ τὸ ἕτερον διηρηθῆαι κατὰ ἕτερον. Σῶμα οὐκ ἔσται ἀδιαίρετον διὰ τὸ εἶναι ἐν αὐτῷ βάθος καὶ πλάτος, οὐδ' ἂν γραμμὴ εἴη ἀδιαίρετος: σῶμα μὲν γὰρ κατ' ἐπίπεδον, ἐπίπεδον δὲ κατὰ γραμμὴν»⁵³.

Μιὰ ἀτομος γραμμὴ εἶναι στὴν πραγματικότητα ἓνα σημεῖο ἀλλὰ δὲν ὑπάρχει ἀντίστοιχο συμπέρασμα γιὰ ἀδιαίρετη ἐπιφάνεια ἢ στερεό.

Ἡ θεώρησις τῶν ἀτόμων γραμμῶν εἶναι ἓνα νοητικὸ δημιούργημα γιὰ νὰ ἀντιμετωπίσουν τὸ πρόβλημα τῆς συνεχείας. Τὸ ἀριστοτελικὸ ἀπόσπασμα⁵⁴ ὅπου ἀναφέρει πῶς ὁ Πλάτων φθάνει νὰ ἀναγάγῃ τὴν οὐσία σὲς ἀρχὲς τῆς, θέτει διὰ τὴν γραμμὴν προέρχονται ἀπὸ τὰ εἶδη τοῦ μικροῦ καὶ τοῦ μεγάλου, καὶ τὸ ἐπίπεδο ἀπὸ τὸ πλατὺ καὶ τὸ στενὸ καὶ τὸ σῶμα ἀπὸ τὸ βαθὺ καὶ τὸ ἀβαθές, καταλήγει πῶς τὸ σημεῖο εἶναι ἀρχὴ τῆς γραμμῆς. Ἀκόμα φαίνεται πῶς ἡ πυθαγόρεια ἀντίληψη διαπερνᾷ τὸν Πλάτωνα⁵⁵ καθὼς ὁ ἀριθμὸς

50. *Ἑνθ' ἂν*, 30 B.

51. «τί οὖν ἐστὶ φοβησόμεθα τοὺς δεινούς τῶν περιπατητικῶν, οἱ δὲ ἐρωτῶσιν ἡμᾶς, ποῖαν ὁ Πλάτων παρεῖληθεν ἐνταῦθα γραμμὴν: τὴν φυσικὴν; ἀλλ' ἀποπον' πέρας γὰρ αὕτη τῶν σωμάτων: ἀλλὰ τὴν μαθηματικὴν; ἀλλ' οὐκ αὐτοκίνητος καὶ οὐκ οὐσία: τὴν δὲ ψυχρὴν οὐσίαν τε εἶναι καὶ χωριστὴν σωμάτων φαιέν, μάτην οὖν ταῦτα φήσομεν αὐτοὺς ἐρωτᾶν, πάλαι γὰρ γραμμὴν ἡμεῖς οὐσιώδη λέγοντες οὔτε παύομεθα, καὶ πρὸ ἡμῶν ὁ Ξενοκράτης, ἀτομον γραμμὴν τὴν τοιαύτην ἀποκαλῶν: γελῶν γὰρ, εἰ τις ἀδιαίρετον νομίζει μέγεθος: ἀλλὰ ὄλγον, ἐπὶ τὸν λόγον τῆς γραμμῆς τὸν οὐσιώδη γραμμὴν φησι χρῆναι καλεῖν». Πρόκλος, Πλ. *Τίμαιος*, 36 b 215 ε.

52. Ἀριστ., *Περὶ Γεν. καὶ Φθ.*, 3 16 a 11.

53. *Περὶ ἀτόμων γραμμῶν*, 970 b29.

54. *Αρ., Μ.τ.Φ.*, 992a 10: «βουλούμενοι δὲ τὰς οὐσίας ἀναγεῖν εἰς τὰς ἀρχὰς μήκην μὲν τίθεμεν ἐκ βραχέος καὶ μακροῦ, ἐκ τίνος μικροῦ καὶ μεγάλου καὶ ἐπίπεδον ἐκ πλατέος καὶ στενοῦ, σῶμα δὲ ἐκ βάθους καὶ ταπεινοῦ καὶ πῶς ἔξει ἢ τὸ ἐπίπεδον γραμμὴν ἢ τὸ στερεὸν γραμμὴν καὶ ἐπίπεδον, ἄλλο γὰρ γένος τὸ πλατὺ καὶ στενὸν καὶ βαθὺ καὶ ταπεινόν: οὕτως οὖν οὐδ' ἀριθμὸς ὑπάρχει ἐν αὐτοῖς, ὅτι τὸ πολὺ καὶ ὀλίγον ἕτερον τούτων, ὅλγον δὲ οὐδ' ἄλλο οὐδὲν τῶν ἄνω ὑπάρχει τοῖς κάτω ἀλλὰ μὴν οὐδὲ γένος τὸ πλατὺ τοῦ βάθους: ἦν γὰρ ἂν ἐπίπεδον τι τὸ σῶμα».

55. «Ζητῶν γὰρ τὰς ἀρχὰς τῶν ὄντων ὁ Πλάτων, ἐπεὶ πρῶτος ὁ ἀριθμὸς ἐδόκει αὐτῷ τῇ φύσει εἶναι τῶν ἄλλων (καὶ γὰρ τῆς γραμμῆς τὰ πέρατα σημεία, τὰ δὲ σημεία εἶναι μονάδας θέσιν ἔχουσας, ἄνευ τε γραμμῆς μήτε ἐπιφανείαν εἶναι μήτε στερεόν, τὸν δὲ ἀριθμὸν καὶ χωρὶς τούτων εἶναι δύνασθαι) ἐπεὶ τοῖνον πρῶτος τῶν ἄλλων τῇ φύσει ὁ ἀριθμὸς ἀρχὴν τούτων

ίναδεικνύεται ως η αρχή των πάντων⁵⁶.

Στο πλατωνικό σύστημα υπάρχει μία διάταξη: στην κορυφή υπάρχουν οι αρχές της μανάδας, το μεγάλο και το μικρό ή η απροσδιόριστη δύαδα, και στο τέλος τα τριυδιάστατα αντικείμενα. Σ' αυτό το διάστημα υπάρχουν τα σημεία και πρέπει να βρισκονται πριν από τις γραμμές. Οι γραμμές πριν από τις επιφάνειες, οι επιφάνειες πριν από τα στερεά⁵⁷.

Χαρακτηριστικοί είναι οι όρισμοί που δίνει ο Εὐκλείδης⁵⁸ στα Στοιχεία, Βιβλίο Ι.

Όρισμός 3: «Γραμμής τὰ πέρατα σημεία».

Όρισμός 6: «Επιφανείας δὲ πέρατα γραμμαί».

Ἡ ἀρχὴ γραμμῆς δὲν εἶναι σημείο ἀλλὰ ἄτομος γραμμὴ ἢ μονάδα, ὥσπου νὰ ἀποκτῇ σὲ θέση τὴν ἀπροσδιόριστη δύαδα. Ὅμως τὸ ἐλάχιστο τῆς ἔκτασης, περιλαμβάνει τὴν ἔννοια τοῦ μήκους ἔτσι τὰ σημεία γίνονται ἄτομοι γραμμῆς. Ὅμοια ἡ ἀρχὴ τῆς ἐπιφανείας εἶναι πρᾶγματι ἀδιαίρετος ἐπιφάνεια καὶ οἱ ἐπιφάνειες ἀδιαίρετα στερεά.

Ὁ H. Vogt⁵⁹, θεωρεῖ πῶς ὁ τίτλος τοῦ βιβλίου τοῦ Cavalieri, ἀπαιτῇ τὴν ἀρχαιοελληνικὴ πραγματεία, *Περὶ ἀτόμων γραμμῶν*. Ἡ κλασικὴ παιδεία τοῦ Ἰησοῦ τῆς μοναχικοῦ Ἰωσῆ νὰ τὸν δόξησιν στὴ σπουδὴ αὐτοῦ τοῦ κειμένου, τὸ ὅποιο νὰ ἔδωκε τὸ ἐρέθισμα γιὰ τὴ σύλληψη τῆς θεωρίας του.

Στὸν 17ο αἰῶνα ὁ Cavalieri ἀποτελεῖ ἕνα «μεμονωμένο σημείο» καθὼς εἶναι ὁ μόνος ὁ ὁποῖος προσπαθεῖ νὰ ἐπεκτείνει τὴ θεωρία τῶν μεγεθῶν τοῦ Εὐδόξου⁶⁰ σὲ ποσότητες μὲ ἄπειρα στοιχεῖα, χωρὶς διόλου νὰ τὸν ἀπασχολεῖ ἡ σύσταση τοῦ συνεχοῦς, συνδέοντας ἔτσι τὴν καινούργια ἐποχὴ μὲ τὴν ἀρχαιοελληνικὴ παράδοση⁶¹. Ἡ *Γεωμετρία* του, ἂν καὶ δὲν εἶχε ἀμεση ἐπίδραση, γίνεται ἡ ἀφορμὴ γιὰ νὰ παρουσιασθοῦν ἀρκετὲς μελέτες⁶², οἱ

ἡγεῖτο εἶναι, καὶ τὰς τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ ἀρχὰς καὶ παντὸς ἀριθμοῦ ἀρχάς» Σμπλ., Φυσ. 1114 a 454, 19.

56. Πρβλ. καὶ «ἀρχὰς τῶν τε ἀριθμῶν καὶ τῶν ὄντων ἀπάντων ἐπέθετο Πλάτων τὸ ἐν καὶ τὴν δύαδα, ὡς ἐν τοῖς Περὶ τὰγαθού Ἀριστοτέλης λέγει», ΛΑΕΞ., Μ.τ.Φ., 16 987 6 33.

57. Πλάτωνος, *Νόμοι*, 984 Δ: «ὄφλον ὡς ὑπόταν ἀρχὴ λαβύσα αὐτὴν εἰς τὴν δευτέραν ἔλθῃ μετὰ δὲ καὶ ἀπὸ ταύτης εἰς τὴν πλησίον, καὶ μέχρι τριῶν ἐλθούσα αἰσθῆσιν σχῆζαι τὰς αἰσθανόμενας».

58. 116. S.P. ZERVOS, Some relations between old and modern considerations on topological dimension: its fundamental role in the foundation of ancient Greek Geometry, *Topology and its applications*, Budva 1972, Beograd (1973) σ. 252-253.

59. *Bibl. Math.* X (3) σ. 146.

60. Σ' ἕνα γράμμα του (15 Δεκεμβρίου 1621) ρωτᾷ τὸν Γαλιλαῖο γιὰ τὸ διάνημα τὸ ὁποῖο ἀντιμετωπίζει καθὼς ἀπὸ τῆς μίας «φαίνεται πῶς ὅλες οἱ γραμμῆς ἐνὸς δοθέντος σχήματος εἶναι ἄπειρες σὲ ἀριθμὸ καὶ ἐπομένως δὲν καλύπτονται ἀπὸ τὸν ὅρισμό τῶν μεγεθῶν τὰ ὁποῖα ἔχουν λόγον καὶ ἀπὸ τὴν ἄλλη «ὅταν τὸ σχῆμα γίνῃ πῶς μεγάλο τότε καὶ οἱ γραμμῆς θὰ γίνωνται μεγαλύτερες ... φαίνεται πῶς «ὅλες οἱ γραμμῆς» καλύπτονται ἀπὸ τὸν ὅρισμό». Ἐνὰ χρόνον ἀργότερα (22 Μαρτίου 1622) ἐπανέρχεται σ' αὐτὸ τὸ θέμα καὶ γράφει στὸν Γαλιλαῖο ὅτι ὁ λόγος ὑπάρχει γιὰτι καθεὺν συλλογὴ γραμμῶν μπορεῖ νὰ πολλαπλασιασθῇ γιὰ νὰ ὑπερβῇ κάποιαν ἄλλην συλλογὴ. Ὅμως ὁ Cavalieri ἔχοντας ἐξασφαλίσῃ ὅτι δύο συλλογὲς γραμμῶν μποροῦν νὰ ἀθροισθῶν καὶ νὰ ἀφαιρεθῶν τότε μποροῦν καὶ νὰ συγκριθῶν. B. CAVALIERI, ἐνθ' ἀν., σ. 111. Σίγουρα γιὰ τὸν Cavalieri αὐτὸ σημαίνει λόγον. Ἐτσι διατυπώνει τὸ 1 θεώρημα τοῦ II βιβλίου: «ὅλες οἱ γραμμῆς» ἐπιπέδων σχημάτων ... εἶναι μεγέθη πῶς ἔχουν λόγον μετὰ τὰς τούτας».

61. «Στὰ Μαθηματικὰ ὅλοι οἱ ὁρίμοι ὁδηγοῦν πίσω στὴν Ἑλλάδα», γράφει ὁ T. DANTZIG στὸ βιβλίο του *Number the Language of Science*, New York, 1930, σ. 120.

62. Πρῶτος ὁ ἐνὸς Stefano Angeli, καθηγητὴς στὴν Padova, σὲ ἀρκετὰ ἔργα χρησιμοποιοῦνται.

ὁποῖες θὰ προετοιμάσουν τὸ ἔδαφος γιὰ τὴ δημιουργία τοῦ ἀπειροστικοῦ λογισμοῦ. Τὰ ἀδιαίρετα, ἔγιναν τὰ ἀπειροστά τὰ ὁποῖα κατὰ τὸν Cauchy⁶³ εἶναι μιὰ μεταβλητὴ ποσότητα μὲ ὄριο τὸ μηδέν. Ὁ ἀπειροστικὸς λογισμὸς θὰ θεμελιωθεῖ αὐστηρὰ τὸν 19ο αἰῶνα πάνω στὴν ἔννοια τοῦ ὁρίου ἀπὸ τοὺς Bolzano, Cauchy, Weierstrass.

Χριστίνα Π. ΦΙΛΗ
(Ἀθῆναι)

TI: Archaiouellenike philosophia kai ta adiaireta tou Cavalieri: Mia Apopeira
— Proseggis (Ancient Greek Philosophy and the Infinitesimals of Cavalieri)

AU: Phile-Christina-P

SO: Philosophia- 2002; 32: 197-205

JN: Philosophia: Yearbook-of-the-Research-Center-for-Greek-Philosophy-at-the
-Academy-of-Athens

IS: 1105-2120

AB: Cavalieri's name is related to the theory of indivisibles. In his *Geometria*, introducing as a basic concept "Omnes lineae", he tried to calculate surfaces and volumes. Asserting that a line is made up of an infinite number of points, a plane of an infinite number of lines and a solid of an infinite number of planes, he adopted a theory of derivation in which Aristotle appears to attribute the line-plane-solid derivation to the Pythagoreans. The Pseudo-Aristotelian treatise on the indivisible lines, as well as Xenocrates' and Plato's concepts, seem to be reflected in Cavalieri's *Geometria*, one of the steps for the formation of an infinitesimal calculus. (edited)

εἰ συστηματικὰ τὴ θεωρία τοῦ Cavalieri: *Miscellaneum geometricum* (1660), *De infinitorum spiraliu spatiorum mensura* (1660), *De infinitorum cochlearum mensuris* (1661) κ.λ. Μάλιστα ἡ θεωρία τῶν ἀδιαίρετων τοῦ Cavalieri θὰ ρθᾷτε στὴν Ἀγγλία, μέσω τοῦ ἔργου τοῦ TORRICELLI, *Opera Geometrica* (1644), ἐνῶ στὴ Γαλλία θὰ διαδύσῃ ἀπὸ τὸν Jean de Beaugrand. Γύρω στὰ 1650 πολλὰ βιβλία περιέχουν τὴ μέθοδο τῶν ἀδιαίρετων: R. WHITE, *Hemisphaerium Dissectum* (1648), F. van SCHOOTEN, *De Organica conicarum sectionum in plano descriptione, tractatus geometris opticeis* (1646), I. WALLIS, *Arithmetica Infinitorum* (1655), I. BOULLIAU, *De lineis spiralibus demonstrationes novae* (1657). Μάλιστα μέχρι τὸν 18ο αἰῶνα ἡ θεωρία τοῦ Cavalieri, παρουσιάζεται σὲ ἀρκετὰ κλασικὰ βιβλία π.χ. Abbé de la CAILLE, *Lectiones Elementares mathematicae...*, 1722.

63. *Oeuvres*, vol. IV p. 281.